

Notations

- n désigne un entier naturel non nul.
- $\mathcal{M}_n$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille (n, n) , dont la matrice unité est notée I_n .
- E_n désigne l'espace vectoriel des matrices réelles de taille $(n, 1)$ (matrices colonnes). On le munit de son produit scalaire usuel et de la norme (euclidienne) associée définis par :

$$(X|Y) = {}^tXY \text{ et } \|X\| = \sqrt{{}^tXX}$$

- Pour $A \in \mathcal{M}_n$, on note tA , la transposée de A .
- $\mathcal{S}_n$ (respectivement $\mathcal{A}_n$) désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$ constitué des matrices symétriques (respectivement antisymétriques) de $\mathcal{M}_n$.
- $\mathcal{O}_n = \{A \in \mathcal{M}_n, {}^tA = I_n\}$ est le groupe orthogonal d'ordre n .
- $\mathcal{SO}_n = \{A \in \mathcal{O}_n, \det(A) = 1\}$ est le groupe spécial orthogonal d'ordre n .
- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ et $S(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$.
On rappelle que $\mathcal{SO}_2 = \{R(\theta), \theta \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{O}_2 = \mathcal{SO}_2 \cup \{S(\theta), \theta \in \mathbb{R}\}$.

Définition 1 Une matrice A de $\mathcal{M}_n$ est dite **normale** lorsqu'elle commute avec sa transposée, c'est-à-dire lorsque $A{}^tA = {}^tAA$.

Définition 2 $A \in \mathcal{M}_n$ est dite **orthogonalement semblable à** $B \in \mathcal{M}_n$, s'il existe $Q \in \mathcal{O}_n$ tel que $B = {}^tQAQ$. (On pourra noter en abrégé : A est **ORTS** à B)

Objectifs

- Dans un premier temps, ce problème vise à établir que, pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n$, les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

(C₁) Il existe un polynôme P à coefficients réels tel que ${}^tA = P(A)$.

(C₂) La matrice A est normale.

(C₃) Pour tout $X \in E_n$, $\|{}^tAX\| = \|AX\|$.

(C₄) La matrice A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs, dont chaque bloc diagonal est :

- soit de taille $(1, 1)$,

— soit de taille $(2, 2)$ du type $rR(\theta)$, où $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

— Dans un second temps, on définit et caractérise l'exponentielle d'une telle matrice.

On pourra utiliser, sans démonstration, les deux résultats suivants :

Théorème 1 *Tout endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ admet au moins une droite ou un plan stable.*

Théorème 2 *Si $A \in \mathcal{M}_n$ et $B \in \mathcal{M}_n$ sont telles qu'il existe $Q \in \mathcal{O}_n$ vérifiant $B = {}^tQAQ$, alors, pour tout polynôme P à coefficients réels, on a $P(B) = {}^tQP(A)Q$.*

I. Question préliminaire

1. Montrer que la relation **ORTS** est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n$.

II. Exemples

2. Montrer que les éléments de $\mathcal{S}_n$ vérifient les conditions (C_1) , (C_2) , (C_3) et (C_4) , et que ceux de $\mathcal{A}_n$ vérifient les conditions (C_1) , (C_2) et (C_3) .
3. Montrer que les éléments de $\mathcal{O}_n$ vérifient les conditions (C_2) et (C_3) .
4. Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$.
Montrer que les matrices rT , où $r > 0$ et $T \in \mathcal{O}_2$, vérifient les conditions (C_1) et (C_4) .

III. Deux premières implications

Soit $A \in \mathcal{M}_n$.

5. Montrer que si A vérifie la condition (C_1) , alors A vérifie la condition (C_2) .
6. Montrer que si A vérifie la condition (C_2) , alors A vérifie la condition (C_3) .

IV. La condition (C_3) implique la condition (C_4)

Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$ et soit $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$ vérifiant la condition (C_3) .

7. Montrer que $c = b$ ou bien $(b \neq 0 \text{ et } c = -b \text{ et } a = d)$.
On pourra utiliser, par exemple, les vecteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ de E_2 .
En déduire que A vérifie la condition (C_4) .

