

## Calcul de dérivées partielles

1. On pose  $f(x, y) = \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$ , et  $f(0, 0) = 0$ . Montrer que l'application  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

-----

L'application  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'ouvert  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  par opérations sur des fonctions  $\mathcal{C}^1$ . Pour  $(x, y) \in U$ , on calcule

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^2 y^2 (x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2x^5 y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Par ailleurs, les applications partielles à l'origine, i.e. les applications  $x \mapsto f(x, 0)$  et  $y \mapsto f(0, y)$  sont nulles, donc sont dérivables en 0 avec une dérivée nulle, cela prouve l'existence de dérivées partielles premières de  $f$  à l'origine, avec  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

L'application  $f$  admet donc en tout point de  $\mathbb{R}^2$  des dérivées partielles d'ordre un, il reste à montrer que les applications  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sont continues sur  $\mathbb{R}^2$ . Elles sont toutes deux continues sur  $U$  comme produits et quotients de fonctions continues, il reste donc à examiner la continuité en  $(0, 0)$ .

En utilisant les inégalités  $0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2$ ,  $0 \leq y^2 \leq x^2 + y^2$  et  $|2xy| \leq x^2 + y^2$ , on obtient facilement

$$0 \leq \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \leq \frac{3(x^2 + y^2)^3}{(x^2 + y^2)^2} = 3(x^2 + y^2) \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| = \frac{|2xy|(x^2)^2}{(x^2 + y^2)^2} \leq x^2 + y^2$$

et, comme il est clair que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) = 0$ , on déduit par encadrement que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \quad \text{et} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

La fonction  $f$  est donc de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

2. Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Montrer l'équivalence entre les assertions:

- (1) :  $\forall t \in \mathbb{R} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + t, y + t) = f(x, y)$  ;  
 (2) :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ .

-----

Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  fixé, l'application  $g_{x,y} : t \mapsto f(x + t, y + t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et a pour dérivée  $g'_{x,y}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x + t, y + t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x + t, y + t)$ .

- Si on a (1), alors pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $g_{x,y}$  est constante sur  $\mathbb{R}$  donc  $g'_{x,y}(0) = 0$ , ce qui donne (2).
- Si on a (2), alors pour tout couple  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , l'application dérivable  $g_{x,y}$  a une dérivée nulle sur  $\mathbb{R}$ , donc elle est constante et, pour tout  $t$ ,  $g_{x,y}(t) = g_{x,y}(0)$ , ce qui donne (1).

## 3. Expression du laplacien en coordonnées polaires.

Soit  $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ , soit  $g : (r, \theta) \mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ . Montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  et exprimer  $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  à l'aide des dérivées partielles de  $g$ .

-----

On a  $g = f \circ X$ , avec  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  défini par  $X(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ . Comme  $f$  et  $X$  sont de classe  $\mathcal{C}^2$ , alors  $g = f \circ X$  l'est aussi. Passons au calcul, un peu fastidieux... Par la règle de la chaîne généralisée,

$$(1) : \frac{\partial g}{\partial r} = \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{et} \quad (2) : \frac{\partial g}{\partial \theta} = -r \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial y} .$$

Notons que la relation (1) peut s'écrire aussi  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = r \frac{\partial f}{\partial r}$ , cela sera utile pour la suite. On redérive (1) par rapport à  $r$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} &= \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= \cos(\theta) \left[ \cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right] + \sin(\theta) \left[ \cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right] \\ &= \cos^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \cos(\theta) \sin(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} . \end{aligned}$$

On redérive (2) par rapport à  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} &= -r \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x} - r \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y} - r \sin(\theta) \left[ -r \sin(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r \cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right] \\ &\quad + r \cos(\theta) \left[ -r \sin(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + r \cos(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right] \\ &= -r \cos(\theta) \frac{\partial f}{\partial x} - r \sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial y} + r^2 \sin^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + r^2 \cos^2(\theta) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} . \end{aligned}$$

On observe enfin que  $r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = r^2 \Delta f - \left( x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right)$ , donc pour  $r \neq 0$ , i.e.  $(x, y) \neq (0, 0)$ , on conclut que

$$\Delta f = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} .$$

4. Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$ , et  $f(0, 0) = 0$ .

a. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

b. Est-elle de classe  $\mathcal{C}^2$  ?

-----

a. • La fonction  $f$  est évidemment de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur l'ouvert  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  comme produit et quotient de fonctions  $\mathcal{C}^\infty$  ne s'annulant pas (c'est une fonction rationnelle). Le seul problème est donc en  $(0, 0)$ .

• Le passage en polaires permet d'étudier la continuité: en posant  $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ , on a

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r^4 \cos \theta \sin \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{r^2} = \frac{r^2}{4} \sin 4\theta . \quad (*)$$

La fonction  $\theta \mapsto \sin 4\theta$  étant bornée sur  $\mathbb{R}$ , il est clair que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ , donc  $f$  est continue au point  $(0,0)$ . En effet, faire tendre  $(x,y)$  vers  $(0,0)$  revient, en coordonnées polaires, à faire tendre  $r$  vers 0 indépendamment de  $\theta$ . Une explication plus rigoureuse est aussi que, puisque  $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x,y)\|_2$ , la relation (\*) montre que

$$|f(x,y)| = |f(x,y) - f(0,0)| \leq \frac{1}{4} \|(x,y)\|_2^2,$$

d'où découle la continuité de  $f$  en  $(0,0)$  en disant par exemple que pour avoir  $|f(x,y) - f(0,0)| \leq \varepsilon$  avec  $\varepsilon > 0$  donné, il suffit que  $\|(x,y)\|_2 \leq \alpha$  en choisissant  $\alpha = 2\sqrt{\varepsilon}$  pour ceux qui aiment la définition de la continuité et de la limite avec des  $\varepsilon$  et des  $\alpha$ .

