

A 2016 - MATH I PC-PSI.



École des PONTS ParisTech,  
ISAE-SUPAERO, ENSTA ParisTech,  
TÉLÉCOM ParisTech, MINES ParisTech,  
MINES Saint-Étienne, MINES Nancy,  
TÉLÉCOM Bretagne, ENSAE ParisTech (Filière MP).

CONCOURS 2016

**PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES**

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'usage de l'ordinateur ou de la calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :  
Concours Commun TPE/EIVP, Concours Mines-Télécom, Concours  
Centrale-Supélec (Cycle international).

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente  
sur la première page de la copie :*

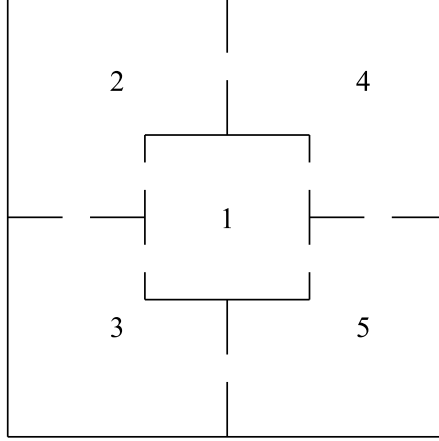
*Mathématiques I - PC-PSI*

*L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

## A Rat dans un labyrinthe

Un labyrinthe est constitué de cinq salles, numérotées de 1 à 5, disposées comme sur cette figure :



Un rat se déplace dans ce labyrinthe, et on relève sa position en des instants numérotés  $0, 1, 2, \dots, k, \dots$  ( $k \in \mathbf{N}$ ). On admet que, si le rat se trouve à l'instant  $k$  ( $k \in \mathbf{N}$ ) dans la salle numéro  $i$  ( $1 \leq i \leq 5$ ), alors il empruntera aléatoirement une des portes de la salle  $i$  et se trouvera donc, à l'instant  $k + 1$ , avec équiprobabilité, dans l'une quelconque des salles communiquant avec la salle  $i$ . On admet que l'on peut introduire, pour tout  $k$  entier naturel, une variable aléatoire  $S_k$  donnant le numéro de la salle où se trouve le rat à l'instant  $k$ . À titre d'exemple, on aura donc

$$\forall k \in \mathbf{N},$$

$$P(S_{k+1} = 1 | S_k = 2) = P(S_{k+1} = 3 | S_k = 2) = P(S_{k+1} = 4 | S_k = 2) = \frac{1}{3}.$$

Pour tout  $k \in \mathbf{N}$ , on introduit la matrice-colonne

$$X_k = \begin{pmatrix} P(S_k = 1) \\ P(S_k = 2) \\ P(S_k = 3) \\ P(S_k = 4) \\ P(S_k = 5) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbf{R}).$$

1. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que  $P(S_{k+1} = 1)$  s'écrit comme une combinaison linéaire des  $(P(S_k = i), i = 1, \dots, 5)$ .

2. Expliciter la matrice carrée  $A \in \mathcal{M}_5(\mathbf{R})$  telle que  $X_{k+1} = {}^t A X_k$  pour tout  $k$  entier naturel.

*La notation  ${}^t A$  représente ici la transposée de la matrice  $A$ .*

3. Montrer, sans calcul, que le nombre 1 est valeur propre de la matrice  $A$  et expliciter un vecteur propre associé.

On suppose que la loi de la variable  $S_0$  est donnée par

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

4. Montrer qu'alors les variables aléatoires  $S_k$  ont toutes la même loi.
5. Est-ce que  $S_0$  et  $S_1$  sont indépendantes ?

## B Convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

Soit  $u$  un endomorphisme d'un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie. On suppose qu'il existe une norme  $\|\cdot\|$  sur  $E$  telle que

$$\forall x \in E \quad \|u(x)\| \leq \|x\|.$$

Pour tout entier naturel  $k$  non nul, on considère l'endomorphisme

$$r_k = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} u^l = \frac{1}{k} (\mathrm{I}_E + u + u^2 + \cdots + u^{k-1}).$$

6. Soit  $x \in \ker(u - \mathrm{I}_E)$ . Déterminer  $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k(x)$ .
7. Soit  $x \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{I}_E)$ . Montrer que  $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k(x) = 0_E$ .
8. En déduire que  $E = \ker(u - \mathrm{I}_E) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{I}_E)$ .

