

EXERCICES d'ORAL

I. ALGÈBRE GÉNÉRALE (arithmétique, nombres complexes, polynômes)

ALG 1 (CMT).

- a. Soient α et β deux réels tels que $1 + e^{i\alpha} + e^{i\beta} = 0$.
Soit le polynôme $P = (X - 1)(X - e^{i\alpha})(X - e^{i\beta})$.
- Exprimer les coefficients de P à l'aide de ses racines.
 - Montrer que les coefficients de X^2 et de X sont nuls.
 - En déduire P .
- b. Soient x, y, z des réels tels que $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0$.
- Montrer que $e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0$.
 - Que dire de $e^{3ix} + e^{3iy} + e^{3iz}$? et de $e^{nix} + e^{niy} + e^{niz}$ pour n entier naturel ?
-

ALG 2 (CCINP). Montrer que, pour tout n entier naturel, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P_n(X) + P_n(X + 1) = 2X^n.$$

Déterminer le degré de P_n . Montrer la relation $P'_n = nP_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'expression de P_n en fonction des $P_k(0)$, $0 \leq k \leq n$.

ALG 3 (CMT). Factoriser, dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$, le polynôme $P = X^4 + 1$.

ALG 4 (CCINP). Pour tout n entier naturel, soit le polynôme $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$. Montrer que le polynôme P_n a toutes ses racines simples.

ALG 5 (CMT). Soit $n \geq 2$. Calculer les nombres

$$A = \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) \quad \text{puis} \quad B = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}.$$

ALG 6 (CMT).

- a. Montrer que le polynôme $L_n \in \mathbb{R}[X]$ défini par

$$L_n = \frac{d^n}{dX^n} [(X^2 - 1)^n]$$

a toutes ses racines simples, appartenant au segment $[-1, 1]$.

- b. Calculer $L_n(1)$ et $L_n(-1)$.
-

ALG 7 (divers). Soient a et b deux entiers naturels non nuls, on note q le quotient de la division euclidienne de $a - 1$ par b . Soit n un entier naturel. Déterminer le quotient de la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1} .

ALG 8 (divers). Soit p un nombre premier.

- Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, le coefficient binomial $\binom{p}{k}$ est divisible par p .
- Soit n un entier naturel. Montrer que $p \mid n^p - n$.
- Soient a_1, \dots, a_n des entiers naturels. Montrer que p divise le nombre

$$N = \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^p - \sum_{i=1}^n a_i^p.$$

ALG 9 (CMT). Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé sur \mathbb{R} .

- Montrer que le polynôme P' est scindé sur \mathbb{R} .
- Montrer que le polynôme $Q = P + P'$ est scindé sur \mathbb{R} . On pourra considérer la fonction $f : x \mapsto e^x P(x)$.

ALG 10 (CMT). Soit (z_n) une suite de nombres complexes, déterminée par la donnée de $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ et de la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|).$$

- Donner le module et l'argument de z_{n+1} en fonction de ceux de z_n .
 - Construire géométriquement z_{n+1} en fonction de z_n .
 - Convergence et limite de la suite (z_n) .
-
-

II. ALGÈBRE LINÉAIRE et RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

LIN 1 (CCINP). Soit $A = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

- Quelles sont les valeurs propres de A ?
 - En utilisant des vecteurs de \mathbb{R}^{2n} écrits sous la forme $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ avec $U \in \mathbb{R}^n$ et $V \in \mathbb{R}^n$, caractériser les sous-espaces propres de A et donner leurs dimensions.
 - La matrice A est-elle diagonalisable ?
-

LIN 2 (CCINP). Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Calculer le polynôme caractéristique χ_M .

À quelle condition sur ce polynôme χ_M la matrice M est-elle diagonalisable ?

LIN 3 (CCINP). Calculer le déterminant d'ordre $n + 1$:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 \end{vmatrix}.$$

LIN 4 (CCINP). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 = A + I_n$. Montrer que A est diagonalisable sur le corps des complexes, en déduire que $\det A > 0$.

