

DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 9
COMMENTAIRES
PSI2 2025-2026

PROBLÈME

2. Il est plus agréable de redévelopper en série entière $(1 - qt)^{-k}$ et d'utiliser (en le mentionnant!) l'unicité du DSE, que de calculer $\frac{G_{T_k}^{(m)}(0)}{m!}$, enfin je crois!
5. Il y a beaucoup de choses à redire sur cette question difficile mais classique (c'est une démonstration de la **formule de Wald**). En vrac:
- la variable aléatoire S ne peut pas être considérée comme une somme des X_i puisque le nombre de termes figurant dans la somme n'est pas fixé. Pour les curieux, une écriture possible serait $S = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{N \geq i\}} X_i$ mais cela ne permet pas (en tout cas pas conformément au programme) d'obtenir l'espérance ni la fonction génératrice.
 - les variables S et N **ne sont pas indépendantes** puisque $S = \sum_{i=1}^N X_i$, donc d'une certaine façon la valeur de $S(\omega)$ dépend de la valeur de $N(\omega)$. *Oui, je sais, ce n'est pas une explication très satisfaisante.*
 - l'écriture $\{S = s \mid N = n\}$ (un "événement conditionnel" ?) n'a aucun sens.
 - l'écriture $E(S = s \mid N = n)$ (une "espérance conditionnelle") a du sens, mais **ce n'est pas au programme de prépa, bon sang!** Alors peu m'importe où vous êtes allés me pêcher des "formules de l'espérance totale" etc. (à l'aide d'une IA ?, à l'aide d'un ou une camarade en L3 ?), cela ne présente aucun intérêt.
- Ce qui est intéressant pour vous (et je pensais que vous auriez assez de maturité pour le comprendre), c'est d'essayer de traiter le sujet avec les outils du programme. Et les outils du programme sont ici les familles sommables, le théorème de Fubini.
6. Le calcul manque souvent de rédaction. Ce serait bien de voir écrit clairement sur vos copies que X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable à gauche au point 1 (c'est un résultat du programme).
7. Attention, l'espérance à elle seule ne détermine pas la loi. Donc le calcul de $E(S) = \frac{1}{pq}$ ne suffit pas pour conclure.
13. Rédaction parfois insuffisante: lorsque $p < \frac{1}{2}$, la fonction G_X admet deux points fixes dans $[0, 1]$, qui sont $\frac{p}{1-p}$ et 1. Pourquoi est-ce le premier qui est la limite de la suite (r_n) ?

EXERCICE 1

extrait de CCINP 2022 PSI

1. et 2. Parfois de petites imprécisions, une des colonnes de la matrice A (supposée de rang 1) pouvant être nulle, ou bien pour justifier que $A = XY^\top$ n'est pas la matrice nulle.
5. et 6. Des tentatives de raisonnements par équivalences qui sont souvent un peu fumeux, il vaut mieux rédiger une double implication. *Par exemple, lorsque la trace de A est nulle, le polynôme $P = X(X - \text{tr}(A))$, annulateur de la matrice A , n'est pas scindé à racines simples. Et alors ? Puis-je en déduire que A n'est pas diagonalisable ? Réponse: non!*

8. Quelques confusions entre “symétrie” et “matrice symétrique”: il n’y a aucun lien entre ces deux notions! Le fait que la matrice (dans une BON) soit symétrique correspond au caractère “symétrique” (i.e. autoadjoint) de l’endomorphisme u associé, pas au fait que $u^2 = \text{id}_E$.
- 9., 10. et 11. Beaucoup de maladresses dans ces questions.
-

EXERCICE 2

1. Il importe de bien préciser que c’est pour tout vecteur Y **non nul** de $\mathbb{R}^{n-1}$ que l’on doit avoir $Y^\top AY > 0$.
- 2.e. Ici encore, l’inégalité $X^\top BX \geq 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ est correctement traité (caractère positif). En revanche, le caractère **défini positif** est rarement bien exposé: il faut montrer que $X^\top BX = 0 \implies X = 0$.
3. Des explications longues et pas toujours très claires, alors qu’ici un raisonnement par équivalences (*cf.* corrigé) permet de conclure agréablement.