

CORRIGÉ du DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 8

PSI2 2025-2026

PARTIE A. Préliminaires.

1.a. Pour tout t réel, on a $\text{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$ et $e^{t^2/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!}$. Les rayons de convergence sont donc $+\infty$.

b. Comme $2^n = \prod_{k=1}^n 2 \leq \prod_{k=1}^n (n+k) = \frac{(2n)!}{n!}$, on a $\frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \frac{t^{2n}}{2^n n!}$ pour tout t réel et tout n entier naturel, donc $\text{ch}(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$.

2.a. Soit $l = \lim_{+\infty} f \in \mathbb{R}$. En écrivant la définition de la limite avec $\varepsilon = 1$, on obtient l'existence d'un réel $A \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour $t \geq A$, on ait $|f(t) - l| \leq 1$, i.e. $l - 1 \leq f(t) \leq l + 1$. Donc f est bornée sur l'intervalle $[A, +\infty[$. Comme f est continue, elle est aussi bornée sur le segment $[0, A]$. Elle est donc finalement bornée sur $\mathbb{R}_+$.

b. Il suffit d'appliquer le a. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+$ et, par croissances comparées, elle a une limite nulle en $+\infty$, elle est donc bornée sur $\mathbb{R}_+$.

PARTIE B. Transformée de Laplace d'une variable aléatoire.

3. Pour $t = 0$, la variable aléatoire constante de valeur 1 admet une espérance, donc $0 \in I_X$ et $\mathcal{L}_X(0) = 1$.

Il faut montrer que I_X est une partie convexe de $\mathbb{R}$. Soient $a \in I_X$ et $b \in I_X$ avec $a < b$, montrons que $[a, b] \subset I_X$. Si $t \in [a, b]$, on peut écrire $t = (1 - \lambda)a + \lambda b$ avec $\lambda \in [0, 1]$. De la convexité sur $\mathbb{R}$ de la fonction exponentielle, on déduit que, pour tout $\omega \in \Omega$, on a

$$0 \leq e^{(1-\lambda)aX(\omega) + \lambda bX(\omega)} \leq (1 - \lambda) e^{aX(\omega)} + \lambda e^{bX(\omega)},$$

on a donc les inégalités entre variables aléatoires: $0 \leq e^{(1-\lambda)aX + \lambda bX} \leq (1 - \lambda) e^{aX} + \lambda e^{bX}$. Comme a et b appartiennent à I_X , les variables e^{aX} et e^{bX} sont d'espérance finie, i.e. appartiennent à l'espace vectoriel $L^1(\Omega)$, il en est donc de même de la combinaison linéaire $(1 - \lambda) e^{aX} + \lambda e^{bX}$. Enfin, par le théorème de comparaison, on déduit que la variable $e^{tX} = e^{((1-\lambda)a + \lambda b)X}$ est d'espérance finie, donc $t \in I_X$.

4.a. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $X \geq 0$ et $E(e^{tX}) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{tn} P(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{(\lambda e^t)^n}{n!}$ (par le théorème du transfert) si cette série converge... et c'est toujours le cas puisqu'on a reconnu une série exponentielle. Donc $I_X = \mathbb{R}$ et $\mathcal{L}_X(t) = E(e^{tX}) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}$ pour tout t réel.

b. Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors $\mathcal{L}_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{nt} p q^{n-1} = p e^t \sum_{n=0}^{+\infty} (q e^t)^n$ en cas de convergence, où l'on a posé $q = 1 - p$. On reconnaît une série géométrique de raison $q e^t$ qui converge si et seulement si $q e^t < 1$, i.e. si et seulement si $t < -\ln(q)$. Donc $I_X =]-\infty, -\ln(q)[$ et, pour $t \in I_X$, on a

$$\mathcal{L}_X(t) = E(e^{tX}) = p e^t \sum_{n=0}^{+\infty} (q e^t)^n = \frac{p e^t}{1 - q e^t}.$$

c. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors on travaille sur des sommes finies (l'ensemble image $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ est fini), il n'y a donc aucun problème de convergence, et $I_X = \mathbb{R}$, puis

$$\mathcal{L}_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^n e^{kt} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p e^t + q)^n \quad \text{avec} \quad q = 1 - p.$$

- d. Si $X \sim \mathcal{Z}(x)$ avec $x > 1$ (loi zéta de paramètre x), alors $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X = n) = \frac{1}{n^x \zeta(x)}. \text{ Alors } \mathcal{L}_X(t) = \frac{1}{\zeta(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{nt}}{n^x} \text{ en cas de convergence de cette série. En}$$
posant $a_n = \frac{e^{nt}}{n^x}$, on a $\frac{a_{n+1}}{a_n} = e^t \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^t$. La règle de d'Alembert permet de conclure à la convergence si $t < 0$ et à la divergence si $t > 0$. D'autre part, pour $t = 0$, la série converge et a pour somme 1 (cf. **Q3.**). Donc $I_X = \mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$.