LIN 5 (CCINP). Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Quel est le rang de A ? Quelle est la dimension de $\text{Ker}(A)$?
 - La matrice A est-elle diagonalisable ?
 - Quelle est la multiplicité de la valeur propre 0 ?
 - Montrer qu'il existe un réel $\lambda > 1$ tel que $\text{Sp}(A) = \{0, \lambda, 1 - \lambda\}$.
 - Trouver un polynôme annulateur de A , de degré trois.
-

LIN 6 (CMT). Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -3 & 2 & -5 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Préciser le rang de A , son noyau. Soit $B = E_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe $P \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$, et expliciter une telle matrice P .

LIN 7 (CMT). Soit $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$, de rang $2n$, telle que $A^3 + A = 0$. Montrer que A est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$.

LIN 8 (ENSEA). Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $f(M) = M + \text{tr}(M) I_n$ pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- Montrer que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
 - Déterminer le noyau de f , son rang. L'endomorphisme f est-il bijectif ?
 - Prouver la relation $f^2 - (n+2)f + (n+1)\text{id} = 0$.
 - Déterminer la réciproque f^{-1} de f .
-

LIN 9 (CMT). Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n . Montrer l'équivalence entre

- $E = \text{Ker } u \oplus \text{Im } u$
 - il existe $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$, \mathcal{B} base de E et $A \in \text{GL}_r(\mathbb{R})$ tels que $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
-

LIN 10 (CCINP). Soit E un espace vectoriel de dimension n , soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. On note $\mathcal{C}(p)$ l'ensemble des endomorphismes u de E qui commutent avec p ($p \circ u = u \circ p$).

- Montrer que $u \in \mathcal{C}(p)$ si et seulement si $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont stables par u .
 - Montrer que $\mathcal{C}(p)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et préciser sa dimension en fonction du rang r du projecteur p .
-

LIN 11 (Centrale). Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, qui commutent, avec B nilpotente. Montrer que $\det(I_n + B) = 1$, puis que $\det(A + B) = \det(A)$.

LIN 12 (CCMP). Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ (0) & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^{n-1} \neq 0_n$ et $A^n = 0_n$. Montrer que A est semblable à J .
 - Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nilpotente et de rang $n - 1$. Montrer que A est semblable à J .
-

LIN 13 (CMT) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Calculer le rang de A .
 - La matrice A est-elle diagonalisable ?
-

LIN 14 (Centrale). Soit \mathcal{P} une partie de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ de cardinal m , stable par produit.

a. Soit $A \in \mathcal{P}$. Montrer que $\sum_{B \in \mathcal{P}} AB = \sum_{B \in \mathcal{P}} B$.

b. Montrer que $\sum_{B \in \mathcal{P}} \text{tr}(B) \in m\mathbb{N}$.

c. Donner un exemple de telle partie \mathcal{P} avec $n = 2$ et $m \in \mathbb{N}^*$ quelconque.

LIN 15 (CCINP) On donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on considère l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad f(M) = M + \text{tr}(M) A .$$

- Montrer que f est un automorphisme si et seulement si $\text{tr}(A) \neq -1$.
- Dans cette question, on suppose $\text{tr}(A) = -1$. Déterminer $\text{Ker}(f)$. Montrer que

$$\text{Im}(f) = \text{Ker}(\text{tr}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(M) = 0\} .$$

c. On donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Discuter et résoudre l'équation

$$M + \text{tr}(M)A = N ,$$

d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

LIN 16 (Centrale). Soient f_1, \dots, f_p des formes linéaires sur un \mathbb{C} -espace vectoriel E de dimension n .

a. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes:

(1): la famille (f_1, \dots, f_p) est libre.

(2): l'application linéaire $\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}^p$, $x \mapsto \varphi(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$ est surjective.

(3): il existe une famille (x_1, \dots, x_p) de p vecteurs de E telle que le déterminant

$$\det (f_j(x_i))_{1 \leq i, j \leq p} = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_p(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1(x_p) & \cdots & f_p(x_p) \end{vmatrix}$$

est non nul.

b. Soit f une forme linéaire sur E . Montrer l'équivalence

$$f \in \text{Vect}(f_1, \dots, f_p) \iff \bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(f_i) \subset \text{Ker}(f).$$

III. ESPACES PRÉHILBERTIENS ET EUCLIDIENS

EUC 1 (CCINP). Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique. On considère le plan $H = \text{Vect}(a, b)$, avec $a = e_1 + e_2 + e_3$ et $b = e_1 - e_4$.

a. Déterminer une base orthonormale de H .

b. Écrire la matrice, relativement à la base \mathcal{B} , du projecteur orthogonal sur H .

