

CORRIGÉ du D.S. de MATHÉMATIQUES numéro 7
PSI2 2025-2026

EXERCICE

1. Une matrice antisymétrique d'ordre 3 est de la forme $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$ avec a, b, c réels.

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3$, on calcule $AX = \begin{pmatrix} ax_2 + bx_3 \\ -ax_1 + cx_3 \\ -bx_1 - cx_2 \end{pmatrix}$, et on reconnaît les coordonnées dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ du produit vectoriel $\omega \wedge x$, où $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ et $\omega = -ce_1 + be_2 - ae_3$. Ce vecteur ω de E convient donc (et c'est le seul).

2. Si A est la matrice nulle, alors u est l'endomorphisme nul, il est alors représenté par la matrice nulle dans toute BOND de E , le résultat demandé est donc vrai avec $\alpha = 0$.

Sinon, soit $\mathcal{B}' = (i, j, k)$ une BOND de E dont le premier vecteur est $i = \frac{\omega}{\|\omega\|}$. Une telle base existe: on choisit un vecteur j unitaire et orthogonal à i , puis on pose $k = i \wedge j$. On a alors $u(i) = \omega \wedge i = \|\omega\| i \wedge i = 0$, $u(j) = \|\omega\| i \wedge j = \|\omega\| k$, enfin $u(k) = \|\omega\| i \wedge k = -\|\omega\| j$, donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ est de la forme demandée avec $\alpha = \|\omega\| \geq 0$.

3. On observe que $U^2 = \alpha^2 \text{diag}(0, -1, -1) = -\alpha^2 D$. Comme $D^k = D$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on en déduit l'expression demandée de U^{2k} pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Attention, cette expression n'est pas valable pour $k = 0$.

Puis, pour $k \in \mathbb{N}$, $U^{2k+1} = U^{2k} \cdot U = (-1)^k \alpha^{2k} D U = (-1)^k \alpha^{2k+1} D M = (-1)^k \alpha^{2k+1} M$ puisque $DM = M$, et cette expression est valable aussi pour $k = 0$.

4. On décompose, en séparant les termes d'indices pairs et impairs:

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{U^k}{k!} = U^0 + \sum_{k=1}^n \frac{U^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{U^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= I_3 + \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k \alpha^{2k}}{(2k)!} \right) D + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \alpha^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) M. \end{aligned}$$

Par opérations sur les suites matricielles convergentes (et en relisant son cours sur les séries entières usuelles), on voit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} = I_3 + (\cos \alpha - 1) D + (\sin \alpha) M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = R.$$

Comme $S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{U^{2n+1}}{(2n+1)!}$ avec $\frac{U^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{(-1)^n \alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} M \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0_3$, on a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n+1} = R$, donc finalement $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = R$ dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

4. On reconnaît en R la matrice de rotation d'angle $\alpha = \|\omega\|$ autour de l'axe dirigé et orienté par le vecteur $i = \frac{\omega}{\|\omega\|}$. On a donc bien $R \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$.

PROBLÈME 1

librement inspiré de Mines-Ponts PC 2017

PARTIE A.

1. On calcule $\varphi(x) = -\frac{1}{x^2} (x + \ln(1-x))$. Il résulte de l'inégalité usuelle rappelée par l'énoncé que $\varphi(x) > 0$ pour tout $x \in]0, 1[$. Un développement limité donne, lorsque x tend vers 0,

$$\varphi(x) = -\frac{1}{x^2} \left(x - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) = \frac{1}{2} + o(1),$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \frac{1}{2}$. Enfin, on a facilement $\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = +\infty$.

2. Posons $\tilde{\varphi}(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \frac{1}{2}$ et $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ pour $x \in]0, 1[$. Alors la fonction $\tilde{\varphi}$ est continue sur $[0, 1[$. De plus, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \tilde{\varphi}(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = +\infty$. Il existe donc $c \in]0, 1[$ tel que, pour tout $x \in [c, 1[$, on ait $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) \geq 1$. De plus, la fonction $\tilde{\varphi}$ est continue sur le segment $[0, c]$, elle atteint donc en un point x_0 de ce segment un minimum $m = \tilde{\varphi}(x_0)$ qui est strictement positif. En posant $a = \min\{m, 1\}$, on a alors $a > 0$ et $\forall x \in [0, 1[\quad \tilde{\varphi}(x) \geq a$, donc $\forall x \in]0, 1[\quad \varphi(x) \geq a$.

