

CORRIGÉ du DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 9
PSI2 2025-2026

PROBLÈME

Partie A. Temps d'attente du k -ième succès.

1. Les variables X_i étant indépendantes, on a $G_{T_k} = \prod_{i=1}^k G_{X_i}$, soit, avec $q = 1 - p$,

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in [-1, 1] \quad G_{T_k}(t) = (G_{X_1}(t))^k = \left(\frac{pt}{1-qt} \right)^k.$$

2. Développons $G_{T_k}(t)$ en série entière, le coefficient de t^m est $P(T_k = m)$. Pour $t \in [-1, 1]$,

$$\begin{aligned} G_{T_k}(t) &= (1-qt)^{-k} (pt)^k = p^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-k)(-k-1)\cdots(-k-n+1)}{n!} (-qt)^n t^k \\ &= p^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!} q^n t^{n+k} \\ &= p^k \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k-1}{k-1} q^n t^{n+k} = \sum_{m=k}^{+\infty} \binom{m-1}{k-1} p^k q^{m-k} t^m. \end{aligned}$$

On obtient bien

$$P(T_k = m) = \binom{m-1}{k-1} p^k (1-p)^{m-k}.$$

Bien sûr, $P(T_k = m)$ est nul lorsque $m < k$, ce qui est cohérent avec la convention que le coefficient binomial est nul dans ce cas.

Remarque. On peut considérer que T_k prend ses valeurs dans $\llbracket k, +\infty \rrbracket = \llbracket k, +\infty \rrbracket \cup \{+\infty\}$, mais on observe que

$$P(T_k < +\infty) = \sum_{m=k}^{+\infty} P(T_k = m) = G_{T_k}(1) = \left(\frac{p}{1-q} \right)^k = 1,$$

donc $P(T_k = +\infty) = 0$. On peut noter aussi que $\{T_k = +\infty\} = \bigcup_{i=1}^k \{X_i = +\infty\}$, c'est donc une réunion finie d'événements négligeables, il est encore de probabilité nulle.

3. On rappelle que, si l'on considère une succession infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p (probabilité de succès à chaque épreuve), alors le temps d'attente du premier succès est modélisé par une variable aléatoire X_1 suivant la loi géométrique de paramètre p . Si l'on note X_2 le temps d'attente du deuxième succès en remettant le chronomètre à zéro lors du premier succès, on a aussi $X_2 \sim \mathcal{G}(p)$. Le temps total d'attente du deuxième succès est ainsi $T_2 = X_1 + X_2$. Dans cette expérience aléatoire, on admettra l'indépendance des variables X_1 et X_2 qui est liée au caractère "sans mémoire" de la loi géométrique (*le passé n'a pas d'influence sur le futur, la loi du temps d'attente d'un succès est la même, qu'il y ait déjà eu d'autres succès auparavant ou non*).

Ainsi, en notant X_i le temps d'attente entre le $(i-1)$ -ième et le i -ième succès ($i \geq 2$), et en admettant l'indépendance de ces variables X_i , $i \in \mathbb{N}^*$, on interprète $T_k = \sum_{i=1}^k X_i$ comme

le temps d'attente du k -ième succès. Toutes ces variables aléatoires prennent leurs valeurs a priori dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$, mais la valeur $+\infty$ est atteinte avec une probabilité nulle.

Remarquons toutefois que, si $X_1 = +\infty$ par exemple (aucun succès n'est jamais obtenu), alors $T_k = +\infty$ pour tout $k \geq 1$, mais l'interprétation des variables X_2 , etc. n'a plus guère de sens! Mais, peu importe, un tel événement est "négligeable".

4. Pour tout $m \geq k$, on a $\{T_k = m\} = S_m \cap A_{m-1, k-1}$ en introduisant les événements

S_m : “on obtient un succès à la m -ième épreuve” ;

$A_{m-1, k-1}$: “on a obtenu $k-1$ succès lors des $m-1$ premières répétitions de l’expérience”.

Ces événements sont indépendants puisqu’ils ne prennent pas en compte les mêmes épreuves (pour formaliser rigoureusement, mais c’est lourd, il faudrait appliquer le lemme des coalitions en introduisant les variables aléatoires indicatrices des événements S_i , $1 \leq i \leq m$).

