

PROBLÈME

Partie A. Temps d'attente du k -ième succès.

Dans cette partie, on se donne une suite $(X_i)_{i \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, chacune d'elles suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_k = \sum_{i=1}^k X_i$.

On rappelle que, par convention, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est nul lorsque $k > n$.

1. Expliciter la fonction génératrice de la variable T_k .
2. En déduire que, pour m et k entiers naturels non nuls, on a

$$P(T_k = m) = \binom{m-1}{k-1} p^k (1-p)^{m-k}.$$

3. Expliquer le titre donné à cette “**Partie A**”.
4. Retrouver le résultat du 2. par un raisonnement de dénombrement, en interprétant T_k comme le temps d'attente du k -ième succès dans une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p .

Partie B. Somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires.

Dans cette partie, on note X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On se donne une suite $(X_i)_{i \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même loi que X . Soit d'autre part N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, que l'on suppose indépendante des X_i . Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$S(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega).$$

On conviendra que $S(\omega) = 0$ si $N(\omega) = 0$.

5. Montrer que S est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et que sa fonction génératrice est donnée par

$$\forall t \in [-1, 1] \quad G_S(t) = G_N(G_X(t)).$$

6. On suppose que X et N sont d'espérance finie. Montrer que S est d'espérance finie, et exprimer $E(S)$ à l'aide de $E(X)$ et $E(N)$.
7. Dans cette question, on suppose que $X \sim \mathcal{G}(p)$ et $N \sim \mathcal{G}(q)$ avec $(p, q) \in]0, 1[^2$. Déterminer la loi de S .

Partie C. Modèle de propagation d'une épidémie.

On étudie la propagation d'une épidémie dans une population a priori infinie. On suppose qu'un seul individu est infecté le jour 0. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note Z_n le nombre d'individus infectés le jour n . Chacun de ces individus contamine alors un nombre aléatoire de personnes avant d'être guéri au jour $n+1$ (*oui, c'est une épidémie “gentille”*). Si $X_i^{(n)}$ désigne le nombre de

personnes contaminées par l'individu i lors du n -ième jour, on a donc $Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i^{(n)}$.

On admettra en effet qu'une personne n'est jamais contaminée le même jour par deux individus différents. On admettra aussi que l'on peut, sans modifier le calcul, considérer que les Z_n personnes infectées le jour n portent les numéros 1 à Z_n .

Par convention, si $Z_n = 0$, alors $Z_{n+1} = 0$ et l'épidémie est alors terminée.

On suppose que, pour n donné, les variables $X_i^{(n)}$, avec $i \in \llbracket 1, Z_n \rrbracket$, sont indépendantes entre elles, et qu'elles sont aussi indépendantes de Z_n . On suppose enfin que, pour tout $i \in \llbracket 1, Z_n \rrbracket$, la variable $X_i^{(n)}$ est “géométrique décalée” de paramètre $p \in]0, 1[$, i.e. que $Y_i^{(n)} = X_i^{(n)} + 1 \sim \mathcal{G}(p)$. On posera enfin $q = 1 - p$.

8. Pour k et n entiers naturels, montrer la relation (où $\delta_{0,k}$ est un symbole de Kronecker):

$$P(Z_{n+1} = k) = \delta_{0,k} P(Z_n = 0) + \sum_{j=1}^{+\infty} \binom{k+j-1}{j-1} p^j q^k P(Z_n = j).$$

Cette relation s'avère toutefois peu commode pour étudier la loi des variables Z_n , nous allons donc procéder autrement. Pour simplifier, on notera X une variable aléatoire ayant la même loi que les $X_i^{(n)}$. On utilisera les résultats de la **partie B**.

9. Déterminer la fonction génératrice G_X de la variable X .

10. Pour tout n , montrer que $G_{Z_n} = G_X \circ \dots \circ G_X$ avec n facteurs, ce que l'on notera G_X^{on} .

11. Calculer $E(Z_n)$ pour tout n . Commenter.

12. Montrer que, si V est une variable aléatoire quelconque à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors l'intervalle $[0, 1]$ est stable par la fonction génératrice G_V .

13. Soit (r_n) la suite définie par $r_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad r_{n+1} = G_X(r_n)$. Montrer que la suite (r_n) converge et déterminer $r = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n$. On discutera suivant que $p < \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{2}$ ou $p > \frac{1}{2}$.

14. Dédire de ce qui précède la probabilité que l'épidémie se termine en un temps fini, i.e. le nombre $P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{Z_n = 0\}\right)$, en fonction du paramètre p .

Partie D. Calcul effectif des fonctions génératrices.