3. Pour tout $x \in]0, 1[$, on a donc $-\frac{1}{x^2} \ln(f(x)) \geq a$, soit $f(x) \leq e^{-ax^2}$.

4. La fonction g_n est continue sur $[0, \sqrt{n}]$ comme composée de fonctions continues, elle est évidemment continue car constante sur $]\sqrt{n}, +\infty[$. Enfin, elle est continue au point $\sqrt{n}$ puisque

$$\lim_{u \rightarrow (\sqrt{n})^-} g_n(u) = \lim_{u \rightarrow (\sqrt{n})^+} g_n(u) = g_n(\sqrt{n}) = (f(1))^n = 0.$$

Fixons $u \in \mathbb{R}_+$, alors pour n assez grand (dès que $n \geq u^2$), on a

$$\begin{aligned} g_n(u) &= \exp \left[n \ln \left(f \left(\frac{u}{\sqrt{n}} \right) \right) \right] \\ &= \exp \left[n \left(\ln \left(1 - \frac{u}{\sqrt{n}} \right) + \frac{u}{\sqrt{n}} \right) \right] \\ &= \exp \left[n \left(-\frac{u}{\sqrt{n}} - \frac{u^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{u}{\sqrt{n}} \right) \right] \\ &= \exp \left(-\frac{u^2}{2} + o(1) \right), \end{aligned}$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(u) = g(u)$ en posant $g(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$. La suite de fonctions (g_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers g .

5. Notons d'abord que $\int_0^1 (f(x))^n dx = \int_0^{\sqrt{n}} \left(f \left(\frac{u}{\sqrt{n}} \right) \right)^n \frac{du}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} g_n(u) du$. Posons

$J_n = \int_0^{+\infty} g_n(u) du$. La question 4. semble vouloir nous diriger vers une utilisation du

théorème de convergence dominée, il ne reste plus alors qu'à trouver une domination. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{R}_+$, on a, d'après la question 3.,

$$0 \leq g_n(u) \leq \left(e^{-a \frac{u^2}{n}} \right)^n = e^{-au^2},$$

et la fonction $u \mapsto e^{-au^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On peut donc conclure que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \int_0^{+\infty} g(u) \, du = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \, du = \sqrt{2} \int_0^{+\infty} e^{-v^2} \, dv = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

(en posant $u = \sqrt{2} v$). On en déduit que $\int_0^1 (f(x))^n \, dx \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

PARTIE B.

6. On reconnaît une série exponentielle (donc convergente), R_n est le reste d'ordre n de cette

$$\text{série et } T_n + R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} = e^n.$$

7. Posons $F(t) = e^{nt}$. La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n , appliquée à F entre les points 0 et 1, donne

$$F(1) = \sum_{k=0}^n \frac{F^{(k)}(0)}{k!} 1^k + \int_0^1 \frac{(1-t)^n F^{(n+1)}(t)}{n!} \, dt.$$

Or, $F^{(k)}(t) = n^k e^{nt}$, donc $F^{(k)}(0) = n^k$, on obtient donc

$$e^n = \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n n^{n+1} e^{nt}}{n!} \, dt = T_n + \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{nt} \, dt.$$

Comme on a aussi $e^n = T_n + R_n$, on conclut que $R_n = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{nt} \, dt$.

8. On a donc $R_n = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 (f(x))^n \, dx$, où f est la fonction introduite dans la **PARTIE A**.

De la question 5., on déduit donc que $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{n+1}}{n!} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. Or, la formule de Stirling nous dit que $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$. Après simplifications, il reste $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} e^n$.

Comme $T_n = e^n - R_n$, on se doute qu'on va obtenir aussi $T_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} e^n$, mais il faut faire les choses proprement (*ne pas ajouter ou soustraire des équivalents!*). On va donc écrire que $R_n = \frac{1}{2} e^n + o(e^n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, puis

$$T_n = e^n - R_n = e^n - \frac{1}{2} e^n + o(e^n) = \frac{1}{2} e^n + o(e^n), \quad \text{donc } T_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} e^n.$$

PARTIE C.

9. Par exemple en utilisant les fonctions génératrices: chaque variable X_k suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$, donc $G_{X_k}(t) = e^{t-1}$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Les variables X_k étant mutuellement indépendantes, on a

$$G_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^n G_{X_k}(t) = (e^{t-1})^n = e^{n(t-1)}.$$

On reconnaît la fonction génératrice associée à une loi de Poisson de paramètre n . Comme la fonction génératrice d'une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$ détermine sa loi, on a donc $S_n \sim \mathcal{P}(n)$.

