

DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES numéro 7
COMMENTAIRES
PSI2 2025-2026

EXERCICE

1. Cette question n'a rien à voir avec le "théorème de représentation de Riesz" puisqu'il s'agit ici de produit vectoriel et non de produit scalaire, et que u n'est pas une "forme" linéaire, mais un endomorphisme de E !
2. Quelques bonnes réponses, mais assez rares, pour la construction d'une base orthonormale directe "adaptée", et la relation $\alpha = \|\omega\|$ n'est pas souvent clairement obtenue.
4. **Quelle idée de vouloir appliquer le critère des séries alternées pour montrer la convergence d'une série, lorsque la convergence absolue est évidente!** Et puis, combien d'entre vous ont reconnu les développements en série entière des fonctions cosinus et sinus ?

Une erreur de réindexation souvent vue: $S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{U^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{U^{2k}}{(2k)!}$, c'est bien sûr faux, où sont passés les termes d'indices impairs ?

PROBLÈME 1

1. Un petit développement limité était nécessaire pour obtenir la limite de φ en 0. Certains d'entre vous ont encore de très gros problèmes avec le **calcul asymptotique** (limites, équivalents, développements limités à une variable), **à retravailler d'urgence!**
2. Aucune réponse complètement correcte à cette question je crois!
D'abord, voyez-vous bien la différence entre les deux assertions suivantes ?
(1): La fonction φ est strictement positive sur $]0, 1[$;
(2): La fonction φ est minorée par un réel strictement positif sur $]0, 1[$.
Par exemple, la fonction $\varphi : x \mapsto x$ vérifie (1), mais ne vérifie pas (2) puisqu'elle a une limite nulle en 0.

4. Il y a encore besoin d'un peu de calcul asymptotique pour déterminer $g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x)$ dans cette question, c'est bien souvent la cata!

D'autre part, des disjonctions de cas du style

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \leq \sqrt{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

n'ont absolument aucun sens! Si x est un réel positif donné, à quel entier n voulez-vous donc le comparer ?

La **partie B** a été généralement mieux traitée. Attention toutefois en **Q8**. à obtenir $T_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^n}{2}$ correctement, c'est-à-dire sans faire d'opérations illicites (additions, soustractions) avec des équivalents.

9. La preuve la plus rapide du résultat $S_n \sim \mathcal{P}(n)$ était sans doute de passer par les fonctions génératrices. Sinon, il faut "récurrer"!

PROBLÈME 2

1. Je lis parfois des arguments qui me laissent rêveur (“linéarité” de la norme ? ou parfois “bilinéarité”, ou parfois une confusion entre l’axiome de séparation et celui d’homogénéité).
- 3.b. Un raisonnement par double implication est ici bien préférable à un raisonnement par un enchaînement d’équivalences. Pourquoi ? Parce qu’il y a trop de variables à gérer, qu’il faudrait à chaque fois réintroduire par des quantificateurs: $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \forall t \in [0, 1]$, préciser que l’on peut se limiter à considérer $t \in]0, 1[$ pour pouvoir diviser par $t(1 - t)$. *En effet, seul Chuck Norris pouvait diviser par zéro, mais maintenant il est mort!* Bref, toutes ces subtilités sont bien plus faciles à expliquer en rédigeant une implication dans un sens, puis dans l’autre.
3. et 4. Questions généralement bien traitées.
5. L’explication de $\psi'_{x,y}(0) \geq 0$ laisse souvent à désirer, **c’est donc l’analyse à une variable qui est souvent mal maîtrisée.**
9. Le calcul de la dérivée seconde est un peu plus compliqué, il a été bien mené dans certaines copies, mais dans d’autres il y a des confusions sur la nature des objets (le gradient est un vecteur, etc.)