D’autre part, $P(S_m) = p$ et $P(A_{m-1, k-1}) = \binom{m-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(m-1)-(k-1)}$ puisque l’on reconnaît un schéma de Bernoulli. On retrouve alors l’expression de $P(T_k = m)$ obtenue à la question 2.

Partie B. Somme d’un nombre aléatoire de variables aléatoires.

5. Pour tout k entier naturel, $\{S = k\} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\{N = n\} \cap \left\{ \sum_{i=1}^n X_i = k \right\} \right)$ est un événement

(une tribu est stable par les opérations ensemblistes finies ou dénombrables), donc S est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour tout k entier naturel, on a par σ -additivité (la réunion ci-dessus étant disjointe),

$$P(S = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n, S = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P\left(N = n, \sum_{i=1}^n X_i = k\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n) P\left(\sum_{i=1}^n X_i = k\right),$$

la dernière égalité étant vraie puisque, par le lemme des coalitions, les variables $\sum_{i=1}^n X_i$ et N sont indépendantes.

Soit $t \in [-1, 1]$, alors la famille $(P(N = n, S = k) t^k)_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable puisque, dans $[0, +\infty]$, on peut écrire, comme $(\{N = n\} \cap \{S = k\})_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$ est un système complet,

$$\sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^2} |P(N = n, S = k) t^k| \leq \sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^2} P(N = n, S = k) = P(\Omega) = 1 < +\infty.$$

Cela autorise donc les interversions de sommations (théorème de Fubini). Ainsi,

$$\begin{aligned} G_S(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(S = k) t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n, S = k) \right) t^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n) P\left(\sum_{i=1}^n X_i = k\right) \right) t^k \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} P\left(\sum_{i=1}^n X_i = k\right) t^k \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n) G_{X_1 + \dots + X_n}(t) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n) G_X(t)^n = G_N(G_X(t)). \end{aligned}$$

6. Les variables X et N étant d'espérance finie, la fonction G_X est dérivable en 1, et la fonction G_N est dérivable en $1 = G_X(1)$. Donc la fonction composée $G_N \circ G_X = G_S$ est aussi dérivable en 1, ce qui prouve que S est d'espérance finie. Puis

$$E(S) = G'_S(1) = (G_N \circ G_X)'(1) = G'_X(1) \cdot G'_N(G_X(1)) = E(X) \cdot E(N) .$$

7. Pour $t \in [-1, 1]$, on a $G_X(t) = \frac{pt}{1 - (1-p)t}$ et $G_N(t) = \frac{qt}{1 - (1-q)t}$, puis

$$G_S(t) = G_N(G_X(t)) = \frac{q \frac{pt}{1 - (1-p)t}}{1 - (1-q) \frac{pt}{1 - (1-p)t}} = \frac{pqt}{1 - (1-pq)t} .$$

Comme la fonction génératrice détermine la loi, on conclut que $S \sim \mathcal{G}(pq)$.

Partie C. Modèle de propagation d'une épidémie.

8. Par la formule des probabilités totales,

$$P(Z_{n+1} = k) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(Z_{n+1} = k, Z_n = j) .$$

Si k est non nul, $\{Z_n = 0\} \cap \{Z_{n+1} = k\} = \emptyset$ donc $P(Z_{n+1} = k, Z_n = 0) = 0$.

Le terme pour $j = 0$ ne subsiste donc que si $k = 0$ et vaut alors $P(Z_n = 0)$ puisque $\{Z_n = 0\} \subset \{Z_{n+1} = 0\}$.