• Sur l'ouvert  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ , les dérivées partielles premières se calculent en appliquant les règles de dérivation d'un produit ou d'un quotient : on obtient

$$\forall (x,y) \in U \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(x^4 - y^4 - 4x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

L'existence de dérivées partielles en  $(0,0)$  ne peut se déduire ici que de l'étude des applications partielles  $x \mapsto f(x,0)$  et  $y \mapsto f(0,y)$ , mais les deux étant nulles, on a donc  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ .

• Les applications dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sont donc bien définies sur  $\mathbb{R}^2$ , elles sont continues sur l'ouvert  $U$  et leur continuité en  $(0,0)$  peut s'étudier encore en passant en coordonnées polaires :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r^5 \varphi(\theta)}{r^4} = r \varphi(\theta),$$

où la fonction  $\varphi$  (que je n'explique pas) est bornée sur  $\mathbb{R}$  (elle est continue et  $2\pi$ -périodique, c'est un polynôme trigonométrique). On a donc  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$  par le même raisonnement que ci-dessus. La fonction  $f$  est donc de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

- b. La dérivée partielle seconde  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ , si elle existe, est la dérivée en 0 de l'application partielle  $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ . Or,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$  pour tout  $x$ , donc  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$ . De même,  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$ , donc  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$ . Les dérivées partielles "croisées" prenant des valeurs différentes à l'origine, on déduit que  $f$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  (théorème de Schwarz).

## Équations aux dérivées partielles

5.a. En utilisant le changement de variables  $\{u = x + y, v = x - y\}$ , résoudre, sur  $\mathbb{R}^2$ , l'équation aux dérivées partielles

$$(E) \quad : \quad \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + 3(x - y) f = 0.$$

- b. Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . Montrer qu'il existe une unique solution de **(E)** vérifiant  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x, 0) = g(x)$  et l'expliciter.

-----

- a. On pose  $f(x, y) = F(u, v)$ , soit  $f = F \circ \varphi$ , avec  $\varphi : (x, y) \mapsto (u, v) = (x + y, x - y)$  qui est une bijection de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}^2$  sur lui-même. On applique la règle de la chaîne, qui nous donne

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}$$

et, de manière analogue,  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v}$ . On a ainsi

$$\begin{aligned} \text{(E)} \quad &\iff 2 \frac{\partial F}{\partial v} + 3v F(u, v) = 0 \iff \frac{\partial}{\partial v} \left( e^{\frac{3v^2}{4}} F(u, v) \right) = 0 \\ &\iff e^{\frac{3v^2}{4}} F(u, v) = h(u), \end{aligned}$$

où  $h$  est une fonction d'une variable, de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Continuons, cela donne donc  $F(u, v) = e^{-\frac{3v^2}{4}} h(u)$ , soit  $f(x, y) = e^{-\frac{3}{4}(x-y)^2} h(x+y)$ , où  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction arbitraire de classe  $\mathcal{C}^1$ .

- b. Il s'agit de montrer que le fait de connaître  $f$  sur l'axe  $Ox$  détermine complètement  $f$ , autrement dit détermine complètement la fonction arbitraire  $h$ . La condition imposée donne directement  $h(x) = g(x) e^{\frac{3x^2}{4}}$ , d'où le résultat. Explicitons toutefois jusqu'au bout :

$$f(x, y) = e^{-\frac{3}{4}(x-y)^2} e^{\frac{3}{4}(x+y)^2} g(x+y) = e^{3xy} g(x+y).$$

6. En passant en coordonnées polaires, déterminer les fonctions  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ , telles que

$$y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = f.$$

-----

On utilise les coordonnées polaires, i.e. on pose  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ . Lorsque les coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  décrivent le demi-plan ouvert  $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ , on peut considérer que les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  décrivent la demi-bande ouverte  $V = \mathbb{R}_+^* \times ]0, \pi[$ . On posera donc  $F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$  pour  $(r, \theta) \in V$ . Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ , alors  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $V$ . Un calcul classique par la règle de la chaîne donne

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = -r (\sin \theta) \frac{\partial f}{\partial x} + r (\cos \theta) \frac{\partial f}{\partial y} = -y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{et...}$$

... et cela suffit puisque nous retrouvons le premier membre de notre équation aux dérivées partielles qui s'écrit  $\frac{\partial F}{\partial \theta} + F(r, \theta) = 0$ , soit encore  $e^{-\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (e^\theta F(r, \theta)) = 0$ , et qui se résout en  $F(r, \theta) = C(r) e^{-\theta}$ , où  $C : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction arbitraire de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Pour revenir aux coordonnées cartésiennes, notons que, si  $\theta \in ]0, \pi[$ , alors  $\frac{\pi}{2} - \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  et

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{x}{y}, \quad \text{donc} \quad \frac{\pi}{2} - \theta = \text{Arctan}\left(\frac{x}{y}\right),$$

puis  $\theta = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{x}{y}\right)$ . Donc  $f(x, y) = C(\sqrt{x^2 + y^2}) e^{\text{Arctan}\frac{x}{y} - \frac{\pi}{2}}$ , ce que l'on peut écrire aussi  $f(x, y) = g(x^2 + y^2) e^{\text{Arctan}\frac{x}{y}}$ , où  $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction arbitraire de classe  $\mathcal{C}^1$ .

