

Probabilités

Tout le chapitre, c'est-à-dire le programme précédent, plus:

Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Elle détermine la loi. Propriétés.

Exemples des lois usuelles. Fonction génératrice d'une somme de variables indépendantes.

Utilisation de la fonction génératrice pour calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, notamment X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable (à gauche) au point 1.

Calcul différentiel

Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles premières pour $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ avec U un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors elle admet en tout point a de U un développement limité d'ordre un, définition de la différentielle de f au point a , expression à l'aide des dérivées partielles:

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + df(a) \cdot h + o(\|h\|) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + \sum_{i=1}^p \partial_i f(a) h_i + o(\|h\|).$$

Règle de la chaîne, dérivation de $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_p(t))$ i.e. "dérivée le long d'un arc", caractérisation des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ constantes sur un ouvert convexe. Application de la règle de la chaîne au calcul de dérivées partielles de fonctions composées, cas du "passage en coordonnées polaires".

Gradient de $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, noté ∇f . Expression du gradient en coordonnées polaires.

Exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles d'ordre un, une indication de changement de variables étant fournie.

Démonstrations de cours ou proches du cours

- Formule $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$ pour X à valeurs dans $\mathbb{N}$.
- Si X^2 est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie. L'ensemble $L^2(\Omega)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.
- Fonction génératrice d'une somme de variables indépendantes.
- Si $E(X) < +\infty$ avec $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, alors G_X est dérivable en 1 et $E(X) = G'_X(1)$.
- Caractérisation des fonctions constantes de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert convexe.
- Dérivées partielles de $(r, \theta) \mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Expression du gradient en coordonnées polaires.