Pour k non nul,

$$P(Z_{n+1} = k, Z_n = j) = P\left(\sum_{i=1}^j X_i^{(n)} = k, Z_n = j\right) = P\left(\sum_{i=1}^j X_i^{(n)} = k\right) P(Z_n = j)$$

par indépendance de Z_n et $\sum_{i=1}^j X_i^{(n)}$ (cf. question 5., lemme des coalitions). Donc

$$\begin{aligned} P(Z_{n+1} = k) &= \delta_{0,k} P(Z_n = 0) + \sum_{j=1}^{+\infty} P\left(\sum_{i=1}^j X_i^{(n)} = k\right) P(Z_n = j) \\ &= \delta_{0,k} P(Z_n = 0) + \sum_{j=1}^{+\infty} P\left(\sum_{i=1}^j Y_i^{(n)} = k + j\right) P(Z_n = j) \\ &= \delta_{0,k} P(Z_n = 0) + \sum_{j=1}^{+\infty} \binom{k+j-1}{j-1} p^j q^{(k+j)-j} P(Z_n = j) \end{aligned}$$

en appliquant la question 2. aux variables $Y_i^{(n)} = X_i^{(n)} + 1$ qui sont géométriques de paramètre $\frac{1}{2}$, et indépendantes. On obtient bien la relation demandée.

9. Pour $t \in [-1, 1]$, on a

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} pq^k t^k = \frac{p}{1 - qt} .$$

10. On a $Z_0 = 1$ (variable constante), donc $G_{Z_0}(t) = t$ soit $G_{Z_0} = \text{id}_{[-1,1]}$ (si on se limite à l'intervalle $[-1, 1]$ ce qui est raisonnable). Ensuite on reconnaît la situation de la **partie B**, on a donc pour tout n , la relation $G_{Z_{n+1}} = G_{Z_n} \circ G_X$, ce qui donne par une récurrence immédiate $G_{Z_n} = G_X^{\circ n}$.

11. Comme $Z_0 = 1$, on a $E(Z_0) = 1$.

Si, pour un n donné, on suppose que Z_n est d'espérance finie, alors comme les $X_i^{(n)}$ sont d'espérance finie, on déduit de la question 6. que Z_{n+1} est aussi d'espérance finie, avec $E(Z_{n+1}) = E(Z_n) \cdot E(X)$. Donc $(E(Z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique, et $E(Z_n) = E(X)^n$ pour tout n .

Enfin, comme $Y = X + 1 \sim \mathcal{G}(p)$, $E(X + 1) = E(X) + 1 = \frac{1}{p}$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad E(Z_n) = \left(\frac{1}{p} - 1\right)^n = \left(\frac{q}{p}\right)^n.$$

Le nombre d'individus contaminés croît donc (en moyenne) de façon exponentielle si et seulement si $\frac{1-p}{p} > 1$, c'est-à-dire si et seulement si $p < \frac{1}{2}$ et, dans ce cas, $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Z_n) = +\infty$.

Si $p = \frac{1}{2}$, on a $E(Z_n) = 1$ pour tout n . Si $\frac{1}{2} < p < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Z_n) = 0$.

12. C'est évident puisque la fonction G_V est croissante sur $[0, 1]$ (somme de série entière avec des coefficients positifs) avec $G_V(0) = P(V = 0) \in [0, 1]$ et $G_V(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(V = n) = 1$.

13. De la question précédente, il résulte que r_n est bien défini pour tout n avec $r_n \in [0, 1]$.

De plus, la croissance de la fonction G_X sur $[0, 1]$ entraîne la monotonie de la suite (r_n) , c'est un résultat classique sur les suites récurrentes. Cette suite, qui est monotone bornée, est donc convergente, et sa limite r appartient à $[0, 1]$ qui est un intervalle fermé.

Comme G_X est continue sur $[0, 1]$, en passant à la limite dans la relation $r_{n+1} = G_X(r_n)$, on obtient $r = G_X(r)$, autrement dit r est un point fixe de G_X .