10. C'est du cours: $E(S_n) = n$, ou encore $E(S_n) = G'_{S_n}(1) = [n e^{n(t-1)}]_{t=1} = n$.

11. On a $P(S_n \leq n) = \sum_{k=0}^n P(S_n = k) = \sum_{k=0}^n e^{-n} \frac{n^k}{k!} = \frac{T_n}{e^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$ d'après **Q8**.

PARTIE D.

12. On peut modéliser le résultat d'une expérience par une application de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ vers $\llbracket 1, n \rrbracket$, une telle application ne peut être injective puisque $\text{Card}(\llbracket 1, n+1 \rrbracket) > \text{Card}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, c'est le principe des tiroirs, il y aura donc au moins un tirage (et donc aussi une première occurrence) qui amènera une boule déjà tirée. On a clairement $X(\Omega) \subset \llbracket 2, n+1 \rrbracket$, et l'inclusion inverse est vraie aussi puisque, pour tout $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$, le tirage $(1, 2, \dots, k-1, k-1, \dots, k-1)$ réalise l'événement $\{X = k\}$.

13. On a clairement $\{X > k+1\} \subset \{X > k\}$, donc $\{X > k+1\} \cap \{X > k\} = \{X > k+1\}$. La définition d'une probabilité conditionnelle donne alors

$$P(X > k+1 \mid X > k) = \frac{P(X > k+1)}{P(X > k)}.$$

Remarquons que $P(X > 0) = P(X > 1) = 1$, la formule ci-dessus reste vraie pour $k = 0$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $P(X > k+1 \mid X > k) = \frac{n-k}{n}$: on a déjà tiré k boules distinctes (parmi n), la probabilité que le $(k+1)$ -ième tirage amène une boule non encore tirée est alors $\frac{n-k}{n}$. La formule est cohérente pour $n = 0$. Partant de $P(X > 0) = 1$, on a

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad P(X > k) = \prod_{j=0}^{k-1} P(X > j+1 \mid X > j) = \prod_{j=0}^{k-1} \left(\frac{n-j}{n} \right) = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k},$$

ce qui donne bien $P(X > k) = \frac{n!}{n^k (n-k)!}$.

14. cf. cours où il est démontré que $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k)$, ce qui est la même chose.

Remarque. La variable X prend un nombre fini de valeurs, donc elle est d'espérance finie!

15. On a

$$E(X) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{n^k (n-k)!} = \frac{n!}{n^n} \sum_{k=0}^n \frac{n^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{n!}{n^n} \sum_{j=0}^n \frac{n^j}{j!} = \frac{n!}{n^n} T_n.$$

En utilisant la question 8. et la formule de Stirling, on obtient

$$E(X) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} e^{-n} \cdot \frac{1}{2} e^n = \sqrt{\frac{\pi n}{2}}.$$

PROBLÈME 2

Fonctions convexes de plusieurs variables (*d'après de vieux manuscrits*)

PARTIE A. Exemples

1. Il résulte de l'inégalité triangulaire et de l'axiome d'homogénéité que, pour $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ et $t \in [0, 1]$,

$$N((1-t)x + ty) \leq N((1-t)x) + N(ty) = (1-t)N(x) + tN(y),$$

donc l'application N est convexe sur $\mathbb{R}^n$.

- 2.a. La matrice S est symétrique, donc $S^\top = S$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^n$, l'expression $x^\top Sy$ est un réel donc coïncide avec sa transposée, soit

$$x^\top Sy = (x^\top Sy)^\top = y^\top S^\top (x^\top)^\top = y^\top S^\top x = y^\top Sx.$$

Ensuite, avec $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ et $t \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} (1-t)f(x) + tf(y) - f((1-t)x + ty) &= (1-t)x^\top Sx + ty^\top Sy - ((1-t)x + ty)^\top S((1-t)x + ty) \\ &= [(1-t) - (1-t)^2]x^\top Sx - 2t(1-t)x^\top Sy + (t-t^2)y^\top Sy \\ &= t(1-t)(x^\top Sx - 2x^\top Sy + y^\top Sy) \\ &= t(1-t)(x-y)^\top S(x-y). \end{aligned}$$

- b. • Si $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, les expressions $(x-y)^\top S(x-y)$ sont toujours positives, on déduit immédiatement du calcul fait en a. que f est convexe.