7. Résoudre, sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ , l'équation aux dérivées partielles

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

-----

On utilise les coordonnées polaires, i.e. on pose  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ . Lorsque les coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  décrivent le demi-plan ouvert  $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ , on peut considérer que les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  décrivent la demi-bande ouverte  $V = \mathbb{R}_+^* \times \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ . On posera donc  $F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$  pour  $(r, \theta) \in V$ . Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ , alors  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $V$ . Un calcul classique par la règle de la chaîne donne

$$\frac{\partial F}{\partial r} = (\cos \theta) \frac{\partial f}{\partial x} + (\sin \theta) \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{r} \left( x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \text{et...}$$

... et cela suffit puisque nous retrouvons le premier membre de notre équation aux dérivées partielles qui s'écrit  $\frac{\partial F}{\partial r} = 1$ , et qui se résout en  $F(r, \theta) = r + g(\theta)$ , où  $g : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction arbitraire de classe  $\mathcal{C}^1$ . En revenant aux coordonnées cartésiennes, on obtient l'expression  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + g\left(\text{Arctan}\frac{y}{x}\right)$ , ou  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + h\left(\frac{y}{x}\right)$ , où  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction arbitraire de classe  $\mathcal{C}^1$ .

8. Soit  $\alpha$  un réel. Une fonction  $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est dite **homogène de degré  $\alpha$**  si elle vérifie

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y).$$

a. Soit  $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Montrer que  $f$  est homogène de degré  $\alpha$  si et seulement si elle est solution de l'équation aux dérivées partielles **(E)**:  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$  sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$ .

On pourra considérer  $g : t \mapsto f(tx, ty)$ , avec  $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  fixé.

b. Soit  $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^2$ , homogène de degré  $\alpha$ . Montrer que l'on a

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \alpha(\alpha - 1) f.$$

-----

a. Fixons  $m = (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ , et considérons la fonction d'une variable  $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $g(t) = f(tx, ty)$ . On peut écrire  $g = f \circ \varphi$ , avec  $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow (\mathbb{R}_+^*)^2$ ,  $\varphi(t) = (tx, ty)$ . On a  $\varphi'(t) = (x, y)$  et  $g'(t) = df(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \left( \nabla f(\varphi(t)) \middle| \varphi'(t) \right) = x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty)$ .

• Si  $f$  est homogène de degré  $\alpha$ , alors on a aussi  $g(t) = t^\alpha g(1)$ , donc  $g'(t) = \alpha t^{\alpha-1} g(1)$ , donc

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) = \alpha t^{\alpha-1} f(x, y).$$

En évaluant cette égalité pour  $t = 1$ , on obtient la relation **(E)** demandée.

• Inversement, si  $f$  vérifie l'équation  $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y)$  sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$ , en appliquant cette relation au point  $(tx, ty)$ , on a

$$tx \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + ty \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) = \alpha f(tx, ty),$$

soit  $t g'(t) = \alpha g(t)$ . La fonction  $g$  est donc solution d'une équation différentielle ordinaire, qui se résout en  $g(t) = C t^\alpha$  avec, bien sûr,  $C = g(1) = f(x, y)$ , et on obtient bien la relation  $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$ .

b. Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et homogène de degré  $\alpha$  sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$ , on écrit l'équation **(E1)** obtenue en dérivant **(E)** par rapport à la variable  $x$ , puis l'équation **(E2)** obtenue en dérivant **(E)** par rapport à la variable  $y$ , puis on forme la combinaison linéaire  $x \times \mathbf{(E1)} + y \times \mathbf{(E2)}$ , on obtient alors

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (\alpha - 1) \left( x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

En appliquant de nouveau **(E)** au second membre, on conclut.

9. Trouver les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^2$ , telles que, en posant  $\varphi(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$ , on ait

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3}.$$

-----  
 Posons  $t = \frac{y}{x}$  pour simplifier. On calcule  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{x^2} f'\left(\frac{y}{x}\right)$ , et  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right)$ , puis

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2y}{x^3} f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^4} f''\left(\frac{y}{x}\right) \quad ; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x, y) = \frac{1}{x^2} f''\left(\frac{y}{x}\right),$$

d'où l'expression du laplacien

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2} \left[ 2 \frac{y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) + \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) f''\left(\frac{y}{x}\right) \right].$$

En multipliant par  $x^2$ , on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3} &\iff (1+t^2) f''(t) + 2t f'(t) = t \\
&\iff \frac{d}{dt} [(1+t^2) f'(t)] = t \\
&\iff (1+t^2) f'(t) = \frac{t^2}{2} + C \\
&\iff f'(t) = \frac{(t^2+1)-1}{2(1+t^2)} + \frac{C}{1+t^2} \\
&\iff f'(t) = \frac{1}{2} + \frac{K}{1+t^2} \\
&\iff f(t) = \frac{t}{2} + K \operatorname{Arctan}(t) + K' .
\end{aligned}$$

10. Résoudre, dans l'ouvert  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > |y|\}$ , l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} .$$

On pourra poser  $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$ .

L'ouvert  $U$  est un "quadrant" (ou "quart de plan") compris entre les deux bissectrices. Le changement de variables linéaire proposé, qui peut s'écrire aussi  $\left\{ x = \frac{u+v}{2} ; y = \frac{u-v}{2} \right\}$  le transforme en le quadrant  $V$  défini par  $u + v > |u - v|$ , inéquation qui équivaut en fait à  $\{u > 0, v > 0\}$ . Pour  $(x, y) \in U$ , posons

$$f(x, y) = F(u, v) = F(x + y, x - y) ,$$

ce qui revient à poser  $F(u, v) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$  pour tout  $(u, v) \in V$ . On applique la règle de la chaîne:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} .$$

De même,  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v}$ . Puis on s'attaque aux dérivées partielles d'ordre deux:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial x} \\
&= \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v} \right) \\
&= \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} .
\end{aligned}$$

Les fonctions recherchées étant implicitement de classe  $\mathcal{C}^2$ , on a en effet  $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u}$ .