On recherche donc les points fixes de G_X :

$$G_X(t) = t \iff \frac{p}{1 - (1-p)t} = t \iff (1-p)t^2 - t + p = 0 \quad (\mathbf{E}).$$

On peut remarquer que le nombre 1 est toujours solution de **(E)** (et tout le monde savait déjà que $G_X(1) = 1$!), on factorise donc facilement par $t - 1$ le premier membre de **(E)**, on obtient

$$G_X(t) = t \iff (t - 1) ((1-p)t - p) = 0 \iff t = 1 \text{ ou } t = \frac{p}{1-p}.$$

Discutons:

- si $p = \frac{1}{2}$, alors le seul point fixe de G_X est 1, qui est racine double de **(E)**, donc $r = 1$;
- si $p > \frac{1}{2}$, alors G_X admet deux points fixes, qui sont 1 et $\frac{p}{1-p}$, mais ce deuxième point fixe est strictement supérieur à 1 et ne peut donc être la limite de la suite (r_n) , on a donc encore $r = 1$;

- si $p < \frac{1}{2}$, alors G_X admet toujours deux points fixes, qui sont 1 et $\alpha = \frac{p}{1-p}$, mais cette fois-ci ce deuxième point fixe α est strictement inférieur à 1. La croissance de la fonction G_X , avec $G_X(0) = 0$ et $G_X(\alpha) = \alpha$, entraîne que le segment $S = [0, \alpha]$ est stable par G_X . Comme $r_0 = 0$, tous les termes de la suite (r_n) , ainsi que sa limite r , appartiennent alors à ce segment S , donc $r = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \alpha = \frac{p}{1-p}$.

14. Pour tout n , on a $r_n = (G_X^{\circ n})(r_0) = (G_X^{\circ n})(0) = G_{Z_n}(0) = P(Z_n = 0)$. Ainsi, pour tout n entier, r_n est la probabilité que l'épidémie soit terminée le jour n .

D'autre part, $(\{Z_n = 0\})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements. Donc, par le théorème de continuité croissante, on a

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{Z_n = 0\}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n = 0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = r.$$

De la question précédente, il résulte que:

- si $p < \frac{1}{2}$, la probabilité que l'épidémie se termine est $\frac{p}{1-p} \in]0, 1[$;
- si $p \geq \frac{1}{2}$, cette probabilité vaut 1, il est alors presque sûr que l'épidémie se termine.

Partie D. Calcul effectif des fonctions génératrices.

15. Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a alors

$$f_A : x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d} \quad \text{et} \quad f_B : x \mapsto \frac{px + q}{rx + s}.$$

Puis

$$(f_A \circ f_B)(x) = \frac{a \frac{px + q}{rx + s} + b}{c \frac{px + q}{rx + s} + d} = \frac{(ap + br)x + (aq + bs)}{(cp + dr)x + (cq + ds)} = f_C(x),$$

avec $C = \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix} = AB$. Donc $f_A \circ f_B = f_{AB}$.

Notons que ce n'est pas la seule réponse possible: toute matrice de la forme $C = \lambda AB$, avec λ réel non nul, conviendrait aussi.

16. Posons $q = 1 - p$. Sur chaque ligne de la matrice A , la somme des coefficients vaut p , donc $p \in \text{Sp}(A)$ et un vecteur propre associé est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. L'autre valeur propre est alors

$\text{tr}(A) - p = 1 - p = q$, et on trouve $\begin{pmatrix} p \\ 1 - p \end{pmatrix}$ comme vecteur propre associé. Donc A est diagonalisable, par exemple car elle a deux valeurs propres distinctes, et on a $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 1 & 1 - p \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 - p \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{1 - 2p} \begin{pmatrix} 1 - p & -p \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. On déduit

$$A^n = P D^n P^{-1} = \frac{1}{1 - 2p} \begin{pmatrix} 1 & p \\ 1 & 1 - p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & (1 - p)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - p & -p \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le calcul, laissé à qui vous savez, donne

$$A^n = \frac{1}{1-2p} \begin{pmatrix} p^n q - p q^n & p(q^n - p^n) \\ q(p^n - q^n) & q^{n+1} - p^{n+1} \end{pmatrix}.$$

17. On sait par la question **10.** que $G_{Z_n} = G_X^{\circ n} = G_X \circ \dots \circ G_X$ avec n facteurs.

Avec les notations de la question **15.**, on a $G_{Z_0}(t) = t = \frac{1t+0}{0t+1} = f_{I_2}(t)$ et

$$\forall t \in [-1, 1] \quad G_X(t) = \frac{p}{1 - (1-p)t} = f_A(t), \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & p \\ p-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De la question **15.**, on déduit par une récurrence immédiate que $G_{Z_n}(t) = f_{A^n}(t)$, soit

$$\forall t \in [-1, 1] \quad G_{Z_n}(t) = \frac{(p^n q - p q^n) t + p(q^n - p^n)}{q(p^n - q^n) t + q^{n+1} - p^{n+1}}.$$