EUC 2 (CCMP). Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E . Montrer que deux quelconques des assertions suivantes entraînent la troisième :

(a) : u est un automorphisme orthogonal ;

(b) : $u^2 = -\text{id}_E$;

(c) : $\forall x \in E \quad (x|u(x)) = 0$.

EUC 3 (CMT). On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ respectivement l'ensemble des matrices symétriques (antisymétriques) d'ordre n .

a. Montrer que $(M, N) \mapsto (M|N) = \text{tr}(M^\top N)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice. Exprimer la distance de M au sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, à l'aide des matrices M et M^\top .

d. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $d(B, \mathcal{S}_3(\mathbb{R}))$.

EUC 4 (CMT). Soit E un espace euclidien de dimension n , soit $f \in \mathcal{L}(E)$ représenté dans une base orthonormale par $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ (il y a une "antidiagonale" de 1, et le reste est nul).

- Montrer qu'il existe une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres de f .
- Valeurs propres de f , déterminant de f .
- Montrer que f est un automorphisme orthogonal, préciser ses caractéristiques.

EUC 5 (ENSEA). Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. À quelle condition la matrice M s'écrit-elle sous la forme $M = X Y^\top$, avec X et Y deux matrices-colonnes non nulles ?

EUC 6 (CMT). Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ une matrice "rectangulaire", soit λ un complexe.

- On suppose $\lambda \neq 0$. Montrer que λ est valeur propre de AA^\top si et seulement s'il est valeur propre de $A^\top A$.
- Même question avec $\lambda = 0$ et $n = p$.

EUC 7 (CCINP). Soit $u \in O(E)$, où E est un espace euclidien.

- Montrer que $(\text{Ker}(u - \text{id}_E))^\perp = \text{Im}(u - \text{id}_E)$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère l'endomorphisme $r_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} u^j$. Soit x un vecteur de E . Déterminer $\lim_{k \rightarrow +\infty} r_k(x)$.

EUC 8 (CMT). Soit f un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E . On suppose qu'il existe un réel a strictement positif tel que

$$\forall x \in E \quad \|f(x)\| = a \|x\|.$$

Montrer que $f^2 = a^2 \text{id}_E$.

EUC 9 (ENSEA). Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E , on suppose que

$$\forall x \in E \quad (u(x)|x) = 0.$$

- Montrer que u est antisymétrique, i.e. $\forall (x, y) \in E^2 \quad (u(x)|y) = -(x|u(y))$.
- Montrer que $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$.
- En considérant l'endomorphisme induit par u sur $\text{Im}(u)$, montrer que le rang de u est pair.

EUC 10 (CCMP). Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer l'existence de $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|AX_0 - Y\| = \min \{\|AX - Y\| ; X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\}$, la norme $\|\cdot\|$ étant ici la norme euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$. Prouver la relation $A^\top AX_0 = A^\top Y$.

Application. Déterminer le minimum sur \mathbb{R}^2 de

$$f : (x, y) \mapsto (x + y - 1)^2 + (x - 1)^2 + (y - 2)^2.$$

EUC 11 (Centrale). Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base d'un espace euclidien E de dimension n .

a. Montrer qu'il existe une unique famille $\mathcal{B}^* = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de vecteurs de E telle que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad (e_i | \varepsilon_j) = \delta_{i,j}$$

et montrer que \mathcal{B}^* est une base de E .

b. Comment s'expriment les coordonnées d'un vecteur x de E dans la base \mathcal{B} ? dans \mathcal{B}^* ?

c. Soit f l'endomorphisme de E tel que $f(e_i) = \varepsilon_i$ pour tout i . Montrer que $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$.

d. Montrer qu'il existe $r \in \mathcal{S}^{++}(E)$ tel que $r^2 = f$. On pose $u_i = r(e_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Que dire de la famille de vecteurs $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$?

EUC 12 (CCMP). On munit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire défini par

$$(f|g) = \int_0^1 f(t) g(t) dt.$$

Pour $f \in E$, on note $v(f)$ la primitive de f qui s'annule en 0, soit $v(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$.

a. Montrer que v est un endomorphisme de E .

b. Déterminer un endomorphisme v^* de E tel que

$$\forall (f, g) \in E^2 \quad (v(f)|g) = (f|v^*(g)).$$

Montrer l'unicité d'un tel endomorphisme v^* .

c. Déterminer les valeurs propres de $v^* \circ v$.

