

EXERCICE

Soit E un espace euclidien orienté de dimension trois, soit u un endomorphisme de E représenté dans une base orthonormale directe $\mathcal{B}$ par une matrice $A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ antisymétrique.

1. Montrer qu'il existe un vecteur ω de E tel que $\forall x \in E \quad u(x) = \omega \wedge x$.
 2. En déduire qu'il existe une base orthonormale directe $\mathcal{B}'$ de E dans laquelle u est représenté par une matrice U de la forme $U = \alpha M$, où α est un réel positif, et $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
 3. On introduit la matrice diagonale $D = \text{diag}(0, 1, 1)$. Vérifier la relation $U^{2k} = (-1)^k \alpha^{2k} D$ pour k entier naturel non nul, puis exprimer U^{2k+1} pour k entier naturel en fonction de l'entier k et de la matrice M .
 4. Montrer que la suite de matrices $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{U^k}{k!}$, converge dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On pourra exprimer S_{2n} en utilisant les résultats de la question 3.
 5. Vérifier que la matrice $R = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ est orthogonale directe, et en donner une interprétation géométrique.
-

PROBLÈME 1

On rappelle l'inégalité usuelle: $\forall u \in]-1, +\infty[\setminus \{0\} \quad \ln(1+u) < u$.

On rappelle aussi le résultat suivant (intégrale de Gauss): $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

PARTIE A. Un équivalent d'intégrale

Soit la fonction $f : x \mapsto (1-x)e^x$. Pour $x \in]0, 1[$, on pose $\varphi(x) = -\frac{1}{x^2} \ln(f(x))$.

1. Étudier le signe de φ sur $]0, 1[$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x)$.
2. Montrer que φ est minorée sur $]0, 1[$ par un réel strictement positif.
3. Montrer qu'il existe un réel strictement positif a tel que $\forall x \in]0, 1[\quad f(x) \leq e^{-ax^2}$.
4. Pour tout n entier naturel non nul, on considère la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall u \in \mathbb{R}_+ \quad g_n(u) = \begin{cases} \left(f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n & \text{si } u \in [0, \sqrt{n}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Montrer que chaque fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}_+$, et que la suite de fonctions (g_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction g que l'on déterminera.

5. En déduire que

$$\int_0^1 (f(x))^n dx \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

PARTIE B. Une application

Pour tout n entier naturel, on pose

$$T_n = \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} \quad \text{et} \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!}.$$

6. Justifier l'existence de R_n . Que vaut la somme $T_n + R_n$?

7. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $t \mapsto e^{nt}$, prouver la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad R_n = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{nt} dt.$$

8. En déduire un équivalent de R_n lorsque n tend vers l'infini. Prouver que $T_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} e^n$.

PARTIE C. Somme de variables de Poisson indépendantes

Dans cette partie, on considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, et on suppose que chacune de ces variables suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$.

Pour tout n entier naturel non nul, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

9. Quelle est la loi de la variable S_n ? On donnera une démonstration du résultat.

10. Quelle est l'espérance de S_n ?

11. En utilisant les parties précédentes, donner la valeur de

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n \leq n).$$

PARTIE D. Une autre application probabiliste

Dans cette partie, on considère l'expérience aléatoire suivante: une urne contient n boules numérotées de 1 à n , et on effectue $n+1$ tirages avec remise. On note X le nombre de tirages nécessaires pour amener, pour la première fois, une boule déjà tirée. On dira que X est le "temps d'attente de la première répétition". Par exemple, avec $n = 5$, si les 6 tirages donnent successivement 3-2-1-5-2-3, on pose $X = 5$.

12. Justifier la bonne définition de la variable aléatoire X . Quel est l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre ?

13. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, montrer que

$$P(X > k+1) = P(X > k+1 \mid X > k) \cdot P(X > k).$$

$$\text{En déduire que } P(X > k) = \frac{n!}{n^k (n-k)!} \text{ pour tout } k \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

14. Montrer que $E(X) = \sum_{k=0}^n P(X > k)$.

15. En utilisant les parties précédentes, donner un équivalent simple de $E(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

PROBLÈME 2

Fonctions convexes de plusieurs variables

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **convexe** si elle vérifie

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \quad \forall t \in [0, 1] \quad f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Dans tout le problème, si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on identifiera le vecteur x avec la matrice-colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pourra alors considérer la matrice-ligne $x^\top = (x_1 \ \dots \ x_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$. Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice carrée d'ordre n , on pourra considérer des expressions comme $Ax \in \mathbb{R}^n \simeq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ou $x^\top Ax$ qui est un réel. On notera enfin $(x|y) = x^\top y$ le produit scalaire usuel de deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$.