18. On calcule $\chi_B = (X - 1)^2$, donc $\text{Sp}(B) = \{1\}$. Comme $B \neq I_2$, cette matrice n'est pas diagonalisable. Mais χ_B est scindé sur $\mathbb{R}$, donc B est trigonalisable. Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à B , on a donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = B$ où $\mathcal{B}_0$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On cherche une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = T$, i.e. telle que $u(e_1) = e_1$ et $u(e_2) = e_1 + e_2$. Pour cela, on prend pour e_1 un vecteur propre de u associé à la valeur propre 1, par exemple $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et on cherche $e_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $(u - \text{id})(e_2) = e_1$, on constate que $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient. On a donc $B = PTP^{-1}$ avec $P = P_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Un calcul classique, par exemple en écrivant $T = I_2 + E_{1,2}$ et en appliquant la formule du binôme, donne $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule enfin

$$B^n = PT^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1-n & n \\ -n & n+1 \end{pmatrix}.$$

19. Lorsque $p = \frac{1}{2}$, la matrice A de la question **16.** vaut $\frac{1}{2}B$, donc $f_A = f_B$. On a donc

$$\forall t \in [-1, 1] \quad G_{Z_n}(t) = (G_X^{\circ n})(t) = (f_A^{\circ n})(t) = (f_B^{\circ n})(t) = f_{B^n}(t) = \frac{(n-1)t - n}{nt - (n+1)}.$$

On prend son courage à deux mains et on développe cela en série entière (*je dois reconnaître que ces calculs sont assez pénibles*), par exemple en écrivant

$$G_{Z_n}(t) = \frac{n - (n-1)t}{(n+1)} \left(1 - \frac{nt}{n+1}\right)^{-1} = \frac{n - (n-1)t}{(n+1)} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{nt}{n+1}\right)^k,$$

il y a un peu de travail pour réorganiser tout ça, on obtient finalement

$$G_{Z_n}(t) = \frac{n}{n+1} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^{k-1}}{(n+1)^{k+1}} t^k.$$

La loi de Z_n est donc donnée par

$$P(Z_n = 0) = \frac{n}{n+1} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(Z_n = k) = \frac{n^{k-1}}{(n+1)^{k+1}}.$$

On observe que $P(Z_n = 0)$ tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini, on retrouve donc qu'il est presque sûr que l'épidémie se termine lorsque $p = \frac{1}{2}$, cf. question 14.

EXERCICE 1

A. Matrices de rang 1.

1. Les colonnes $C_1, \dots, C_n$ de la matrice A sont toutes colinéaires, soit j_0 un indice pour lequel $C_{j_0} \neq 0$, alors pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe un scalaire λ_j tel que $C_j = \lambda_j C_{j_0}$. En posant $L = (\lambda_1 \dots \lambda_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, on a alors $A = C_{j_0} L$, soit encore $A = X Y^\top$, où $X = C_{j_0}$ et $Y = L^\top$ sont des matrices-colonnes.

2. Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, alors $A = XY^\top = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = x_i y_j$ pour tout couple (i, j) . On constate que, pour tout j , la j -ième colonne de A est $y_j X$. Toutes les colonnes de la matrice A sont colinéaires au vecteur X , donc $\text{rg}(A) \leq 1$. Enfin, les vecteurs-colonnes X et Y étant supposés non nuls, il existe $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $x_{i_0} \neq 0$ et il existe $j_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $y_{j_0} \neq 0$, alors $a_{i_0, j_0} = x_{i_0} y_{j_0} \neq 0$, donc A n'est pas la matrice nulle, donc $\text{rg}(A) = 1$.