EUC 13 (CMT). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $B = \frac{1}{2}(A + A^\top)$.

a. Montrer que l'on peut écrire $B = PDP^\top$ avec $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale, et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

On pose alors $A' = P^\top AP$. On appelle α la plus petite valeur propre de B , et β la plus grande.

b. Montrer que A et A' ont les mêmes valeurs propres (réelles ou complexes).

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A , soit $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $A'X = \lambda X$, soit $a = \operatorname{Re}(\lambda)$.

c. Montrer que $\overline{X}^\top (A')^\top = \overline{\lambda} \overline{X}^\top$. Puis montrer que $a \overline{X}^\top X = \overline{X}^\top DX$.

d. En déduire que $\alpha \leq a \leq \beta$.

EUC 14 (CCMP). Soit E un espace euclidien de dimension n , soit \mathcal{B} une base orthonormale de E . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme, on pose $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on note u^* l'endomorphisme de E tel que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = A^\top$.

a. Montrer que $\forall (x, y) \in E^2 \quad (u(x)|y) = (x|u^*(y))$.

b. Montrer que $\operatorname{Ker}(u^*) = (\operatorname{Im}(u))^\perp$, et que $\operatorname{Im}(u^*) = (\operatorname{Ker}(u))^\perp$.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que les endomorphismes u et u^* commutent.

c. Montrer que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(u^*)$.

d. Montrer que u et u^* ont les mêmes éléments propres.

EUC 15 (CCINP).

- a. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.
 - b. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $MM^\top \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
 - c. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer l'existence de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $MM^\top = S$.
 - d. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement s'il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A^\top = SAS^{-1}$.
-
-

IV. ANALYSE cours de première année

ANA 1 (CCINP). Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \text{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$. Calculer $f'(x)$ lorsque cela est possible. En discutant selon x , simplifier l'expression de $f(x)$.

ANA 2 (CCINP). Pour n entier naturel, soit $I_n = \int_0^1 \frac{t^n + 2t^{2n}}{1+t^n+t^{2n}} dt$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n$.

ANA 3 (Centrale). Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on définit $g_t : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ par $g_t(x) = x^3 + xt - 1$.

- a. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, montrer qu'il existe un unique $u(t) \in \mathbb{R}_+$ tel que $g_t(u(t)) = 0$.
- b. Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)$.
- c. Donner un équivalent simple $q(t)$ de $u(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$, puis un équivalent de $q(t) - u(t)$.
- d. Montrer que u est une bijection continue de \mathbb{R}_+ sur un intervalle à préciser.

ANA 4 (CMT). Trouver les fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, continues, telles que

$$(\mathbf{E}) : \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3} + \int_0^1 f(x^2)^2 dx .$$

On essaiera d'écrire le nombre $\frac{1}{3}$ comme une intégrale.

V. SUITES et SÉRIES

SUI 1 (CMT). a. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, l'équation $1 + \ln(n+x) = x$ admet une unique solution dans \mathbb{R}_+ , qui sera notée u_n .

- b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
- c. Montrer que l'on a $u_n \leq n$ à partir d'un certain rang.
- d. Trouver un équivalent de u_n .

SUI 2 (CMT). Convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{R(n)}{n(n+1)}$, où $R(n)$ est le reste de la division euclidienne de l'entier n par 5. Exprimer la somme partielle $S_{5n} = \sum_{k=1}^{5n} \frac{R(k)}{k(k+1)}$ à l'aide de $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et en déduire la somme de la série. On admettra le développement asymptotique $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

SUI 3 (CMT). Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

- Étudier la suite (u_n) .
- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \right)$.
- Donner un équivalent de u_n . En déduire la nature de la série $\sum_n u_n$.

SUI 4 (CMT). On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n^2} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$. Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{u_n}$.

SUI 5 (CCINP). On donne $u_0 \in]0, 1[$ et la relation $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{u_n + u_n^2}{2}$.

- Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
- Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = 2^n u_n$ admet une limite l strictement positive.