PARTIE C. Majoration de $\mathcal{L}_X(t)$ pour une variable centrée à valeurs dans $[-1, 1]$.

5. La fonction g_a est dérivable deux fois sur $[-1, 1]$ avec $g_a''(x) = -(\ln a)^2 a^x < 0$, donc g_a est concave sur $\mathbb{R}$. Comme $g_a(-1) = g_a(1) = 0$, sur le segment $[-1, 1]$, elle est "au-dessus de sa sécante", i.e. elle prend des valeurs positives.
6. Il suffit d'appliquer la question 5. avec $a = e^t > 1$.
- 7.a. Si $X(\Omega) \subset [-1, 1]$, on a $|X| \leq 1$, donc pour tout t réel, $tX \leq |tX| \leq |t|$ puis $0 \leq e^{tX} \leq e^{|t|}$. Or, la variable aléatoire constante $e^{|t|}$ est d'espérance finie donc, par comparaison, e^{tX} est d'espérance finie. On a donc $I_X = \mathbb{R}$. Si k est un entier naturel non nul, on a $|X^k| \leq 1$, donc X^k est d'espérance finie pour les mêmes raisons.
- b. De l'inégalité de la question 6., on déduit, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'inégalité entre variables aléatoires

$$e^{tX} \leq e^{-t} \frac{1-X}{2} + e^t \frac{1+X}{2} = \text{ch}(t) + \text{sh}(t) \cdot X.$$

Par linéarité et croissance de l'espérance, on déduit

$$\mathcal{L}_X(t) = E(e^{tX}) \leq E(\text{ch}(t) + \text{sh}(t) \cdot X) = \text{ch}(t) + \text{sh}(t) E(X) = \text{ch}(t).$$

De la question 1.b., on déduit enfin la majoration demandée $\mathcal{L}_X(t) \leq e^{t^2/2}$ pour $t > 0$.

Enfin, pour $t = 0$, l'inégalité demandée est triviale puisque $\mathcal{L}_X(0) = 1$. Et, si $t < 0$, en appliquant ce que l'on vient de démontrer en remplaçant t par $-t$ (qui est alors strictement positif) et X par $-X$ (qui est aussi centrée et à valeurs dans $[-1, 1]$), on obtient que $\mathcal{L}_X(t) = E(e^{tX}) = E(e^{(-t)(-X)}) = \mathcal{L}_{-X}(-t) \leq e^{(-t)^2/2} = e^{t^2/2}$.

PARTIE D. La loi forte des grands nombres dans un cas particulier.

8. Par croissance stricte de la fonction exponentielle, il est clair que l'événement $\{S_n \geq \varepsilon\}$ coïncide avec l'événement $\{e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon}\}$ pour $t > 0$ et $n > 0$. La variable aléatoire $Y = e^{tnS_n}$ est positive et bornée (car $-1 \leq S_n \leq 1$, donc $0 \leq Y \leq e^{nt}$), elle est donc d'espérance finie. On peut donc lui appliquer l'inégalité de Markov: pour tout $a > 0$, on a $P(Y \geq a) \leq \frac{E(Y)}{a}$.

$$\text{Or, } E(Y) = E(e^{tnS_n}) = E\left(\prod_{k=1}^n e^{tX_k}\right) = \prod_{k=1}^n E(e^{tX_k}) \text{ car les variables } X_k, (1 \leq k \leq n),$$

sont mutuellement indépendantes et il en est donc de même des variables e^{tX_k} , ($1 \leq k \leq n$) d'après les propriétés rappelées en préambule. Mais les X_k ayant toutes la même loi que X , les e^{tX_k} ont alors la même loi que e^{tX} et $E(e^{tX_k}) = \mathcal{L}_X(t)$ pour tout k . Avec $a = e^{tn\varepsilon}$, on obtient donc

$$P(e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon}) \leq (\mathcal{L}_X(t))^n e^{-tn\varepsilon}.$$