3. En écrivant $A = XY^\top$ (cf. Q1.), on observe que $Y^\top X = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \text{tr}(A)$ est un scalaire, donc

$$A^2 = (XY^\top)(XY^\top) = X(Y^\top X)Y^\top = \text{tr}(A) \cdot XY^\top = \text{tr}(A) \cdot A.$$

4. Une récurrence immédiate donne $A^k = (\text{tr}(A))^{k-1} A$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

5. De Q3., il résulte immédiatement que, si $\text{tr}(A) = 0$, alors $A^2 = 0_n$, donc A est nilpotente (d'indice 2).

En revanche, si $\text{tr}(A) \neq 0$, la relation $A^k = (\text{tr}(A))^{k-1} A$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ montre que $A^k \neq 0_n$ pour tout k , donc A n'est pas nilpotente.

6. Si $\text{tr}(A) = 0$, alors A est nilpotente donc $\text{Sp}(A) = \{0\}$ (c'est classique!) mais A n'est pas la matrice nulle, donc A n'est pas diagonalisable.

En revanche, si $\text{tr}(A) \neq 0$, le polynôme $P = X(X - \text{tr}(A))$ est scindé à racines simples et il annule A d'après Q3., donc A est diagonalisable.

Bilan de Q5. et Q6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

A est nilpotente **si et seulement si** $\text{tr}(A) = 0$.

A est diagonalisable **si et seulement si** $\text{tr}(A) \neq 0$.

B. Matrices de Householder.

7. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, comme $V^\top X = (V|X)$ est un réel, on a alors

$$P_V X = \frac{1}{\|V\|^2} V V^\top X = \frac{1}{\|V\|^2} (V|X) V = (\Omega|X) \Omega$$

en posant $\Omega = \frac{V}{\|V\|}$, vecteur unitaire associé à V et donc dirigeant la droite D . On reconnaît l'expression du projeté orthogonal du vecteur X sur cette droite.

8. On vérifie d'abord que $P_V^\top = P_V$ (remarque: le cours dit aussi qu'un projecteur orthogonal est autoadjoint, donc représenté canoniquement par une matrice symétrique, ce que l'on retrouve ici) donc $Q_V^\top = Q_V$, la matrice Q_V est donc symétrique. Enfin,

$$Q_V^\top Q_V = Q_V^2 = (I_n - 2P_V)^2 = I_n - 4P_V + 4P_V^2 = I_n$$

puisque $P_V^2 = P_V$ (par le calcul, ou bien car c'est un projecteur), donc la matrice Q_V est orthogonale. Comme $Q_V X = X - 2(\Omega|X)\Omega$, avec les notations introduites en **Q7.**, la lectrice ou le lecteur aura reconnu la réflexion d'hyperplan $H = D^\perp$.

C. Factorisation QR.

9. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, par l'identité remarquable $(a-b|a+b) = \|a\|^2 - \|b\|^2$, on a les équivalences

$$\begin{aligned} \|X - U\| = \|X - V\| &\iff \|X - U\|^2 - \|X - V\|^2 = 0 \\ &\iff ((X - U) - (X - V) \mid (X - U) + (X - V)) = 0 \\ &\iff (V - U \mid 2X) = 0 \iff X \in D^\perp. \end{aligned}$$

10. Le plus rapide est de remarquer que $U = \frac{1}{2}(U - V) + \frac{1}{2}(U + V)$ et de noter que $U + V \in D^\perp$ puisque $(U - V \mid U + V) = \|U\|^2 - \|V\|^2 = 0$. On a donc

$$p_D(U) = \frac{1}{2}(U - V) \quad \text{et} \quad p_{D^\perp}(U) = \frac{1}{2}(U + V).$$

11. On a $Q_{U-V}U = (I_n - 2P_{U-V})U = U - 2p_D(U) = U - (U - V) = V$.

12. Si X et Y sont colinéaires, la matrice $Q = I_n$ convient.

Sinon, les vecteurs $U = \frac{X}{\|X\|}$ et $V = \frac{Y}{\|Y\|}$ sont tous deux unitaires et la question 11. montre que $Q_{U-V}U = V$. En posant $Q = Q_{U-V}$ pour simplifier, on a donc une matrice orthogonale Q telle que $QU = V$, soit $QX = \frac{\|X\|}{\|Y\|}V$.