SUI 6 (Centrale). Soit α un réel, soit $N = \max \{1, 1 + \lfloor |\alpha| \rfloor\}$. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq N} u_n$, avec $u_n = \ln \left(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n} + \alpha} \right)$.

SUI 7 (CMT). Soit p un entier naturel. Nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$, où $u_n = \frac{1}{(n+p)!} \sum_{k=1}^n k!$

SUI 8 (CMT). Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(a) = \frac{n! n^{a-1}}{a(a+1) \cdots (a+n-1)}$.

- Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \ln \left(\frac{u_{n+1}(a)}{u_n(a)} \right)$ est convergente.
 - Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n \geq 1}$ converge simplement sur \mathbb{R}_+^* vers une fonction f strictement positive.
-

SUI 9 (CCINP). Nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{(-1)^n + \sqrt{n}}$.

SUI 10 (CCINP). Nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{S_n}$, avec $S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt[k]{k}$.

SUI 11 (CCINP). Soit x un réel appartenant à l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$. Convergence et calcul de $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\cos \frac{x}{2^n}\right)$.

SUI 12 (CCMP). Soit $t \in \mathbb{R}^*$. On pose $u_n = e^{it \ln(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a. En étudiant u_{2n} et u_{3n} , montrer que la suite complexe (u_n) diverge.

b. En considérant $u_{n+1} - u_n$, montrer que la série $\sum \frac{u_n}{n}$ diverge.

VI. SUITES et SÉRIES de FONCTIONS

SSF 1 (Centrale). On pose $f_0(x) = 0$, puis $f_{n+1}(x) = \int_0^x \sqrt{t^2 + f_n(t)^2} dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que, pour tout n , la fonction f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

b. Montrer $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \quad 0 \leq f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$.

c. En déduire que la suite (f_n) admet une limite simple f , et que f est continue sur \mathbb{R} .

d. Montrer que f est solution de l'équation différentielle non linéaire $y' = \sqrt{x^2 + y^2}$.

SSF 2 (CMT). Calculer $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$ en précisant le mode de convergence de la série de fonctions. Calculer ensuite les intégrales

$$I_p = \int_0^\pi S(x) \cos(px) dx \quad (p \in \mathbb{N}).$$

SSF 3 (CCMP)

Soit α un réel. Pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$.

a. Pour quels réels α la suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?

b. Pour quels réels α la série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?

SSF 4 (CCMP). Soit $\alpha > 1$.

- a. Ensemble de définition D de la fonction $S_\alpha : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^\alpha x^2}$. La fonction S_α est-elle continue sur D ?
- b. Donner un équivalent de $S_\alpha(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.
- c. La fonction S_α est-elle intégrable sur \mathbb{R}_+^* ? Si oui, donner la valeur de son intégrale.

Pour tout réel $s > 1$, on pourra poser $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ (fonction zéta de Riemann).

SSF 5 (CCINP). On pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et $\xi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

- a. Déterminer les ensembles de définition de ζ et de ξ .
- b. Montrer que ζ et ξ sont continues sur leurs ensembles de définition respectifs.
- c. Montrer que ces fonctions sont dérivables, exprimer ζ' et ξ' .
- d. Calculer $\zeta(x) - \xi(x)$ et donner une relation entre ces fonctions.
- e. Montrer que $\zeta(x) \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$, en déduire $\xi(1)$.
-

SSF 6 (CCMP). Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par

$$f_0(t) = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0, 1] \quad f_{n+1}(t) = f_n(t) + \frac{1}{2} (t - f_n(t))^2.$$

- a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0, 1] \quad 0 \leq f_n(t) \leq f_{n+1}(t) \leq \sqrt{t}$.
- b. En déduire la convergence simple sur $[0, 1]$ de la suite de fonctions (f_n) . Quelle est la fonction limite, notée f ?
- c. Étudier la convergence uniforme.
- d. En déduire que la fonction $x \mapsto |x|$ est limite uniforme sur $[-1, 1]$ d'une suite de fonctions polynomiales.
-
-

VII. SÉRIES ENTIÈRES

SEE 1 (CMT). On pose $a_0 = 1$ et, pour tout n , $a_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k$. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

- a. Montrer que $0 \leq a_n \leq n!$ pour tout n .
- b. Qu'en déduit-on sur le rayon de convergence R de f ?
- c. Expliciter f en trouvant une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par cette fonction.
-

SEE 2 (CCINP). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ si $x \neq 0$, et $f(0) = \frac{1}{2}$.

- Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .
 - Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout entier naturel n .
-

SEE 3 (CCINP). Soit $a_n = \int_0^1 \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^n dt$. Montrer que $\frac{1}{n+1} \leq a_n \leq 1$. Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n x^n$.

SEE 4 (CCINP). Développer en série entière la fonction $f : x \mapsto \int_0^\pi \cos(x \cos t) dt$.

SEE 5 (CCINP).

- Décomposer en éléments simples $f(x) = \frac{1}{-x^2 + x + 2}$.
 - Développer f en série entière en précisant le rayon de convergence.
 - Donner le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.
-

SEE 6 (CMT). Rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$, avec $a_n = \operatorname{Arccos}\left(1 - \frac{1}{n^p}\right)$, où p est un réel strictement positif donné.

SEE 7 (CMT).

- Développement en série entière de $F(x) = \int_0^x \frac{1-t}{1+t^2} dt$.
 - Exprimer $F(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.
 - Convergence et somme de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.
-

SEE 8 (CCINP). Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k u_{n-k}$.

- Montrer que, pour tout n entier naturel, $0 \leq \frac{u_n}{n!} \leq 4^{n+1}$.
 - Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$. Montrer que f est bien définie sur $\left] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right[$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle non linéaire $y' = y^2$.
 - En déduire u_n pour tout n .
-
-
-

VIII. ESPACES VECTORIELS NORMÉS

EVN 1 (CCINP). Soit $E = \left\{ A(x, y) = \begin{pmatrix} x & 3y \\ x & 4y \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- L'ensemble $E_1 = \{A \in E \mid \text{rg}(A) \leq 1\}$ est-il fermé? Est-il borné?
- L'ensemble $E_2 = E \cap \text{O}_2(\mathbb{R})$ est-il fermé? Est-il borné?
- Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \text{tr}(A(x, y)^2)$. L'application φ admet-elle un extremum local?

EVN 2 (CMT). Soit l'espace vectoriel $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0, \pi], \mathbb{R}) \mid f(0) = f(\pi) = 0\}$. Pour $f \in E$, on pose

$$N(f) = \max_{x \in [0, \pi]} |f''(x) - f(x)|.$$

Montrer que N est une norme sur E .

EVN 3 (CCINP). Pour $f \in E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, on pose $N(f) = \int_0^1 e^t |f(t)| dt$.

- Montrer que N est une norme sur E .
- On définit une suite de fonctions (f_n) , $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Étudier la convergence de la suite (f_n) dans l'espace vectoriel normé (E, N) , et dans l'e.v.n. (E, N_∞) .

- Existe-t-il des constantes strictement positives C et C' telles que $C N \leq N_\infty \leq C' N$?

IX. INTÉGRATION

INT 1 (Centrale). On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (**intégrale de Gauss**).

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2 - \frac{x^2}{t^2}} dt$ lorsque cette intégrale converge.

- Quel est l'ensemble de définition de F ?
 - Soit $x > 0$. Montrer que $\varphi : t \mapsto t - \frac{x}{t}$ est une bijection de \mathbb{R}_+^* vers \mathbb{R} , et expliciter la bijection réciproque.
 - À l'aide de $u = \varphi(t)$, calculer $F(x)$ pour $x > 0$.
 - En déduire une expression de $F(x)$ pour tout x réel.
-

INT 2 (CMT). On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \operatorname{Arctan}(t) dt$.

a. Montrer que f est bien définie sur \mathbb{R}_+^* .

b. Montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$.

INT 3 (CCINP). Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n) dt$.

a. Montrer que $\forall u \in]-1, +\infty[\quad \ln(1+u) \leq u$.

b. Montrer que $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du$.

c. On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{12n}$.

INT 4 (Centrale). Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles bornées. Soient c et d deux réels tels que $c < d$. On suppose que

$$\forall x \in [c, d] \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = 0.$$

a. Énoncer le théorème de convergence dominée.

b. Montrer que, pour tout entier n , il existe un réel φ_n tel que

$$a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(nx + \varphi_n).$$

c. Calculer $I_n = \int_c^d (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))^2 dx$.

d. Montrer que, à partir d'un certain rang, on a $I_n \geq \frac{(a_n^2 + b_n^2)(d-c)}{4}$.

e. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) tendent vers 0.