15. À chaque matrice carrée d'ordre deux $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, supposée inversible, on associe la fonction "homographique" $f_A : x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$. Si A et B sont dans $\text{GL}_2(\mathbb{R})$, construire une matrice $C \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $f_A \circ f_B = f_C$. On ne se préoccupera pas des ensembles de définition des dites fonctions homographiques.

16. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & p \\ p-1 & 1 \end{pmatrix}$ avec $p \in]0, 1[\setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Montrer que A est diagonalisable et calculer A^n pour n entier naturel.

17. En déduire, pour tout n entier naturel, la fonction génératrice de la variable Z_n dans le modèle d'épidémie introduit dans la **partie C.**, si $p \neq \frac{1}{2}$.

18. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$.

19. En déduire, lorsque $p = \frac{1}{2}$, la fonction génératrice de Z_n , puis déterminer la loi de Z_n pour tout n entier naturel.

EXERCICE 1

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n \simeq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique $(\cdot|\cdot)$ défini par $(X|Y) = X^\top Y$, et de la norme euclidienne associée notée $\|\cdot\|$.

A. Matrices de rang 1.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. Montrer qu'il existe deux matrices-colonnes $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = XY^\top$.
2. Réciproquement, soit $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Montrer que $A = XY^\top$ est de rang 1.

Dans toute la suite de la partie A., on note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

3. Prouver la relation $A^2 = \text{tr}(A) \cdot A$.
4. En déduire une expression de A^k pour tout k entier naturel non nul.
5. Donner une CNS sur la trace de A pour que A soit nilpotente.
6. Donner une CNS sur la trace de A pour que A soit diagonalisable.

B. Matrices de Householder.

Pour tout $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, on pose $P_V = \frac{1}{\|V\|^2} VV^\top$ et $Q_V = I_n - 2P_V$.

7. Montrer que l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice P_V est le projecteur orthogonal sur la droite $D = \text{Vect}(V)$.
8. Montrer que la matrice Q_V est symétrique et orthogonale. Donner son interprétation géométrique.

C. Factorisation QR.

Soient $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $\|U\| = \|V\|$, on pose $D = \text{Vect}(U - V)$.

9. Prouver l'égalité $D^\perp = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \|X - U\| = \|X - V\|\}$.
10. Déterminer les projetés orthogonaux de U sur D et sur $D^\perp$.
11. On suppose U et V non colinéaires. Calculer $Q_{U-V}U$.
12. En déduire que, pour tous vecteurs X et Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe une matrice orthogonale Q telle que QX est colinéaire à Y .
13. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $Q_1 \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $Q_1 A$

soit de la forme $Q_1 A = \begin{pmatrix} \alpha & * & * \\ 0 & & \\ \vdots & C_1 & \\ 0 & & \end{pmatrix}$, avec α réel et $C_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$.

14. En raisonnant par récurrence sur n , montrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ orthogonale telle que QA soit triangulaire supérieure.

EXERCICE 2 (plus technique que l'exo 1)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Dans les questions 1. et 2., on se donne une matrice symétrique réelle $A \in \mathcal{S}_{n-1}(\mathbb{R})$ d'ordre $n-1$, une matrice-colonne $V \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$, un réel α , et on considère la matrice symétrique d'ordre n :

$$B = \begin{pmatrix} A & V \\ V^\top & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

1. On suppose que $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$ et que $\det(B) > 0$.
2. L'objectif de cette question est de prouver la réciproque de la question précédente. On suppose donc que A est définie positive, et que $\det(B) > 0$.
 - a. Montrer qu'il existe $n-1$ réels strictement positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ (non nécessairement distincts) et une matrice orthogonale $P \in \mathcal{O}_{n-1}(\mathbb{R})$ tels que

$$P^{-1}AP = P^\top AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}).$$

- b. En déduire l'existence d'une matrice orthogonale $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et de $n-1$ réels $u_1, \dots, u_{n-1}$ tels que $B = QB'Q^\top$, avec

$$B' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) & u_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ (0) & & \lambda_{n-1} & u_{n-1} \\ u_1 & \cdots & u_{n-1} & \alpha \end{pmatrix}.$$

- c. Calculer $\det(B')$. En déduire que $\alpha - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{u_i^2}{\lambda_i} > 0$.

- d. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, soit $Y = Q^\top X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Montrer que

$$X^\top BX = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \left(y_i + \frac{u_i}{\lambda_i} y_n \right)^2 + \left(\alpha - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{u_i^2}{\lambda_i} \right) y_n^2.$$

- e. En déduire que la matrice B est définie positive.
3. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note M_k la matrice carrée d'ordre k obtenue en ne conservant que les k premières lignes et les k premières colonnes de la matrice M . Prouver l'équivalence

$$M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \det(M_k) > 0.$$

4. Montrer que la matrice symétrique $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, avec $s_{i,j} = \min\{i, j\}$, est définie positive.