13. Soit X la première colonne de la matrice A . D'après **Q12.**, il existe une matrice orthogonale $Q_1 \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $Q_1 X = \alpha E_1$, avec α réel et E_1 premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme la première colonne de $Q_1 A$ est $Q_1 X$, cela répond à la question.

14. L'initialisation pour $n = 1$ est triviale.

Soit $n \geq 2$, supposons la proposition vraie au rang $n - 1$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe alors $Q_1 \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $Q_1 A$ soit de la forme indiquée en **Q13.** Puis, par hypothèse de récurrence, il existe $Q'_2 \in O_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que $Q'_2 C_1 = T \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ soit triangulaire supérieure. En posant $Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & Q'_2 \end{pmatrix}$, on a $Q_2 \in O_n(\mathbb{R})$ donc $Q_2 Q_1 \in O_n(\mathbb{R})$ et

$$(Q_2 Q_1)A = Q_2(Q_1 A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & *** \\ 0 & C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & *** \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

est triangulaire supérieure, ce qui achève la récurrence.

EXERCICE 2

1. Par hypothèse, on a $X^\top BX > 0$ pour tout vecteur X non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$.

Si $Y = (y_1 \ \cdots \ y_{n-1})^\top \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ est non nul, alors $X = (y_1 \ \cdots \ y_{n-1} \ 0)^\top$ est un vecteur non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc $X^\top BX > 0$. Mais on vérifie par un produit par blocs que $X^\top BX = Y^\top AY$. On a ainsi montré que A est définie positive.

De plus, B est diagonalisable et ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (non nécessairement distinctes) sont strictement positives, donc $\det(B) = \prod_{k=1}^n \lambda_k > 0$.

2.a. Comme $A \in \mathcal{S}_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$, c'est le théorème spectral et les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ sont strictement positives d'après le cours.

b. Posons $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) = P^\top AP$. Posons aussi $Q = \begin{pmatrix} P & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & 1 \end{pmatrix}$, que nous écrirons $Q = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour simplifier. Alors $Q^{-1} = Q^\top = \begin{pmatrix} P^\top & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $Q \in \text{O}_n(\mathbb{R})$, et

$$Q^\top BQ = \begin{pmatrix} P^\top & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & V \\ V^\top & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^\top AP & P^\top V \\ V^\top P & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & U \\ U^\top & \alpha \end{pmatrix},$$

en posant $U = P^\top V \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$. Si l'on note $u_1, \dots, u_{n-1}$ les coefficients de cette matrice-colonne U , on obtient bien $Q^\top BQ = B'$, soit $B = QB'Q^\top$ comme l'énoncé le demande.

c. On peut procéder par récurrence sur n .

$$\text{Pour } n = 2, \det(B'_{(2)}) = \begin{vmatrix} \lambda_1 & u_1 \\ u_1 & \alpha \end{vmatrix} = \lambda_1 \alpha - u_1^2 = \lambda_1 \left(\alpha - \frac{u_1^2}{\lambda_1} \right).$$

$$\text{Pour } n = 3, \det(B'_{(3)}) = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & u_1 \\ 0 & \lambda_2 & u_2 \\ u_1 & u_2 & \alpha \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \alpha - \lambda_2 u_1^2 - \lambda_1 u_2^2 = \lambda_1 \lambda_2 \left(\alpha - \frac{u_1^2}{\lambda_1} - \frac{u_2^2}{\lambda_2} \right).$$

$$\text{Soit } n \geq 3, \text{ supposons qu'au rang } n-1, \text{ on obtienne } \det(B'_{(n-1)}) = \left(\prod_{i=1}^{n-2} \lambda_i \right) \left(\alpha - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{u_i^2}{\lambda_i} \right).$$

$$\text{Calculons alors le déterminant } \begin{vmatrix} \lambda_1 & & (0) & u_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ (0) & & \lambda_{n-1} & u_{n-1} \\ u_1 & \cdots & u_{n-1} & \alpha \end{vmatrix}_{(n)} \quad \text{en développant par rapport à}$$

