

DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 8
COMMENTAIRES
PSI2 2025-2026

Un petit commentaire général: les informations rappelées en préambule n'ont pas toujours été bien utilisées, notamment le **théorème de comparaison**: si $E(Y) < +\infty$ et $|X| \leq Y$, alors X est d'espérance finie, ce qui doit s'écrire $E(|X|) < +\infty$ puisque la variable X n'est pas supposée positive. Cela vous oblige parfois à des détours assez lourds et pas toujours rigoureux.

2.a. Cela s'améliore mais il y a encore quelques erreurs de rédaction pour cette question très classique et maintes fois rabâchée.

3. Attention aux “disjonctions de cas” qui sont loin d'englober tous les cas! Certains d'entre vous considèrent le cas $X \geq 0$ puis le cas $X < 0$ sans penser qu'une variable aléatoire réelle n'a aucun raison d'être de signe constant!

C'est un peu comme si vous vouliez montrer une propriété concernant des fonctions d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ en étudiant uniquement les cas “ f croissante” et “ f décroissante”, sans penser qu'une fonction n'est pas toujours monotone.

Une autre erreur souvent rencontrée ici, c'est celle qui consiste à prétendre que, si a et b sont deux réels, alors les variables e^{aX} et e^{bX} sont indépendantes! Deux variables aléatoires Y et Z qui sont fonctions d'une même variable aléatoire X sont rarement indépendantes, déjà intuitivement puisque la valeur de l'une impose plus ou moins la valeur de l'autre!

4.d. Attention aux erreurs de rédaction concernant la règle de d'Alembert: cette règle ne donne pas une condition nécessaire et suffisante de convergence, autrement dit il n'y a pas de “si et seulement si” puisqu'il reste un “cas critique” quand le rapport $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ tend vers 1.

6. Quelques erreurs d'introduction des données. Dans cette question **6.**, l'énoncé introduit un réel t strictement positif. Pour utiliser la question précédente, vous devez lui associer le réel $a = e^t$, qui est alors strictement plus grand que 1. Ce n'est pas ici le réel a qui est donné par l'énoncé.

7. et 9. Quelques confusions sur la notion de “variable centrée”: cela signifie seulement que son espérance est nulle. Ne pas confondre avec “variable symétrique par rapport à 0” qui signifierait que X et $-X$ ont la même loi (cette condition est plus forte que la précédente).

Une analogie: soit f une fonction continue sur $[-1, 1]$ à valeurs réelles, est-ce la même chose de dire que son intégrale est nulle ou de dire qu'elle est impaire ?

16. et 17. Attention, dans cette **PARTIE E.**, les variables aléatoires considérées ne sont pas supposées être à valeurs dans $\mathbb{N}$, les formules faisant apparaître des $P(X = k)$ avec k entier naturel ne correspondent donc pas au contexte.

Comme X est supposée réelle discrète, son ensemble image $X(\Omega)$ est une partie de $\mathbb{R}$ au plus dénombrable. Pour pouvoir appliquer les théorèmes de continuité et de dérivabilité des séries de fonctions, il fallait alors introduire une **énumération** de cet ensemble image, i.e. si $X(\Omega)$ est dénombrable, poser $X(\Omega) = \{x_n ; n \in \mathbb{N}\}$ avec les x_n réels distincts, cf. corrigé.