Un calcul analogue donne  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$ . L'équation proposée se ramène alors à

$$4 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = \frac{1}{\sqrt{uv}}, \quad \text{soit} \quad \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial F}{\partial v} \right) = \frac{1}{4\sqrt{uv}}.$$

En intégrant par rapport à  $u$ , on obtient  $\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{u}{v}} + h(v)$ , où  $h : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction arbitraire de classe  $\mathcal{C}^1$ . En intégrant alors par rapport à  $v$ , on obtient

$$F(u, v) = \sqrt{uv} + K(u) + H(v),$$

où  $H$  et  $K$  sont deux fonctions arbitraires de  $\mathbb{R}_+^*$  vers  $\mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^2$ . Ainsi

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2} + K(x + y) + H(x - y).$$

11. En posant  $\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{x}{y} \end{cases}$ , résoudre sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$  l'équation aux dérivées partielles

$$(E) : \quad x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

**Avertissement:** Les détails de calcul seront omis afin de ne pas heurter les plus sensibles de nos lecteurs!

En posant  $f(x, y) = g(u, v)$  avec  $(u, v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  aussi, on calcule d'abord

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial g}{\partial v} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{1}{x} \frac{\partial g}{\partial v}.$$

Après quelques calculs, on obtient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2 \frac{y^2}{x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{y^2}{x^4} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{2y}{x^3} \frac{\partial g}{\partial v},$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} (E) &\iff -4y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + 2 \frac{y}{x} \frac{\partial g}{\partial v} = 0 \\ &\iff 2u \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} - \frac{\partial g}{\partial v} = 0 \\ &\iff \frac{\partial G}{\partial u}(u, v) - \frac{1}{2u} G(u, v) = 0 \end{aligned}$$



en posant  $G = \frac{\partial g}{\partial v}$ . Posons maintenant  $H(u, v) = \frac{G(u, v)}{\sqrt{u}}$ . On voit que l'équation **(E)** se ramène alors à  $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ , que l'on intègre en  $H(u, v) = F(v)$ , soit  $\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = G(u, v) = \sqrt{u} F(v)$ , où  $F : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction arbitraire de classe  $\mathcal{C}^1$ . On intègre de nouveau en  $g(u, v) = \sqrt{u} A(v) + B(u)$ , où  $A$  et  $B$  sont deux fonctions arbitraires de classe  $\mathcal{C}^2$  de  $\mathbb{R}_+^*$  vers  $\mathbb{R}$ . En revenant aux variables  $x$  et  $y$  initiales, on a donc

$$f(x, y) = \sqrt{xy} A\left(\frac{y}{x}\right) + B(xy).$$

**12.** Soient  $a, b, c$  trois réels tels que  $ac < 0$ . Déterminer toutes les fonctions  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^2$ , telles que

$$\textbf{(E)} : \quad a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

*Indication.* On pourra utiliser un changement de variables affine du type  $\begin{cases} u = \lambda x + y \\ v = \mu x + y \end{cases}$ , où  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux réels convenablement choisis.

-----

Posons  $f(x, y) = g(u, v)$ , la règle de la chaîne permet le calcul des dérivées partielles de  $f$  considérée comme fonction composée, à savoir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial u} + \mu \frac{\partial g}{\partial v}.$$

On passe au calcul d'une dérivée partielle seconde : en renommant  $F$  l'expression que l'on vient d'obtenir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \lambda \left( \lambda \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \mu \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} \right) + \mu \left( \lambda \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} + \mu \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \right) \\ &= \lambda^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\lambda\mu \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \mu^2 \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}, \end{aligned}$$

puisque,  $f$  étant supposée de classe  $\mathcal{C}^2$ , les dérivées partielles secondes croisées sont égales (théorème de Schwarz). Par des calculs analogues, on obtient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \lambda \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \mu \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}.$$

L'équation aux dérivées partielle **(E)** se transforme alors en

$$(\mathbf{E}') : \quad A \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2B \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + C \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A = a\lambda^2 + 2b\lambda + c \\ B = a\lambda\mu + b(\lambda + \mu) + c \\ C = a\mu^2 + 2b\mu + c \end{cases}.$$

Il est nécessaire d'avoir  $\lambda$  et  $\mu$  distincts pour que le changement de variables  $(x, y) \mapsto (u, v)$  soit bijectif. La condition  $ac < 0$  entraîne  $b^2 - ac > 0$ , autrement dit le trinôme  $aX^2 + 2bX + c$  admet deux racines réelles distinctes. Si l'on choisit pour  $\lambda$  et  $\mu$  ces deux racines, on annule ainsi les coefficients  $A$  et  $C$ , mais pas le coefficient  $B = \frac{2}{a}(ac - b^2)$ , donc

$$(\mathbf{E}') \iff \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0 \iff \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial g}{\partial v} \right) = 0 \iff \frac{\partial g}{\partial v} = \psi(v) \iff g(u, v) = \Psi(v) + \Phi(u),$$

où  $\Phi$  et  $\Psi$  sont deux fonctions arbitraires de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ . En revenant au couple de variables  $(x, y)$ , les solutions de  $(\mathbf{E})$  sont les fonctions de la forme

$$f(x, y) = \Phi(\lambda x + y) + \Psi(\mu x + y), \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{a},$$

$\Phi$  et  $\Psi$  étant deux fonctions arbitraires de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**NB :** On peut remplacer la condition  $ac < 0$  par la condition moins forte ( $b^2 - ac > 0$  et  $a \neq 0$ ), l'essentiel étant que le trinôme  $aX^2 + 2bX + c$  admette deux racines réelles distinctes.

- 13.** Trouver les fonctions  $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^2$ , telles que, en posant  $f(x, y, z) = \varphi(r)$  avec  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , la fonction  $f$  vérifie sur l'ouvert  $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + kf = 0,$$

où  $k$  est un réel donné.