la première colonne: le cofacteur du coefficient λ_1 est donné par l'hypothèse de récurrence (en décalant les indices), le cofacteur du coefficient u_1 sera lui-même développé par rapport à la première colonne (ce qui ramène à une matrice diagonale). On obtient

$$\begin{aligned} \det(B'_{(n)}) &= \lambda_1 \left(\left(\prod_{i=2}^{n-1} \lambda_i \right) \left(\alpha - \sum_{i=2}^{n-1} \frac{u_i^2}{\lambda_i} \right) \right) + (-1)^{n+1} (-1)^{1+(n-1)} u_1^2 \left(\prod_{i=2}^{n-1} \lambda_i \right) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i \right) \left(\alpha - \sum_{i=2}^{n-1} \frac{u_i^2}{\lambda_i} - \frac{u_1^2}{\lambda_1} \right) = \left(\prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i \right) \left(\alpha - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{u_i^2}{\lambda_i} \right), \end{aligned}$$

la formule est donc héréditaire.

De la relation $B = QB'Q^\top$ avec Q orthogonale, on déduit que $\det(B') = \det(B) > 0$, d'où

$$\alpha - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{u_i^2}{\lambda_i} > 0 \text{ puisque les } \lambda_i \text{ sont strictement positifs.}$$

d. On a $X^\top BX = X^\top QB'Q^\top X = Y^\top B'Y$. Si on pose $B' = (b'_{i,j})$, on obtient alors

$$\begin{aligned} X^\top BX &= \sum_{i,j} b'_{i,j} y_i y_j = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i y_i^2 + \alpha y_n^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} u_i y_i y_n \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \left(y_i^2 + 2 \frac{u_i y_n}{\lambda_i} y_i \right) + \alpha y_n^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \left(\left(y_i + \frac{u_i y_n}{\lambda_i} \right)^2 - \frac{u_i^2 y_n^2}{\lambda_i^2} \right) + \alpha y_n^2 \quad (\text{forme canonique d'un trinôme}) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \left(y_i + \frac{u_i}{\lambda_i} y_n \right)^2 + \left(\alpha - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{u_i^2}{\lambda_i} \right) y_n^2. \end{aligned}$$

e. De la positivité des λ_i et de la question 2.c., il résulte que $X^\top BX \geq 0$ pour tout X puisque c'est une somme de termes positifs.

De plus, si $X^\top BX$ est nul, alors chaque terme de cette somme est nul, la question 2.c. et la **stricte** positivité des λ_i entraînent alors que $y_n = 0$ et $y_i + \frac{u_i}{\lambda_i} y_n = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, donc tous les y_i , $1 \leq i \leq n$, sont nuls, donc $Y = 0$ et enfin $X = QY = 0$, donc la matrice symétrique B est définie positive.

3. En utilisant l'équivalence prouvée dans les questions 1. et 2., on a les équivalences

$$\begin{aligned} M = M_n \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) &\iff \begin{cases} M_{n-1} \in \mathcal{S}_{n-1}^{++}(\mathbb{R}) \\ \det(M_n) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} M_{n-2} \in \mathcal{S}_{n-2}^{++}(\mathbb{R}) \\ \det(M_{n-1}) > 0 \\ \det(M_n) > 0 \end{cases} \\ &\iff \dots \iff \begin{cases} M_1 \in \mathcal{S}_1^{++}(\mathbb{R}) \\ \det(M_2) > 0 \\ \dots \\ \det(M_n) > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Or, $M_1 \in \mathcal{S}_1^{++}(\mathbb{R}) \iff M_1 > 0$ (c'est un réel) $\iff \det(M_1) > 0$. On a donc l'équivalence souhaitée. Ce résultat est connu sous le nom de **critère de Sylvester**.

4. En notant $S_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ la matrice extraite de S en ne conservant que les k premières lignes et les k premières colonnes, on a $\det(S_k) = 1$ pour tout k (les opérations élémentaires $C_j \leftarrow C_j - C_{j-1}$, avec $2 \leq j \leq k$, transforment S_k en une matrice triangulaire inférieure dont les coefficients diagonaux valent tous 1), la matrice symétrique S_k vérifie donc le "**critère de Sylvester**" de la question 3., elle est donc définie positive.