9. La fonction exponentielle étant strictement croissante, il suffit d'étudier les variations de $f_\varepsilon : t \mapsto -nt\varepsilon + n\frac{t^2}{2}$. On a $f'_\varepsilon(t) = n(t - \varepsilon)$, donc f_ε (et aussi $g_\varepsilon = \exp \circ f_\varepsilon$) est décroissante sur $] -\infty, \varepsilon]$ et croissante sur $[\varepsilon, +\infty[$. La fonction $g_\varepsilon : t \mapsto e^{-nt\varepsilon + nt^2/2}$ est donc minimale pour $t = \varepsilon$ et sa valeur minimale est $g_\varepsilon(\varepsilon) = e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}$.

Des questions 7.b. et 8., on déduit que, pour tous $t > 0$ et $\varepsilon > 0$, on a

$$P(S_n \geq \varepsilon) \leq \left(e^{\frac{t^2}{2}}\right)^n e^{-tn\varepsilon} = g_\varepsilon(t) = e^{-nt\varepsilon + nt^2/2}.$$

En particulier, en choisissant $t = \varepsilon$, on a $P(S_n \geq \varepsilon) \leq g_\varepsilon(\varepsilon) = e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}$.

En remplaçant les variables X_k par leurs opposées $-X_k$ (qui sont aussi mutuellement indépendantes, de même loi que $-X$, qui est aussi centrée à valeurs dans $[-1, 1]$), on obtient la majoration $P(-S_n \geq \varepsilon) = P(S_n \leq -\varepsilon) \leq e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}$.

Enfin, $\{|S_n| \geq \varepsilon\} = \{S_n \geq \varepsilon\} \cup \{S_n \leq -\varepsilon\}$, donc $P(|S_n| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}$.

10. La série géométrique $\sum e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}}$ converge, et on a

$$P(|S_n| > \varepsilon) \leq P(|S_n| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-\frac{n\varepsilon^2}{2}},$$

donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum P(|S_n| > \varepsilon)$ est convergente.

11. On a donc $B_n(\varepsilon) = \bigcup_{k=n}^{+\infty} \{|S_k| > \varepsilon\}$. Par sous-additivité, $P(B_n(\varepsilon)) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(|S_k| > \varepsilon)$.

Or, le reste d'ordre n d'une série convergente tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Par encadrement, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n(\varepsilon)) = 0$.

Ensuite, on a $B(\varepsilon) \subset B_n(\varepsilon)$ pour tout n , donc par croissance d'une probabilité, on a $0 \leq P(B(\varepsilon)) \leq P(B_n(\varepsilon))$ pour tout n . De $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n(\varepsilon)) = 0$, on déduit $P(B(\varepsilon)) = 0$, cet événement est négligeable.

12. Soit $\omega \in \Omega$. On a les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(\omega) = 0 &\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \geq N \quad |S_n(\omega)| \leq \varepsilon \\ &\iff \forall p \in \mathbb{N}^* \quad \exists N \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \geq N \quad |S_n(\omega)| \leq \frac{1}{p} \\ &\iff \forall p \in \mathbb{N}^* \quad \exists N \in \mathbb{N}^* \quad \omega \in \bigcap_{n \geq N} \left\{ |S_n| \leq \frac{1}{p} \right\}. \end{aligned}$$

Mais $\bigcap_{n \geq N} \left\{ |S_n| \leq \frac{1}{p} \right\} = \bigcap_{n \geq N} \overline{\left\{ |S_n| > \frac{1}{p} \right\}} = \overline{\bigcup_{n \geq N} \left\{ |S_n| > \frac{1}{p} \right\}} = \overline{B_N\left(\frac{1}{p}\right)}$. Reprenons...

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(\omega) = 0 \iff \forall p \in \mathbb{N}^* \quad \exists N \in \mathbb{N}^* \quad \omega \in \overline{B_N\left(\frac{1}{p}\right)}$$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}^* \quad \omega \in \bigcup_{N \in \mathbb{N}^*} \overline{B_N\left(\frac{1}{p}\right)} \\
&\Longleftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}^* \quad \omega \in \overline{\bigcap_{N \in \mathbb{N}^*} B_N\left(\frac{1}{p}\right)} = \overline{B\left(\frac{1}{p}\right)} \\
&\Longleftrightarrow \omega \in \bigcap_{p \in \mathbb{N}^*} \overline{B\left(\frac{1}{p}\right)} = \overline{\bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} B\left(\frac{1}{p}\right)}.
\end{aligned}$$

L'identité $A = \overline{\bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} B\left(\frac{1}{p}\right)}$ est donc prouvée.