-----

On recherche les fonctions propres de l'opérateur laplacien, qui sont à symétrie sphérique. Si  $f(x, y, z) = \varphi(r)$  avec  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , on obtient sur  $U$  les calculs de dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \varphi'(r) \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \varphi'(r) = x \times \frac{1}{r} \times \varphi'(r),$$

puis, en dérivant cette expression par rapport à  $x$  comme un produit de trois facteurs :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{r} \varphi'(r) - \frac{x^2}{r^3} \varphi'(r) + \frac{x^2}{r^2} \varphi''(r).$$

Les trois variables jouant le même rôle, on obtient des expressions analogues pour les autres dérivées partielles. On en déduit notamment l'expression du laplacien d'une fonction  $\mathcal{C}^2$  à symétrie sphérique :

$$\Delta f(x, y, z) = \left( \frac{3}{r} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^3} \right) \varphi'(r) + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} \varphi''(r) = \frac{2}{r} \varphi'(r) + \varphi''(r).$$

L'équation  $\Delta f + kf = 0$  se ramène à une équation différentielle ordinaire du second ordre :

$$r \varphi''(r) + 2 \varphi'(r) + k r \varphi(r) = 0,$$

laquelle n'est malheureusement pas à coefficients constants, mais le changement de fonction inconnue  $\psi(r) = r \varphi(r)$  nous ramène à l'équation  $\psi''(r) + k \psi(r) = 0$ , que l'on sait discuter et résoudre. Allons-y :

- si  $k = 0$ , alors  $\psi(r) = Ar + B$ , donc  $\varphi(r) = A + \frac{B}{r}$ .

- si  $k > 0$ , posons  $k = \omega^2$ , alors  $\psi(r) = A \cos(\omega r) + B \sin(\omega r)$ , donc

$$\varphi(r) = A \frac{\cos(\omega r)}{r} + B \frac{\sin(\omega r)}{r}.$$

- si  $k < 0$ , posons  $k = -\omega^2$ , alors  $\psi(r) = A \operatorname{ch}(\omega r) + B \operatorname{sh}(\omega r)$ , donc

$$\varphi(r) = A \frac{\operatorname{ch}(\omega r)}{r} + B \frac{\operatorname{sh}(\omega r)}{r}.$$

14. On pose  $S(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin t) dt$ .

a. Montrer que  $S$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

b. Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R} \quad x S''(x) + S'(x) + x S(x) = 0$ .

c. Soit  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Pour  $(x, y) \in U$ , on pose  $\varphi(x, y) = S(\sqrt{x^2 + y^2})$ . Montrer que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $U$  et que  $\Delta \varphi + \varphi = 0$ , où  $\Delta$  est le laplacien.

-----

a.. Posons  $f(x, t) = \cos(x \sin t)$  pour  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \pi]$ . Alors  $t \mapsto f(x, t)$  est continue sur le segment  $[0, \pi]$  donc intégrable sur ce segment (pour tout  $x$  réel), et  $x \mapsto f(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  (pour tout  $t$ ). Pour tout  $x$  réel, la fonction  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\sin(t) \sin(x \sin t)$  est continue sur le segment  $[0, \pi]$  donc intégrable sur ce segment. Enfin,

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \pi] \quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| = | -\sin^2(t) \cos(x \sin t) | \leq 1,$$

la fonction constante  $t \mapsto 1$  étant intégrable sur le segment  $[0, \pi]$ , ce qui fournit une domination valide pour affirmer que  $S$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  et pour autoriser à dériver deux fois terme à terme, ce qui donne

$$S'(x) = - \int_0^\pi \sin(t) \cdot \sin(x \sin t) dt \quad \text{et} \quad S''(x) = - \int_0^\pi \sin^2(t) \cdot \cos(x \sin t) dt.$$

b. On intègre par parties, par exemple en observant que

$$\begin{aligned} x (S''(x) + S(x)) &= \int_0^\pi x (1 - \sin^2 t) \cos(x \sin t) dt \\ &= \int_0^\pi \cos(t) \cdot (x \cos(t) \cos(x \sin t)) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [\cos(t) \cdot \sin(x \sin t)]_{t=0}^{t=\pi} + \int_0^\pi \sin(t) \cdot \sin(x \sin t) dt \\
&= -S'(x),
\end{aligned}$$

le crochet étant nul. C'est bien la relation voulue.

- c. L'application  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $U$  comme composée de fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$ . En posant  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , on a  $\varphi(x, y) = S(r)$  et on calcule

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{dS}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = S'(r) \frac{x}{r},$$

puis

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( x \cdot \frac{S'(r)}{r} \right) \\
&= \frac{S'(r)}{r} + x \cdot \frac{x}{r} \cdot \frac{r S''(r) - S'(r)}{r^2} \\
&= \left( \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) S'(r) + \frac{x^2}{r^2} S''(r),
\end{aligned}$$

et une expression analogue pour  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ . Donc

$$\begin{aligned}
\Delta \varphi + \varphi &= \left( \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) S'(r) + \frac{x^2}{r^2} S''(r) + \left( \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right) S'(r) + \frac{y^2}{r^2} S''(r) + S(r) \\
&= S''(r) + \frac{1}{r} S'(r) + S(r) \\
&= 0
\end{aligned}$$

d'après **b**.

## Recherche d'extremums

15. Déterminer les extremums locaux sur  $\mathbb{R}^2$  (ou  $\mathbb{R}^3$ ) de

$$f : (x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$$

$$g : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2xy - 2y + 5$$

$$h : (x, y) \mapsto x^3 + y^3$$

$$k : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$$

$$l : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$$

-----

- a. Le seul point critique de  $f$  est  $a = (0, 3)$ . La matrice hessienne de  $f$  en  $a$  est  $H_f(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ , d'ailleurs indépendante de  $a$ . On constate que  $\text{tr}(H_f(a)) = 4 > 0$  et  $\det(H_f(a)) = 3 > 0$ , donc la matrice  $H_f(a)$  est symétrique définie positive, et  $f$  présente un minimum local strict au point  $a$ , et c'est son seul extremum local.