9. Soit  $x \in E$  un vecteur quelconque. Montrer que la suite  $(r_k(x))_{k \in \mathbf{N}^*}$  converge vers un vecteur de  $E$ , que l'on notera  $p(x)$ . Interpréter géométriquement l'application  $p : E \rightarrow E$  ainsi définie.

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  une matrice carrée d'ordre  $n$  à coefficients réels. On suppose qu'il existe une norme, aussi notée  $\|\cdot\|$ , sur l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$  identifié à  $\mathbf{R}^n$ , telle que, pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ , on ait  $\|AX\| \leq \|X\|$ . Pour tout  $k$  entier naturel non nul, on considère la matrice

$$R_k = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} A^l = \frac{1}{k} (I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}). \quad (2)$$

10. Montrer que la suite de matrices  $(R_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$  converge dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  vers une matrice  $P$ , telle que  $P^2 = P$ .

## C Matrices stochastiques

**Définition 1** On notera  $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$  la matrice-colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1.

**Définition 2** Une matrice carrée  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  est dite **stochastique** si elle vérifie les conditions suivantes :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} \geq 0; \quad (3)$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1. \quad (4)$$

Nous dirons aussi qu'une matrice-ligne  $L = (\lambda_1 \ \cdots \ \lambda_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})$  est stochastique lorsque ses coefficients  $\lambda_i$  sont tous positifs ou nuls, et de somme égale à 1.

11. Vérifier que la condition (4) équivaut à la condition  $AU = U$ .
12. En déduire que l'ensemble  $\mathcal{E}$  des matrices stochastiques (carrées d'ordre  $n$ ) est stable par le produit matriciel.
13. Montrer que cet ensemble  $\mathcal{E}$  est une partie fermée et convexe de l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ .

On munit l'espace  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$  de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  définie par  $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$  si  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ .

14. Montrer que, si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  est stochastique, alors on a  $\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$  pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ .

Dans toute la suite du problème, on note  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  une matrice stochastique, et on suppose qu'il existe un entier naturel non nul  $p$  tel que la matrice  $A^p$  ait tous ses coefficients strictement positifs. Pour tout  $k$  entier naturel non nul, on posera

$$R_k = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} A^l$$

15. Montrer que  $\ker(A^p - I_n)$  est de dimension 1.

*Indication : soit  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \ker(A^p - I_n)$ , soit  $s \in \llbracket 1, n \rrbracket$  un indice tel que  $x_s = \max_{1 \leq j \leq n} x_j$ , on montrera que  $x_j = x_s$  pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .*

16. En déduire que  $\ker(A - I_n) = \text{Vect}(U)$ .
17. Montrer que, pour tout  $k \in \mathbf{N}^*$ , la matrice  $R_k$  est stochastique.
18. Montrer que la suite  $(R_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$  converge dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  vers une matrice  $P$ , stochastique, de rang 1.
19. En déduire que l'on peut écrire  $P = UL$ , où  $L = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})$  est une matrice-ligne stochastique.
20. Montrer que  $PA = P$ . En déduire que  $L$  est la seule matrice-ligne stochastique vérifiant  $LA = L$ .
21. Montrer que les coefficients de la matrice-ligne  $L$  sont tous strictement positifs.
22. Montrer que le nombre 1 est valeur propre simple de la matrice  $A$ .

*On pourra utiliser le résultat de la question 8.*

## D Application au labyrinthe

On essaie ici d'approfondir l'étude commencée dans la partie A en exploitant les résultats de la partie C.

On admet qu'il existe un entier naturel  $p$  tel que les coefficients de la matrice  $A^p$  soient tous strictement positifs.