PARTIE A. Exemples

1. Soit N une quelconque norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe.
2. Dans cette question, $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est une matrice carrée d'ordre n , symétrique. On considère l'application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(x) = x^\top Sx.$$

- a. Soient $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ et t réel. Montrer que $x^\top Sy = y^\top Sx$, puis prouver la relation

$$(1-t)f(x) + tf(y) - f((1-t)x + ty) = t(1-t)(x-y)^\top S(x-y).$$

- b. En déduire que l'application f est convexe si et seulement si $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

PARTIE B. Caractérisation des fonctions convexes de classe $\mathcal{C}^1$

Dans toute cette partie, on considère une application $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On notera ∇f son **gradient**, défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Si $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^n$, on définit les applications $\varphi_{x,y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\psi_{x,y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi_{x,y}(t) = f((1-t)x + ty) \quad \text{et} \quad \psi_{x,y}(t) = (1-t)f(x) + tf(y) - \varphi_{x,y}(t).$$

3. Montrer que les applications $\varphi_{x,y}$ et $\psi_{x,y}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner des expressions de leurs dérivées faisant intervenir le gradient de f .
4. Soient $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$. Prouver l'égalité

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \left(\nabla f((1-t)x + ty) \mid y - x \right) dt.$$

5. Dans cette question, on suppose que f est convexe. Déterminer le signe de $\psi'_{x,y}(0)$. En déduire la relation

$$\left(\nabla f(x) \mid y - x \right) \leq f(y) - f(x).$$

6. En déduire que, si f est convexe, alors tout point critique de f est un minimum global de f .

7. (Réciproque de la question 5.) On suppose que l'on a

$$(\mathbf{H}) : \quad \forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \quad \left(\nabla f(x) \mid y - x \right) \leq f(y) - f(x) ,$$

on voudrait montrer que f est convexe. On se donne $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $t \in [0, 1]$, et on pose $c = (1 - t)a + tb$.

a. Écrire la relation **(H)** en substituant au couple (x, y) le couple (c, a) , puis le couple (c, b) .

b. En déduire que f est convexe.

8. Dans cette question, on suppose de nouveau que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et convexe. Prouver que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \quad (\nabla f(y) - \nabla f(x) \mid y - x) \geq 0 .$$

PARTIE C. Fonctions convexes de classe $\mathcal{C}^2$

On suppose maintenant que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$. En tout point x de $\mathbb{R}^n$, on définit la **matrice hessienne** de f en x , notée $H_f(x)$, par

$$H_f(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) .$$

Cette matrice hessienne est symétrique d'après le théorème de Schwarz.

L'objectif de cette partie est de prouver que f est convexe sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si, pour tout point x de $\mathbb{R}^n$, la matrice symétrique $H_f(x)$ est positive.

9. Soient $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$. Montrer que la fonction $\varphi_{x,y}$ introduite dans la **PARTIE B** est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et prouver la relation

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi''_{x,y}(t) = (y - x)^\top \cdot H_f((1 - t)x + ty) \cdot (y - x) .$$

10. On suppose dans cette question que, pour tout point x de $\mathbb{R}^n$, la matrice symétrique $H_f(x)$ est positive. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à l'application $\varphi_{x,y}$ entre les bornes 0 et 1, et en utilisant la question 7., montrer que f est convexe.

11. Montrer que la fonction $f : (x_1, x_2) \mapsto \ln(e^{x_1} + e^{x_2})$ est convexe sur $\mathbb{R}^2$.

12. Dans cette question, on suppose que f est convexe.

a. Soient $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, soient t_1 et t_2 deux réels tels que $t_1 < t_2$. En utilisant la question 8., montrer que $\varphi'_{x,y}(t_1) \leq \varphi'_{x,y}(t_2)$.

b. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $H_f(x) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.