**Remarque.** Dans cet exemple ( $f$  est une fonction polynomiale de degré 2), on peut aussi faire une translation des variables, i.e. placer la nouvelle origine au point critique, et alors constater que

$$f(h, 3+k) - f(0, 3) = h^2 + hk + k^2 = \left(h + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}k^2 \geq 0,$$

donc  $f$  admet un minimum global au point  $a$ .

- b. Les équations  $2x - 2y = 0$  et  $2y - 2x - 2 = 0$  étant incompatibles, la fonction  $g$  n'a pas de point critique, donc a fortiori pas d'extremum local dans  $\mathbb{R}^2$ .
- c. Le seul point critique de  $h$  est l'origine  $(0,0)$ . Comme  $h(x,0)$  est du signe de  $x$ ,  $h(x,y) = h(x,y) - h(0,0)$  n'est pas de signe constant dans un voisinage de l'origine, donc  $h$  ne possède pas d'extremum local.
- d. La recherche des points critiques de  $k$  s'écrit:

$$\nabla k(x, y) = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial k}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial k}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x = x^4 \end{cases}.$$

On obtient deux points critiques qui sont l'origine  $O = (0, 0)$ , et le point  $a = (1, 1)$ .

Comme  $k(x, 0) = x^3$  est du signe de  $x$ ,  $k(x, y) = k(x, y) - k(0, 0)$  n'est pas de signe constant dans un voisinage de l'origine, donc l'origine n'est pas un extremum local. On peut remarquer aussi que la matrice hessienne de  $k$  en ce point est  $H_k(O) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ , matrice symétrique qui n'est ni positive ni négative puisque ses valeurs propres sont 3 et -3, donc  $k$  n'a pas d'extremum local en ce point.

On calcule  $H_k(a) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ , donc  $\text{tr}(H_k(a)) = 12 > 0$ ,  $\det(H_k(a)) = 27 > 0$ , la matrice hessienne de  $k$  en  $a$  est donc définie positive, on en déduit que la fonction  $k$  présente au point  $a$  un minimum local strict. Ce n'est pas un minimum global car la fonction  $k$  n'est pas minorée sur  $\mathbb{R}^2$ , on a en effet  $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x, 0) = -\infty$ .

- e. Recherchons les points critiques de  $l$  :  $\frac{\partial l}{\partial x} = 2(x - yz)$ ,  $\frac{\partial l}{\partial y} = 2(y - zx)$  et  $\frac{\partial l}{\partial z} = 2(z - xy)$ , on

voit que  $M(x, y, z)$  est un point critique si et seulement si  $\begin{cases} x = yz \\ y = zx \\ z = xy \end{cases}$ . Ce système entraîne

$y = yz^2$ , soit  $y(1 - z)(1 + z) = 0$  donc :

- soit  $y = 0$ , alors  $x = z = 0$ , et  $O(0, 0, 0)$  est un point critique ;
- soit  $z = 1$ , alors  $x = y$  et  $z = x^2 = 1$ , d'où  $A(1, 1, 1)$  et  $B(-1, -1, 1)$  comme points critiques ;
- soit  $z = -1$ , alors  $x = -y$  et  $z = -x^2 = -1$ , d'où  $C(1, -1, -1)$  et  $D(-1, 1, -1)$  comme points critiques ;

On a obtenu finalement cinq points critiques. Notons que la fonction  $l$  possède quelques symétries évidentes, comme

$$l(-x, -y, z) = l(x, -y, -z) = l(-x, y, -z) = l(x, y, z),$$

l'étude locale des points critiques  $B$ ,  $C$  et  $D$  se déduira donc facilement de celle faite au point  $A$ .

• Étude locale au point  $O$  :

on a  $H_l(O) = 2I_3$ , matrice définie positive, cela montre que  $l$  présente un minimum local au point  $O$ .

• Étude locale au point  $A(1, 1, 1)$  : on calcule  $H_l(A) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = -2J + 4I_3$ ,

en notant  $J$  la matrice dont tous les coefficients valent 1. La matrice  $J$  ayant pour valeurs propres  $\lambda = 0$  (double) et  $\mu = 3$  (simple), on en déduit que les valeurs propres de  $H_l(A)$  sont  $-2\lambda + 4 = 4$  (double) et  $-2\mu + 4 = -2$  (simple), donc cette matrice symétrique n'est, ni positive, ni négative. Donc le point  $A$  n'est pas un extremum local de  $l$ . Par symétrie, il en est de même des points  $B$ ,  $C$  et  $D$ .

**16.** Rechercher les extremums locaux sur  $\mathbb{R}^2$  de  $f : (x, y) \mapsto x e^y + y e^x$ .

-----  
 Recherchons d'abord les éventuels points critiques. On a  $\frac{\partial f}{\partial x} = e^y + y e^x$  et  $\frac{\partial f}{\partial y} = e^x + x e^y$ .  
 Donc

$$\nabla f(x, y) = 0 \iff \begin{cases} y = -e^{y-x} \\ x = -e^{x-y} \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \\ x + e^{x-\frac{1}{x}} = 0 \end{cases}.$$

Pour  $x \in \mathbb{R}^*$ , posons  $\varphi(x) = x + e^{x-\frac{1}{x}}$ , on note que  $\varphi$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}_+^*$  (évident), et que  $\varphi'(x) = 1 + \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) e^{x-\frac{1}{x}}$  est strictement positive sur chacun des deux intervalles  $]-\infty, 0[$  et  $]0, +\infty[$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x) = +\infty$ , la fonction  $\varphi$  s'annule une fois et une seule sur  $\mathbb{R}_-^*$  et la racine "évidente" est  $-1$ .