23. Quelle est la limite  $P$  de la suite de matrices  $(R_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$  définie en (2) ? Expliciter cette matrice  $P$  dans le cas de l'exemple de la partie A.
24. Toujours dans l'exemple de la partie A, en reprenant les mêmes notations, montrer qu'il existe une unique loi de probabilité sur l'ensemble  $\llbracket 1, 5 \rrbracket$  telle que, si la variable aléatoire  $S_0$  suit cette loi, alors les variables  $S_k$  suivent toutes la même loi (autrement dit, telle que la probabilité de présence du rat dans une salle soit la même à tous les instants  $k$ ,  $k \in \mathbf{N}$ ).

FIN DU PROBLÈME

## Proposition de corrigé

1) D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} P(S_{k+1} = 1) &= \sum_{i=1}^5 P(S_{k+1} = 1, S_k = i) \\ &= \sum_{i=1}^5 P(S_{k+1} = 1 \mid S_k = i) P(S_k = i) \\ &= \sum_{i=2}^5 P(S_{k+1} = 1 \mid S_k = i) \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

2) Plus généralement, pour tout  $i \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$ ,

$$P(S_{k+1} = j) = \sum_{i=1}^5 P(S_{k+1} = j \mid S_k = i) P(S_k = i).$$

C'est un produit de vecteur ligne par une matrice  $A$  donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

En transposant on a bien la relation voulue.

3) Comme la somme des coefficients sur chacune des lignes fait 1, le vecteur dont toutes les composantes valent 1 est un vecteur propre pour la valeur propre 1.

4) D'après la question 2, il suffit vérifier que  $X_1 = X_0$ . Ce qui se fait par un simple calcul matriciel.

5) Puisque le rat bouge à chaque pas, on a d'une part

$$P(X_0 = 1, X_1) = 0,$$

et d'autre part, d'après la question 4,

$$P(X_0 = 1)P(X_1 = 1) = 1/16.$$

Les deux variables ne sont donc pas indépendantes.

6) Si  $x \in \ker(u - I_E)$ , alors  $u(x) = x$ , puis  $u^l(x) = x$  pour tout entier  $l$ , donc  $r_k(x) = x$  pour tout entier  $k$  et  $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k(x) = x$ .

7) Si  $x \in \text{Im}(u - I_E)$ , on peut écrire  $x = u(y) - y$  pour un certain vecteur  $y$  de  $E$ . On a alors  $u^l(x) = u^{l+1}(y) - u^l(y)$ , puis pour tout entier naturel  $k$  non nul,

$$r_k(x) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} (u^{l+1}(y) - u^l(y)) = \frac{1}{k} (u^k(y) - y)$$

en observant le télescopage. L'hypothèse faite sur l'endomorphisme  $u$  entraîne  $\|u^k(y)\| \leq \|y\|$  pour tout  $k$ , l'inégalité triangulaire donne alors

$$\|r_k(x)\| = \frac{1}{k} \leq \|u^k(y) - y\| \leq \frac{1}{k} (\|u^k(y)\| + \|y\|) \leq \frac{2\|y\|}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

On obtient bien  $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k(x) = 0_E$ .

8) On a déjà  $\dim [\ker(u - I_E)] + \dim [\text{Im}(u - I_E)] = \dim(E)$  par le théorème du rang. Pour montrer que ces deux sous-espaces sont supplémentaires, il suffit alors de montrer qu'ils sont en somme directe, c'est-à-dire d'intersection réduite à  $\{0_E\}$ .

Or, si  $x \in \ker(u - I_E) \cap \text{Im}(u - I_E)$ , on a  $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k(x) = x$  et  $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k(x) = 0_E$  par les questions 6 et 7. Par unicité de la limite,  $x = 0_E$ , ce qui achève la démonstration.

9) Soit  $x$  un vecteur de  $E$ , il admet une unique décomposition en  $x = y + z$  avec  $y \in \ker(u - I_E)$  et  $z \in \text{Im}(u - I_E)$ . Le vecteur  $y$  est le projeté de  $x$  sur  $\ker(u - I_E)$  parallèlement à  $\text{Im}(u - I_E)$ . Pour tout  $k$ ,  $r_k$  est un endomorphisme de  $E$ , donc  $r_k(x) = r_k(y) + r_k(z)$ . Or,  $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k(y) = y$  et  $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k(z) = 0_E$  d'après 6 et 7, donc  $p(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} r_k(x) = y$ .