Tournez la page S.V.P.

Dans toute la suite de cette partie, on se donne $A \in \mathcal{M}_n$ vérifiant la condition (C_3) .

8. Montrer que, pour tout réel λ , la matrice $A - \lambda I_n$ vérifie (C_3) .
9. En déduire que A et tA ont les mêmes sous-espaces propres et qu'ils sont deux à deux orthogonaux.
10. En utilisant la question précédente, déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour qu'elle soit diagonalisable.
11. Pour $n \geq 3$, montrer que A est orthogonalement semblable à une matrice du type $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$, où $A_1 \in \mathcal{M}_p$ et $A_2 \in \mathcal{M}_{n-p}$ vérifient (C_3) , avec $p \in \{1, 2\}$.
On pourra commencer par montrer que toute matrice orthogonalement semblable à A vérifie (C_3) .
12. Montrer que si A vérifie la condition (C_3) , alors A vérifie la condition (C_4) .

V. La condition (C_4) implique la condition (C_1)

Soit $Z = \{z_1, \dots, z_n\}$, une famille de n complexes deux à deux distincts.

13. Établir l'existence d'un unique polynôme P de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad P(z_k) = \overline{z_k}$$

On suppose de plus que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\overline{z_k} \in Z$.

Montrer alors que le polynôme P est réel.

Soient $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(re^{i\theta}) = re^{-i\theta}$.

14. Montrer que $P(rR(\theta)) = {}^t(rR(\theta))$.
Lorsque $\sin \theta \neq 0$, on pourra utiliser la division euclidienne de P par le polynôme caractéristique χ de la matrice $rR(\theta)$ de $\mathcal{M}_2$.
15. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n$ vérifie la condition (C_4) , alors A vérifie la condition (C_1) .

VI. Exponentielle d'une matrice normale

16. Pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, montrer que les séries $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{r^k \cos(k\theta)}{k!}$ et $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{r^k \sin(k\theta)}{k!}$ convergent et calculer leur somme.

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n$ est désormais muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :

$$\forall A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n, \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i,j \leq n} |A_{i,j}|$$

17. Montrer que, pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n^2$, $\|AB\|_\infty \leq n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n$ et $p \in \mathbb{N}$, on pose $S_p(A) = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} A^k$.

18. Montrer que la suite $(S_p(A))_{p \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_n$, vers une limite que l'on notera $\text{Exp}(A)$, et que :

$$\forall Q \in \mathcal{O}_n, \quad \text{Exp}({}^tQAQ) = {}^tQ \text{Exp}(A)Q$$

On pourra montrer que, pour tous $1 \leq i, j \leq n$, la série numérique $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(A^k)_{i,j}}{k!}$ est absolument convergente.

19. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}_n$ constitué des matrices normales de $\mathcal{M}_n$ est un fermé de $\mathcal{M}_n$. Qu'en déduit-on pour $\text{Exp}(A)$, lorsque $A \in \mathcal{E}_n$?
20. Soit $(r, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Montrer que $\text{Exp}(rR(\theta)) = e^{r \cos \theta} R(r \sin \theta)$.
En déduire que $\text{Exp}(\mathcal{E}_n)$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n$ orthogonalement semblable aux matrices diagonales par blocs, dont chaque bloc diagonal est :

- soit du type $(\mu) \in \mathcal{M}_1$, avec $\mu > 0$
- soit du type $\alpha R(\beta) \in \mathcal{M}_2$, avec $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

On note $\mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n$ à valeurs propres strictement positives, et $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des matrices B de $\mathcal{M}_n$ vérifiant les deux conditions :

- les valeurs propres négatives de B sont de multiplicité paire
- il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}$ et $T \in \mathcal{SO}_n$ telles que $B = ST = TS$.

21. Démontrer que $\text{Exp}(\mathcal{E}_n) = \mathcal{F}_n$.

22. La matrice $B = (B_{i,j}) \in \mathcal{M}_n$ définie par :

$$B_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq i+1 = j \leq n \text{ ou } (i,j) = (n,1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est-elle l'exponentielle d'une matrice de $\mathcal{E}_n$?

FIN DU PROBLÈME