**Bilan.** La fonction  $f$  admet pour unique point critique le point  $A(-1, -1)$ .

On va maintenant prouver que ce point n'est en fait pas un extremum local. Pour cela, étudions  $f$  sur deux droites passant par  $A$ , par exemple les parallèles aux deux bissectrices.

Sur la première bissectrice : posons  $g(t) = f(-1+t, -1+t) = \frac{2}{e}(t-1)e^t$ , une étude rapide montre que cette fonction admet un minimum local pour  $t = 0$  qui est bien sûr  $g(0) = f(A)$ .

Sur la parallèle à la deuxième bissectrice : posons  $h(t) = f(-1+t, -1-t) = -\frac{2}{e}(\text{ch } t + t \text{ sh } t)$ , une étude non moins rapide montre que cette fonction admet un maximum local pour  $t = 0$ .  
 Donc le point  $A$  est un "point-col" pour  $f$ , ce n'est pas un extremum local.

**Variante:** La matrice hessienne de  $f$  en un point  $(x, y)$  est  $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} ye^x & e^x + e^y \\ e^x + e^y & xe^y \end{pmatrix}$ .

En le point critique  $A$ , on évalue  $H_f(A) = e^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ . On constate que  $\det(H_f(A)) = -3e^{-2} < 0$ , ce qui signifie que la matrice hessienne a une valeur propre strictement positive et une autre strictement négative, donc  $f$  n'admet pas d'extremum au point  $A$ .

17. Extremums locaux et globaux de  $f : (x, y) \mapsto xy - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{x}$  sur  $D = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ .

-----  
 On recherche d'abord les points critiques de  $f$  sur le demi-plan ouvert  $D$  :

$$df(x, y) = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y - \frac{1}{x^2} = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3 = 1 \\ y = x \end{cases} \iff (x, y) = (1, 1).$$

Il y a donc un unique point critique dans  $D$ , à savoir  $A(1, 1)$ . Pour voir si c'est un extremum local, étudions les applications partielles en ce point, soit  $g : x \mapsto g(x) = f(x, 1)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et  $h : y \mapsto h(y) = f(1, y)$  sur  $\mathbb{R}$ .

On a  $g(x) = x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2}$ , donc  $g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ , la fonction  $g$  est donc décroissante sur  $]0, 1]$ , croissante sur  $[1, +\infty[$ , et elle admet au point 1 un minimum local.

On a  $h(y) = y - \frac{y^2}{2} + 1$  donc  $h'(y) = 1 - y$ , la fonction  $h$  est donc croissante sur  $] - \infty, 1]$ , décroissante sur  $[1, +\infty[$ , et elle admet au point 1 un maximum local.

On en déduit que le point  $A = (1, 1)$  n'est pas un extremum local de  $f$ , c'est un "point-col". Donc  $f$  n'admet aucun extremum local, ni *a fortiori* global sur le demi-plan ouvert  $D$ . On peut constater que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, 1) = +\infty$  et  $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(1, y) = -\infty$ , donc  $f$  n'est ni minorée ni majorée sur  $D$ .

**Variante:** Ici aussi, on peut conclure à l'aide de la matrice hessienne. En effet,  $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ . En particulier,  $H_f(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Comme  $\det(H_f(A)) = -3 < 0$ , la hessienne a deux valeurs propres de signes opposés (strictement), donc  $f$  n'a pas d'extremum local en le point  $A$ .

18. Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ .

a. Montrer que  $D$  est une partie fermée bornée du plan.

b. Soient  $a > 0, b > 0, c > 0$ . Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = x^a y^b (1 - x - y)^c$ . Montrer que  $f$  est continue sur  $D$ .

c. Déterminer  $\max_{(x,y) \in D} f(x,y)$ .

-----

- a. La partie  $D$  est définie par des inégalités au sens large, donc est fermée (intersection de trois images réciproques de fermés de  $\mathbb{R}$  par des applications continues). Elle est bornée car incluse dans le pavé  $[0, 1]^2$ .
- b. Les exposants  $a, b, c$  étant strictement positifs, l'application  $t \mapsto t^a = e^{a \ln t}$  (et idem avec  $b$  ou  $c$ ) est continue sur  $\mathbb{R}_+$ ... une fois prolongée par la valeur 0 en 0. Ainsi  $f$  est continue sur  $D$  comme produit et composée de fonctions continues.
- c. Comme  $f$  est continue sur la partie fermée bornée  $D$ , elle admet un maximum global sur  $D$ . Comme elle est nulle sur la frontière de  $D$  et strictement positive sur l'intérieur de  $D$ , ce maximum est atteint sur l'intérieur de  $D$ , qui est un ouvert. Le(s) point(s) en le(s)quel(s) ce maximum est atteint (il peut a priori être atteint en plusieurs points) est donc un point critique de  $f$ . Recherchons donc le(s) point(s) critique(s) de  $f$  sur  $\overset{\circ}{D}$ .

Le calcul, laissé au lecteur intrépide, donne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^{a-1} y^b (1-x-y)^{c-1} [a(1-x-y) - cx] .$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^a y^{b-1} (1-x-y)^{c-1} [b(1-x-y) - cy] .$$

Le système  $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 ; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \right\}$  admet pour seule solution dans  $\overset{\circ}{D}$  le couple  $(x,y) = \left( \frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c} \right)$ . Ce point, qui est le seul point critique de  $f$  dans  $\overset{\circ}{D}$ , est donc nécessairement le point en lequel le maximum global de  $f$  sur  $D$  est atteint. Ainsi,

$$\max_{(x,y) \in D} f(x,y) = f\left(\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}\right) = \frac{a^a b^b c^c}{(a+b+c)^{a+b+c}} .$$

19. Déterminer  $M = \max_{(x,y) \in K} (\sin x \sin y \sin(x+y))$ , avec  $K = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]^2$ .