L'application  $p$  ainsi définie est donc le projecteur sur  $\ker(u - I_E)$  parallèlement à  $\text{Im}(u - I_E)$ .

10) Soit  $u$  l'endomorphisme de  $E = \mathbf{R}^n$  canoniquement représenté par la matrice  $A$ . Alors la matrice  $R_k$  représente canoniquement l'endomorphisme  $r_k = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} u^l$ . L'endomorphisme  $u$  vérifie  $\|u(x)\| \leq \|x\|$  pour tout  $x$  de  $E$ . D'après la question 8, on a  $E = F \oplus G$ , avec

$$F = \ker(u - I_E) = \ker(A - I_n) \quad \text{et} \quad G = \text{Im}(u - I_E) = \text{Im}(A - I_n)$$

et pour tout  $x \in E$ , on a  $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k(x) = p(x)$ , où  $p$  est le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$  (cf. question 9). Soit  $P = (p_{i,j})$  la matrice représentant canoniquement ce projecteur. Pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , en notant  $e_j$  le  $j$ -ème vecteur de la base canonique de  $\mathbf{R}^n$ , on a  $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k(e_j) = p(e_j)$ . Comme la convergence d'une suite de vecteurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie peut s'étudier coordonnée par coordonnée dans une base, on en déduit que, avec des notations évidentes,

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (R_k)_{i,j} = p_{i,j}.$$

On a ainsi montré que  $\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = P$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . On a  $P^2 = P$  puisque la matrice  $P$  représente un projecteur.



11) On a  $(AU)_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}u_j = \sum_{j=1}^n a_{i,j}$ . Donc  $AU = U$  si et seulement si la condition (4) est satisfaite.

12) Soient  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{E}$ ,  $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{E}$ . Posons  $C = (c_{i,j}) = AB$ . Les  $a_{i,j}$  et les  $b_{i,j}$  étant positifs, on a  $c_{i,k} = \sum_{j=1}^n a_{i,j}b_{j,k} \geq 0$  pour tout couple  $(i, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , donc  $C$  satisfait la condition (3). Par ailleurs,  $AU = U$  et  $BU = U$ , donc  $CU = (AB)U = A(BU) = AU = U$  et la condition (4) est aussi satisfaite. Finalement,  $C = AB \in \mathcal{E}$ .

13) Soit  $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$  une suite de matrices (carrées d'ordre  $n$ ) stochastiques. Notons  $A_k = (a_{i,j}^{(k)})_{1 \leq i,j \leq n}$ . Supposons que la suite  $(A_k)$  converge vers une matrice  $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ , i.e. pour tout couple  $(i, j)$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{i,j}^{(k)} = b_{i,j}$ .

Fixons un couple  $(i, j)$ . Comme  $a_{i,j}^{(k)} \geq 0$  pour tout  $k$ , le passage à la limite donne  $b_{i,j} \geq 0$ .

Fixons  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Comme  $\sum_{j=1}^n a_{i,j}^{(k)} = 1$  pour tout  $k$ , à la limite on obtient  $\sum_{j=1}^n b_{i,j} = 1$ . La matrice  $B = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k$  est donc aussi stochastique, ainsi l'ensemble  $\mathcal{E}$  est une partie fermée (stable par passage à la limite) de l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . Soient  $A \in \mathcal{E}$ ,  $B \in \mathcal{E}$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ , posons  $C = (1 - \lambda)A + \lambda B$ . Avec des notations évidentes, on a

$$c_{i,j} = (1 - \lambda)a_{i,j} + \lambda b_{i,j} \geq 0$$

et  $CU = (1 - \lambda)AU + \lambda BU = (1 - \lambda)U + \lambda U = U$ , ainsi  $C \in \mathcal{E}$ .

14) Soit  $Y = AX$ , alors  $y_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j$  donc, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$|y_i| \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j}|x_j| \leq \left( \sum_{j=1}^n a_{i,j} \right) \|X\|_{\infty} = \|X\|_{\infty}.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout indice  $i$ , on a prouvé  $\|Y\|_{\infty} = \|AX\|_{\infty} \leq \|X\|_{\infty}$ .