- 13.** Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $P\left(B\left(\frac{1}{p}\right)\right) = 0$ d'après la question **11**. Par sous-additivité, on déduit que $P(\overline{A}) = P\left(\bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} B\left(\frac{1}{p}\right)\right) = 0$. Une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable. Par passage au complémentaire, on a $P(A) = 1$.

PARTIE E. Fonction génératrice des moments.

- 14.** Si $t \in [-\alpha, \alpha]$, on a $tX \leq |tX| \leq \alpha|X|$, donc $0 \leq e^{tX} \leq e^{\alpha|X|}$. Du théorème de comparaison, comme on sait que $e^{\alpha|X|}$ est d'espérance finie, on en déduit que e^{tX} est d'espérance finie, donc que $t \in I_X$. Ainsi, $[-\alpha, \alpha] \subset I_X$.
- 15.** Soit $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $g : x \mapsto x^k e^{-\alpha x}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$ d'après **2.b**. Il existe donc un réel positif M tel que $|x|^k e^{-\alpha|x|} \leq M$ pour tout x réel, on peut donc écrire $|X^k| \leq M e^{\alpha|X|}$. De nouveau par le théorème de comparaison, on déduit que X^k est d'espérance finie, donc X admet un moment d'ordre k .
- 16.** Soit $X(\Omega) = \{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$ une énumération de l'ensemble-image, posons $p_n = P(X = x_n)$ pour tout n , ce sont des réels positifs dont la somme vaut 1. Par hypothèse, $e^{\alpha|X|}$ est d'espérance finie, c'est-à-dire la série $\sum p_n e^{\alpha|x_n|}$ est convergente ("absolument", mais elle est à termes positifs). Pour $t \in [-\alpha, \alpha]$, on a $\mathcal{L}_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$, en posant $u_n(t) = p_n e^{tx_n}$.

Les fonctions u_n sont continues sur $[-\alpha, \alpha]$, et on a $|u_n(t)| = u_n(t) \leq p_n e^{|tx_n|} \leq p_n e^{\alpha|x_n|}$ sur cet intervalle, ce qui montre la convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $[-\alpha, \alpha]$. La fonction somme $\mathcal{L}_X$ est alors continue sur ce segment.

- 17.** Soit β un réel tel que $0 < \beta < \alpha$. On va montrer que, pour tout k entier naturel, la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n^{(k)}$ converge normalement sur le segment $S = [-\beta, \beta]$.

En effet, on a $u_n^{(k)}(t) = p_n x_n^k e^{tx_n}$, donc pour $t \in S$,

$$|u_n^{(k)}(t)| = p_n |x_n|^k e^{tx_n} \leq p_n |x_n|^k e^{|tx_n|} \leq p_n |x_n|^k e^{\beta|x_n|} = p_n |x_n|^k e^{-(\alpha-\beta)|x_n|} e^{\alpha|x_n|}.$$

Or, d'après **2.b**, de nouveau, la fonction $x \mapsto x^k e^{-(\alpha-\beta)x}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$, donc il existe un réel positif M' tel que $|u_n^{(k)}(t)| \leq M' p_n e^{\alpha|x_n|}$ qui est le terme général d'une série convergente (indépendante de la variable t).

Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur S , et on vient de prouver, pour tout k entier naturel, la convergence normale, donc uniforme, de la série des dérivées k -ièmes $\sum_n u_n^{(k)}$.

Le théorème de dérivation des séries de fonctions (extension aux fonctions $\mathcal{C}^\infty$) s'applique, la fonction somme $\mathcal{L}_X$ est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout segment inclus dans $] -\alpha, \alpha[$, elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $] -\alpha, \alpha[$.

- 18.** Le théorème de dérivation des séries de fonctions nous autorise alors à dériver terme à terme pour obtenir

$$\forall t \in] -\alpha, \alpha[\quad \mathcal{L}_X^{(k)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x_n^k e^{tx_n} = \mathbb{E}(X^k e^{tX}) ,$$

la dernière égalité résultant de la formule du transfert.

En particulier, $\mathcal{L}_X^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^k P(X = x_n) = \mathbb{E}(X^k)$.

On retrouve ainsi le moment d'ordre k de la variable X .