-----

La fonction  $f : (x,y) \mapsto \sin x \sin y \sin(x+y)$  est continue sur la partie fermée bornée  $K$ , donc y admet un maximum.

Sur l'intérieur  $U = \left]0, \frac{\pi}{2}\right]^2$  de  $K$ , on calcule

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(y) \sin(2x+y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin(x) \sin(x+2y) .$$

Le seul point critique dans  $U$ , i.e. avec  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  et  $0 < y < \frac{\pi}{2}$ , est celui pour lequel

$$\begin{cases} 2x+y = \pi \\ x+2y = \pi \end{cases}, \text{ soit le point } a = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right). \text{ On calcule } f(a) = \frac{3\sqrt{3}}{8} .$$



Pour montrer que cette valeur est le maximum de  $f$  sur  $K$ , il suffit de vérifier que  $f(x, y) \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$  sur la frontière  $\text{Fr}(K) = K \setminus U$ . C'est clair pour  $f(x, 0) = 0$  lorsque  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , de même  $f(0, y) = 0$  lorsque  $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Puis, pour  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , on a

$$f\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x) \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x) \cos(x) = \frac{1}{2} \sin(2x) \leq \frac{1}{2} < \frac{3\sqrt{3}}{8},$$

et on a la même majoration pour  $f\left(\frac{\pi}{2}, y\right)$  avec  $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Finalement,  $M = \frac{3\sqrt{3}}{8}$ .

- 20.** Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ , soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que  $\forall m \in U \quad \Delta f(m) < 0$ , où  $\Delta$  représente l'opérateur laplacien. Montrer que  $f$  n'admet aucun minimum local dans  $U$ .

-----

Il suffit de constater que  $\Delta f(m) = \sum_{i=1}^p \partial_{i,i}^2 f(m) = \text{tr}(H_f(m))$ .

La matrice hessienne de  $f$  au point  $m$  est symétrique réelle, donc diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ . Si sa trace est strictement négative, elle admet au moins une valeur propre strictement négative, donc  $H_f(m) \notin \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$  et ceci pour tout  $m \in U$ , donc  $f$  n'admet pas de minimum local sur  $U$ .

- 21.** Soit  $U$  un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^n$ , soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une **fonction convexe**, i.e. telle que

$$\forall(x, y) \in U^2 \quad \forall \lambda \in [0, 1] \quad f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda) f(x) + \lambda f(y),$$

et de classe  $\mathcal{C}^1$ . Montrer que tout point critique de  $f$  est un minimum global.

-----

Soit  $x \in U$  un point critique de  $f$ , on a donc  $\nabla f(x) = 0$ . Fixons  $y \in U$ , l'objectif est de montrer que  $f(y) \geq f(x)$ .

Pour  $\lambda \in [0, 1]$ , posons  $g(\lambda) = (1 - \lambda) f(x) + \lambda f(y) - f((1 - \lambda)x + \lambda y)$ .

Alors  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$  comme composée avec

$$\forall \lambda \in [0, 1] \quad g'(\lambda) = f(y) - f(x) - \left( \nabla f((1 - \lambda)x + \lambda y) \mid y - x \right).$$

Comme  $g(0) = 0$  et  $g \geq 0$  sur  $[0, 1]$ , on a  $g'(0) \geq 0$ , soit  $f(y) - f(x) \geq 0$ , CQFD!

- 22\*.** Soit  $E$  un espace euclidien, soit  $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$ , soit  $u \in \mathbb{R}^n$  un vecteur fixé. Pour tout  $x \in E$ , on pose  $g(x) = (f(x) \mid x) - (u \mid x)$ . Montrer que  $g$  admet un unique point critique et que  $g$  présente en ce point un minimum global. *On utilisera une base orthonormale de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $u$ .*

-----

Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $f$ , rangées dans l'ordre croissant (au sens large: elles ne sont pas forcément distinctes), soit  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ . Notons  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormale de  $E$  telle que, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $e_i$  est vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda_i$ , donc  $f(e_i) = \lambda_i e_i$ . Si  $x$  est un vecteur de  $E$ , décomposons-le dans la base  $\mathcal{B}$  :  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ , on a alors  $f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i$ , puis (calcul de produit scalaire dans une b.o.n.) :

$$(f(x) | x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2.$$

Décomposons aussi  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$  :  $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i$ . On a alors  $g(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 - \sum_{i=1}^n u_i x_i$ , ainsi cette expression peut être considérée comme fonction du  $n$ -uplet de réels  $(x_1, \dots, x_n)$ , donc pour tout indice  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = 2 \lambda_j x_j - u_j.$$

Un "point"  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  est un point critique lorsque toutes les dérivées partielles sont nulles (i.e. le gradient de  $g$  au point  $x$  est nul), ce qui correspond à  $x_j = \frac{u_j}{2\lambda_j}$  pour tout  $j$ ,

il y a donc un unique point critique  $v$ , donné par  $v = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{u_i}{\lambda_i} e_i$ .

Il ne reste plus qu'à vérifier que  $g(v) = \min_{x \in E} g(x)$ , autrement dit que, pour tout  $x \in E$ , on a  $g(x) \geq g(v)$ . Or, un calcul facile donne  $g(v) = -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{\lambda_i}$  et, pour  $x \in E$  quelconque,

$$\begin{aligned} g(x) - g(v) &= \sum_{i=1}^n \left( \lambda_i x_i^2 - u_i x_i + \frac{1}{4} \frac{u_i^2}{\lambda_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sqrt{\lambda_i} x_i - \frac{1}{2} \frac{u_i}{\sqrt{\lambda_i}} \right)^2 \geq 0, \quad \text{cqfd} \end{aligned}$$