15) On a  $AU = U$  car  $A$  est stochastique, donc  $A^p U = U$  et  $U \in \ker(A^p - I_n)$ , cet espace est donc de dimension au moins égale à 1.

Soit maintenant  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \ker(A^p - I_n)$ . Notons  $A^p = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ . Soit

$s \in \llbracket 1, n \rrbracket$  un indice tel que  $\max_{1 \leq j \leq n} x_j = x_s$ . La relation  $A^p X = X$  s'écrit

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad x_i = \sum_{j=1}^n c_{i,j}x_j.$$

En particulier,  $x_s = \sum_{j=1}^n c_{s,j}x_j$ , d'où, les coefficients  $c_{s,j}$  étant positifs,

$$x_s = \sum_{j=1}^n c_{s,j}x_j \leq \sum_{j=1}^n c_{s,j}x_s = \left( \sum_{j=1}^n c_{s,j} \right) x_s = x_s.$$

De l'égalité entre les termes extrêmes, on déduit  $\sum_{j=1}^n c_{s,j}(x_s - x_j) = 0$ . Comme tous les termes de cette somme sont positifs ou nuls, ils sont tous nuls :  $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad c_{s,j}(x_s - x_j) = 0$ . Les  $c_{s,j}$  étant strictement positifs, on déduit enfin  $x_s - x_j = 0$  pour tout  $j$ , ce qu'il fallait démontrer. Le vecteur  $X$  est donc colinéaire à  $U$ , et  $\ker(A^p - I_n) \subset \text{Vect}(U)$ . En conclusion,  $\ker(A^p - I_n) = \text{Vect}(U)$  est de dimension 1.

16) On sait que  $AU = U$ , donc  $U \in \ker(A - I_n)$ , puis  $\text{Vect}(U) \subset \ker(A - I_n)$ .

D'autre part, la relation  $A^p - I_n = (I_n + A + A^2 + \dots + A^{p-1})(A - I_n)$  donne l'inclusion  $\ker(A - I_n) \subset \ker(A^p - I_n)$  pour tout  $p \geq 1$ . Avec la question 15 ci-dessus, on conclut  $\ker(A - I_n) = \text{Vect}(U)$ .

17) D'après la question 12,  $A^l$  est stochastique. De 13, on déduit que  $R_k$  est stochastique.

18) D'après 14, la matrice  $A$  vérifie  $\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$  pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ , on peut donc appliquer les résultats de la question 10 : la suite  $(R_k)$  converge vers une matrice  $P$ , qui représente le projecteur sur  $\ker(A - I_n) = \text{Vect}(U)$  parallèlement à  $\text{Im}(A - I_n)$ . Cette matrice  $P$  est donc de rang 1. De 13, on sait que la limite est nécessairement stochastique.

19) Les lignes de la matrice  $P$  sont toutes stochastiques (coefficients positifs, de somme 1) et sont colinéaires (i.e. proportionnelles) puisque  $\text{rang}(P) = 1$ . Elles sont donc toutes égales. Si on note  $L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$  la première ligne de la matrice  $P$ , c'est bien sûr une matrice-ligne stochastique, et on a

$$P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = UL.$$

20) On a  $P = \lim_{k \rightarrow \infty} R_k = \lim_{k \rightarrow \infty} R_{k+1}$ . Or,  $R_{k+1} = \frac{1}{k+1}I_n + \frac{k}{k+1}R_k A$ . Par continuité du produit matriciel et opérations sur les suites convergentes, on déduit la relation  $PA = P$ . Cette relation s'écrit  $ULA = UL$ , on en déduit  ${}^t U U L A = {}^t U U L$ , soit  $n L A = n L$ , et finalement  $L A = L$ , ce qui s'écrit aussi  ${}^t t A {}^t L = {}^t L$ .

Par ailleurs, si  $L' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$  est une matrice-ligne telle que  $L' A = L'$ , alors  ${}^t A {}^t L' = {}^t L'$ , donc  ${}^t L' \in \ker({}^t A - I_n)$ . Mais, les matrices  $A - I_n$  et  ${}^t A - I_n = {}^t(A - I_n)$  ayant le même rang, on a  $\dim \left[ \ker({}^t A - I_n) \right] = \dim \left[ \ker(A - I_n) \right] = 1$  par le théorème du rang, donc  $\ker({}^t A - I_n) = \text{Vect}({}^t L)$ . Il existe donc un réel  $\alpha$  tel que  ${}^t L' = \alpha {}^t L$ , ou encore  $L' = \alpha L$ . Si, de plus, on suppose  $L'$  stochastique, alors  $L' = L$  d'où l'unicité demandée.

