

Calcul différentiel

Le programme précédent (fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, différentielle, gradient, règle de la chaîne), plus:

Dérivées partielles secondes, fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. Théorème de Schwarz.

Exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles d'ordre un ou deux, une indication de changement de variables étant fournie.

Matrice hessienne en un point d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, développement limité d'ordre deux

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + (\nabla f(a) \mid h) + \frac{1}{2} h^\top \cdot H_f(a) \cdot h + o(\|h\|^2) .$$

Notion d'extremum global, d'extremum local. Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (avec U ouvert), si f admet un extremum local en un point a de U , alors a est un point critique de f , i.e. $df(a) = 0$, i.e. $\nabla f(a) = 0$. Réciproque fausse. Recherche d'extremum global en utilisant le théorème des bornes atteintes sur un fermé borné de $\mathbb{R}^n$.

Conditions d'ordre deux utilisant la matrice hessienne, en un point critique de $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^n$:

- si $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors il y a un minimum local strict ;
- si $H_f(a) \notin \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors il n'y a pas de minimum local.

Espaces euclidiens orientés

Orientation d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, automorphismes directs ou indirects.

Produit mixte de n vecteurs dans un espace euclidien orienté de dimension n . Propriétés.

Produit vectoriel dans un espace euclidien orienté de dimension trois. Propriétés, notamment formule du double produit vectoriel et identité de Lagrange. Application à l'obtention de bases orthonormales directes.

Explicitation des groupes $O_2(\mathbb{R})$ et $SO_2(\mathbb{R})$, commutativité de $SO_2(\mathbb{R})$. Définition de la rotation d'angle θ dans un plan euclidien orienté. Les isométries indirectes du plan sont les réflexions.

Démonstrations de cours ou proches du cours

- Caractérisation des fonctions constantes parmi les fonctions $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert convexe.
- Dérivées partielles de $(r, \theta) \mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Expression du gradient en coordonnées polaires.
- Si $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ avec a point critique de f de classe $\mathcal{C}^2$ sur U , alors il y a un minimum en a .
- Identité de Lagrange $\|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - (u|v)^2$ dans E euclidien orienté de dimension 3.