• Réciproquement, si f est convexe, alors l'expression $t(1-t)(x-y)^\top S(x-y)$ doit être un réel positif, et ceci pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ et pour tout $t \in [0, 1]$. En prenant t dans $]0, 1[$, on voit que $(x-y)^\top S(x-y)$ doit toujours être positif. En posant $z = x - y$, alors le vecteur z décrit $\mathbb{R}^n$ tout entier, on doit avoir $z^\top Sz = (z|Sz) \geq 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}^n$ donc la matrice symétrique S est positive.

PARTIE B. Caractérisation des fonctions convexes de classe $\mathcal{C}^1$.

3. Fixons $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^n$ et considérons l'application $\alpha_{x,y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \alpha_{x,y}(t) = (1-t)x + ty = x + t(y-x).$$

Cette application "affine" $\alpha_{x,y}$ (de variable réelle, à valeurs vectorielles) est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\alpha'_{x,y}(t) = y - x$. Elle correspond à l'idée cinématique d'un mouvement rectiligne uniforme passant par le point x à l'instant $t = 0$ et par le point y à l'instant $t = 1$. L'application $\varphi_{x,y} = f \circ \alpha_{x,y}$ est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Les règles de dérivation étudiées en cours ("dérivation le long d'un arc", "arc" qui est ici une droite affine) donnent

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi'_{x,y}(t) = \left(\nabla f(\alpha_{x,y}(t)) \mid \alpha'_{x,y}(t) \right) = \left(\nabla f((1-t)x + ty) \mid y - x \right).$$

Enfin, l'application $t \mapsto (1-t)f(x) + tf(y)$ est une "simple" application affine de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, de dérivée constante $f(y) - f(x)$, donc par différence, $\psi_{x,y}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \psi'_{x,y}(t) = f(y) - f(x) - \left(\nabla f((1-t)x + ty) \mid y - x \right).$$

4. De la question 3., on déduit immédiatement que

$$\int_0^1 \left(\nabla f((1-t)x + ty) \mid y - x \right) dt = \int_0^1 \varphi'_{x,y}(t) dt = \varphi_{x,y}(1) - \varphi_{x,y}(0) = f(y) - f(x) .$$

5. Si f est convexe, alors l'application $\psi_{x,y}$ prend des valeurs positives sur le segment $[0, 1]$. Comme elle est dérivable et que $\psi_{x,y}(0) = 0$, on en déduit que $\psi'_{x,y}(0) \geq 0$. En effet, les taux de variation $\frac{\psi_{x,y}(t) - \psi_{x,y}(0)}{t - 0} = \frac{\psi_{x,y}(t)}{t}$, pour $t \in]0, 1]$, sont positifs donc, par passage à la limite, $\psi'_{x,y}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi_{x,y}(t)}{t} \geq 0$. Or, le calcul de la question 3. montre que $\psi'_{x,y}(0) = f(y) - f(x) - (\nabla f(x) \mid y - x)$. On en déduit l'inégalité

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \quad (\nabla f(x) \mid y - x) \leq f(y) - f(x) .$$

6. Si f est convexe de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et si x est un point critique de f , i.e. $\nabla f(x) = 0$, on a alors pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $f(y) - f(x) \geq (\nabla f(x) \mid y - x) = 0$, donc $f(y) \geq f(x)$. Ainsi, f présente au point x un minimum global.

7.a. On remplace, cela donne

$$(\mathbf{H1}) : \quad (\nabla f(c) \mid a - c) \leq f(a) - f(c) ,$$

et

$$(\mathbf{H2}) : \quad (\nabla f(c) \mid b - c) \leq f(b) - f(c) .$$

b. Soit $t \in [0, 1]$. On effectue la combinaison linéaire (à coefficients positifs, ce qui conserve donc les inégalités larges): $(1-t)(\mathbf{H1}) + t(\mathbf{H2})$, et par linéarité à droite du produit scalaire figurant dans le premier membre, on obtient

$$(\nabla f(c) \mid (1-t)(a - c) + t(b - c)) \leq (1-t)f(a) + tf(b) - ((1-t) + t)f(c) .$$

Comme $(1-t)(a - c) + t(b - c) = (1-t)a + tb - c = 0$, on a obtenu

$$0 \leq (1-t)f(a) + tf(b) - f(c) = (1-t)f(a) + tf(b) - f((1-t)a + tb) ,$$

ce qui prouve la convexité de f (cette relation étant satisfaite pour tous $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $t \in [0, 1]$).

8. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ et convexe, alors pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on a

$$(\nabla f(x) \mid y - x) \leq f(y) - f(x) \quad \text{et} \quad (\nabla f(y) \mid x - y) \leq f(x) - f(y) .$$

En ajoutant les deux, il vient $(\nabla f(x) - \nabla f(y) \mid y - x) \leq 0$, soit

$$(\nabla f(y) - \nabla f(x) \mid y - x) \geq 0 .$$

PARTIE C. Fonctions convexes de classe $\mathcal{C}^2$.

9. On a $\varphi_{x,y} = f \circ \alpha_{x,y}$ (notation introduite dans le corrigé de la question **3.**), et la fonction vectorielle $\alpha_{x,y}$ est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$. Donc $\varphi_{x,y}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. On peut écrire

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi'_{x,y}(t) = \left(\nabla f((1-t)x + ty) \mid y - x \right) = \sum_{j=1}^n (y_j - x_j) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}((1-t)x + ty) .$$

Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a, par la règle de la chaîne,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}((1-t)x + ty) \right) &= \left(\nabla \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) ((1-t)x + ty) \mid y - x \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i - x_i) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}((1-t)x + ty) . \end{aligned}$$

Finalement on obtient

$$\varphi''_{x,y}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (y_i - x_i) (y_j - x_j) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}((1-t)x + ty) = (y - x)^\top \cdot H_f((1-t)x + ty) \cdot (y - x) .$$

10. Soient $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$. Comme $\varphi_{x,y}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, on peut écrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 entre les bornes 0 et 1, soit

$$\varphi_{x,y}(1) = \varphi_{x,y}(0) + (1-0) \cdot \varphi'_{x,y}(0) + \int_0^1 (1-t) \varphi''_{x,y}(t) dt .$$

L'hypothèse faite sur la positivité de la matrice hessienne de f en tout point entraîne que $\varphi''_{x,y}(t)$ est toujours positif. Le reste intégral $\int_0^1 (1-t) \varphi''_{x,y}(t) dt$ est alors lui aussi positif.

On a donc $\varphi_{x,y}(1) - \varphi_{x,y}(0) \geq \varphi'_{x,y}(0)$ soit, en explicitant, $f(y) - f(x) \geq (\nabla f(x) \mid y - x)$. Ceci étant vrai pour tous points x et y de $\mathbb{R}^n$, d'après la question **7.**, on a prouvé que f est convexe sur $\mathbb{R}^n$.

11. La fonction f est clairement de classe $\mathcal{C}^2$. On calcule sa matrice hessienne:

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \frac{e^{x_1+x_2}}{(e^{x_1} + e^{x_2})^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

La trace et le déterminant de cette matrice symétrique sont positifs quel que soit le point $x = (x_1, x_2)$, donc $H_f(x) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, et f est convexe.

12.a. Posons $c_1 = (1-t_1)x + t_1y$ et $c_2 = (1-t_2)x + t_2y$. On a alors $c_2 - c_1 = (t_2 - t_1)(y - x)$, puis

$$\begin{aligned} \varphi'_{x,y}(t_2) - \varphi'_{x,y}(t_1) &= \left(\nabla f((1-t_2)x + t_2y) \mid y - x \right) - \left(\nabla f((1-t_1)x + t_1y) \mid y - x \right) \\ &= \left(\nabla f(c_2) \mid y - x \right) - \left(\nabla f(c_1) \mid y - x \right) \\ &= \left(\nabla f(c_2) - \nabla f(c_1) \mid y - x \right) \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \left(\nabla f(c_2) - \nabla f(c_1) \mid c_2 - c_1 \right) , \end{aligned}$$

et cette expression est positive d'après la question **8**.

- b.** On a donc montré que la fonction $\varphi'_{x,y}$ est croissante sur $\mathbb{R}$. Puisqu'elle est dérivable, sa dérivée est positive et, en particulier, $\varphi''_{x,y}(0) \geq 0$. Le calcul fait en **Q9**. donne alors

$$\varphi''_{x,y}(0) = (y - x)^\top \cdot H_f(x) \cdot (y - x) \geq 0 ,$$

et ceci quels que soient les points x et y de $\mathbb{R}^n$. On conclut alors comme en **2.b.** que la matrice hessienne $H_f(x)$ est (symétrique) positive.