21) On a la relation  $L A^p = L$ . En notant toujours  $c_{i,j}$  les coefficients (strictement positifs) de la matrice  $A^p$ , on a donc, pour tout  $j$ ,  $\lambda_j = \sum_{i=1}^n c_{i,j} \lambda_i$ . Tous les termes de cette dernière somme sont positifs ou nuls. Comme  $L \neq 0$ , il existe au moins un indice  $i_0$  tel que  $\lambda_{i_0} > 0$ . On a alors  $\lambda_j \geq c_{i_0,j} \lambda_{i_0} > 0$ .

22) On a  $E = \mathbf{R}^n = \ker(A - I_n) \oplus \operatorname{Im}(A - I_n)$  par la question 8 ; ces deux sous-espaces (notons-les  $F$  et  $G$  respectivement) sont stables par  $A$ , donc le polynôme caractéristique de  $A$  (ou de l'endomorphisme  $a$  de  $E = \mathbf{R}^n$  canoniquement associé) est le produit des polynômes caractéristiques des endomorphismes induits par  $a$  sur  $F$  et  $G$  :  $\chi_A = \chi_a = \chi_{a_F} \cdot \chi_{a_G}$ . Il est clair que  $\chi_{a_F}(X) = X - 1$  puisque  $a_F = I_F$  et  $\dim F = 1$ . Par ailleurs, l'endomorphisme  $a_G$  de  $G$  n'admet pas 1 pour valeur propre puisque  $G \cap \ker(a - I_E) = \{0_E\}$ . Donc 1 est racine simple de  $\chi_A$ , c'est-à-dire valeur propre simple de la matrice  $A$ .

23) D'après les questions 18 à 20, la suite de matrices  $(R_k)$  converge vers la matrice  $P = UL$ , où  $L$  est l'unique matrice-ligne stochastique telle que  $LA = L$ , ce qui signifie aussi que  ${}^tL$  est l'unique vecteur propre de la matrice  ${}^tA$  pour la valeur propre 1, dont les coordonnées soient positives et de somme 1. Le vecteur  $X_0$  défini dans (1) satisfaisant ces conditions, par unicité on déduit que  ${}^tL = X_0$ , ou  $L = {}^tX_0$ , donc

$$P = UM = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/16 & 3/16 & 3/16 & 3/16 \\ 1/4 & 3/16 & 3/16 & 3/16 & 3/16 \\ 1/4 & 3/16 & 3/16 & 3/16 & 3/16 \\ 1/4 & 3/16 & 3/16 & 3/16 & 3/16 \\ 1/4 & 3/16 & 3/16 & 3/16 & 3/16 \end{pmatrix}.$$

24) Comme on a pu le pressentir dans la **PARTIE A**, se donner une loi de probabilité sur l'ensemble  $\llbracket 1, 5 \rrbracket$  revient à se donner une matrice-ligne stochastique  $L = (\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \lambda_4 \ \lambda_5) \in \mathcal{M}_{1,5}(\mathbf{R})$  avec  $P(\{i\}) = \lambda_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$ . Si la variable aléatoire  $S_0$  suit une telle loi, alors pour tout  $k$ , la variable  $S_k$  suit la loi sur  $\llbracket 1, 5 \rrbracket$  donnée par la matrice-ligne stochastique  $LA^k$ . La "loi initiale" (celle de  $S_0$ ) est alors une "loi stationnaire" (celle de  $S_k$  indépendamment de  $k$ ) si et seulement si  $LA^k = L$  pour tout  $k$ , ce qui équivaut à la seule condition  $LA = L$ . Par unicité d'une matrice-ligne stochastique vérifiant cela, on a donc unicité d'une

loi stationnaire, qui est donc celle correspondant à  $L = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \end{pmatrix}.$