

Calcul de dérivées partielles

1. On pose $f(x, y) = \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 0$. Montrer que l'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer l'équivalence entre les assertions:

$$(1) : \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+t, y+t) = f(x, y) ;$$

$$(2) : \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

3. Expression du laplacien en coordonnées polaires.

Soit $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, soit $g : (r, \theta) \mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et exprimer $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ à l'aide des dérivées partielles de g .

4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 0$.

a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

b. Est-elle de classe $\mathcal{C}^2$?

Équations aux dérivées partielles

5.a. En utilisant le changement de variables $\{u = x + y, v = x - y\}$, résoudre, sur $\mathbb{R}^2$, l'équation aux dérivées partielles

$$(E) : \quad \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + 3(x - y) f = 0.$$

b. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer qu'il existe une unique solution de (E) vérifiant $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x, 0) = g(x)$ et l'expliciter.

6. En passant en coordonnées polaires, déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telles que

$$y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = f.$$

7. Résoudre, sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, l'équation aux dérivées partielles

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

8. Soit α un réel. Une fonction $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **homogène de degré α** si elle vérifie

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y).$$

a. Soit $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f est homogène de degré α si et seulement si elle est solution de l'équation aux dérivées partielles $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

On pourra considérer $g : t \mapsto f(tx, ty)$, avec $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ fixé.

b. Soit $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, homogène de degré α . Montrer que l'on a

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \alpha(\alpha - 1) f.$$

9. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, telles que, en posant $\varphi(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$, on ait

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3}.$$

10. Résoudre, dans l'ouvert $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > |y|\}$, l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

On pourra poser $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$.

11. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont harmoniques et à variables séparables, i.e. les fonctions f telles que l'on puisse écrire $f(x, y) = u(x) v(y)$ avec $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, et qui vérifient $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ sur $\mathbb{R}^2$.

12. Soient a, b, c trois réels tels que $ac < 0$. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, telles que

$$(\mathbf{E}) : \quad a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Indication. On pourra utiliser un changement de variables affine du type $\begin{cases} u = \lambda x + y \\ v = \mu x + y \end{cases}$, où λ et μ sont deux réels convenablement choisis.

13. Trouver les fonctions $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, telles que, en posant $f(x, y, z) = \varphi(r)$ avec $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, la fonction f vérifie sur l'ouvert $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + kf = 0,$$

où k est un réel donné.

14. On pose $S(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin t) dt$.

a. Montrer que S est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad x S''(x) + S'(x) + x S(x) = 0$.

c. Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Pour $(x, y) \in U$, on pose $\varphi(x, y) = S(\sqrt{x^2 + y^2})$. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et que $\Delta \varphi + \varphi = 0$, où Δ est le laplacien.

Recherche d'extremums

15. Déterminer les extremums locaux sur $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) de

$$f : (x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$$

$$g : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2xy - 2y + 5$$

$$h : (x, y) \mapsto x^3 + y^3$$

$$k : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$$

$$l : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$$

16. Rechercher les extremums locaux sur $\mathbb{R}^2$ de $f : (x, y) \mapsto x e^y + y e^x$.

17. Extremums locaux et globaux de $f : (x, y) \mapsto xy - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{x}$ sur $D = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

18. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y > 0, x + y \leq 1\}$.

a. Montrer que D est une partie fermée bornée du plan (un "compact").

b. Soient $a > 0, b > 0, c > 0$. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^a y^b (1 - x - y)^c$. Montrer que f est continue sur D .

c. Déterminer $\max_{(x, y) \in D} f(x, y)$.

19. Déterminer $M = \max_{(x, y) \in K} (\sin x \sin y \sin(x + y))$, avec $K = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]^2$.

20. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\forall m \in U \quad \Delta f(m) < 0$, où Δ représente l'opérateur laplacien. Montrer que f n'admet aucun minimum local dans U .

21. Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une **fonction convexe**, i.e. telle que

$$\forall (x, y) \in U \quad \forall \lambda \in [0, 1] \quad f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda) f(x) + \lambda f(y),$$

et de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que tout point critique de f est un minimum global.

22*. Soit E un espace euclidien, soit $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$, soit $u \in \mathbb{R}^n$ un vecteur fixé. Pour tout $x \in E$, on pose $g(x) = (f(x) \mid x) - (u \mid x)$. Montrer que g admet un unique point critique et que g présente en ce point un minimum global. On utilisera une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres de u .

Courbes et surfaces.

23. Soit la surface $\mathcal{S} : x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Existe-t-il des points de $\mathcal{S}$ en lesquels la normale est dirigée par le vecteur $\vec{v} = (1, 2, 3)$?

24. Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $x^2 - y^2 + z^2 = 1$. Déterminer les points de $\mathcal{S}$ en lesquels le plan tangent est parallèle au plan $P : 2x + y - z = 0$.

- 25.** Soit la surface $\mathcal{S}$ d'équation $3x^2 + y^2 + z^2 - 4yz = 0$. Trouver les plans tangents à $\mathcal{S}$ passant par le point $A(1, 1, 0)$.

26. Un petit problème: unicité de la solution de l'équation de la chaleur avec condition initiale.

On considérera, dans le plan $\mathbb{R}^2$, le demi-plan fermé $\Pi = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, ainsi que son intérieur qui est le demi-plan ouvert $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

Une fonction $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ et 2π -périodique, étant donnée, on dira qu'une fonction de deux variables $U : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ est **solution du problème** $\mathcal{P}(\Phi)$ si elle est continue sur Π , de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert Ω , et si elle vérifie

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall (x, t) \in \Omega & \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial U}{\partial t}(x, t) \quad (1) \\ \forall t \in \mathbb{R}_+ & U(0, t) = 0 \quad (2) \\ \forall x \in \mathbb{R} & U(x, 0) = \Phi(x) \quad (3) \\ \forall (x, t) \in \Pi & U(x + 2\pi, t) = U(x, t) \quad (4) \end{array} \right.$$

Pour la culture, l'équation aux dérivées partielles (1) est l'**équation de la chaleur**.

Supposons que deux fonctions $U_1 : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ et $U_2 : \Pi \rightarrow \mathbb{R}$ soient solutions du problème $\mathcal{P}(\Phi)$. Soit $V = U_2 - U_1$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$G(t) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} V(x, t)^2 dx.$$

1. Montrer que la fonction G est continue sur $\mathbb{R}_+$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Prouver la relation

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad G'(t) = - \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial V}{\partial x}(x, t) \right)^2 dx.$$

3. En déduire que G est nulle sur $\mathbb{R}_+$, puis que V est nulle sur Π .

Interprétation: la condition (3) signifie qu'à l'instant $t = 0$, on connaît la température $\Phi(x)$ en chaque point d'abscisse x d'une tige rectiligne et on suppose, pour la commodité du calcul, que cette fonction Φ est 2π -périodique ("périodicité spatiale", condition (4)). La condition (2) signifie par ailleurs que la température est maintenue constante, à 0°C par exemple, en le point d'abscisse 0 de la tige. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$, le réel $U(x, t)$ est alors la température au point d'abscisse x de la tige à l'instant t . En admettant l'existence d'une solution au problème $\mathcal{P}(\Phi)$, cet exercice montre que l'évolution temporelle de la température en chaque point de la tige est entièrement déterminée.