INT 5 (CCMP). Soient a et b deux réels strictement positifs.

a. Montrer que $f : x \mapsto \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x}$ est intégrable sur $]0, 1]$.

b. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du$ est convergente.

c. Montrer que l'intégrale $I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} dx$ est convergente.

d. Calculer $I(a, b)$.

INT 6 (CCINP). Existence et calcul de $\int_0^1 x \left[\frac{1}{x} \right] dx$. On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, et que la notation $[x]$ représente la partie entière d'un réel x .

INT 7 (CCINP).

a. Montrer que $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \frac{2t}{\pi} \leq \sin t$.

b. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$, avec $I_n = \int_0^{\frac{n\pi}{2}} e^{-n \sin \frac{x}{n}} dx$.

INT 8 (CCINP). Justifier l'égalité

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

INT 9 (CCINP). Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2 + t^2} dt$.

a. Ensemble de définition de f .

b. Calculer $f(1)$.

c. Par un changement de variable approprié, en déduire $f(x)$.

INT 10 (CCINP). Soit $f_n(x) = \begin{cases} x \left(1 - \frac{\lfloor x \rfloor}{n}\right)^n & \text{si } x < n \\ 0 & \text{si } x \geq n \end{cases}$. Trouver la limite de $f_n(x)$

pour n tendant vers l'infini. Trouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$.

INT 11 (CMT). a. Soit $a \in]-1, +\infty[$. Montrer que

$$\int_0^\pi \frac{dx}{1 + a \sin^2 x} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + a \sin^2 x} = \frac{\pi}{\sqrt{a+1}}.$$

On pourra poser $t = \tan x$.

b. Soit α un réel strictement positif. À quelle condition sur α la série de terme général

$$u_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dx}{1 + x^\alpha \sin^2 x}$$

est-elle convergente ?

INT 12 (CCINP). Montrer l'existence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\operatorname{sh} x}$. Montrer que

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}.$$

INT 13 (CCINP). Soit a un réel, soit l'application $f : x \mapsto \frac{\sin(ax)}{e^x - 1}$.

a. Montrer que f est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

b. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$.

INT 14 (CMT). On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$.

- Ensemble de définition de f .
 - Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur D_f .
 - Donner un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
 - Donner un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 0^+ .
-

INT 15 (CCMP). Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue. Comparer les natures de l'intégrale généralisée

$$J = \int_0^1 \frac{f(t)}{1-t} dt \text{ et de la série } \sum_{n \geq 0} \int_0^1 t^n f(t) dt.$$

INT 16 (ENSEA). On admet la relation $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du = \frac{\pi}{2}$.

$$\text{On pose } f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{t^2(t^2 + 1)} dt.$$

- Montrer que f est définie et de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .
 - Prouver la relation $\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) - f(x) = \frac{\pi}{2}(1 - |x|)$.
 - En déduire l'expression de $f(x)$.
-

INT 17 (Centrale). Calculer, après avoir justifié son existence, $I = \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \right) dx$.

INT 18 (Centrale). Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

- Montrer que, pour tout $k \geq 2$, on a

$$\frac{f(k-1) + f(k)}{2} = \int_{k-1}^k f(x) dx + \int_{k-1}^k \left(x - (k-1) - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx.$$

- Montrer que, pour m et n entiers naturels avec $n > m \geq 1$, on a

$$\sum_{k=m+1}^{n-1} f(k) = \int_m^n f(x) dx - \frac{f(m) + f(n)}{2} + \int_m^n \left(x - [x] - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx.$$

- En déduire que

$$\int_1^{+\infty} \frac{x - [x] - \frac{1}{2}}{x} dx = \frac{1}{2} \ln(2\pi) - 1.$$

X. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

EQD 1 (CMT). Soit **(E)** : $x^2(x+1)y'' + x(x-1)y' + y = 0$.

- Déterminer les solutions de **(E)** développables en série entière.
 - Résoudre **(E)**.
-

EQD 2 (CCINP). a. Résoudre $y'' + y = \cos x$.

- Trouver les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe \mathcal{C}^2 , telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) + f(-x) = x + \cos x .$$

EQD 3 (CMT). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , soit $g = f + f'$.

- Résoudre l'équation différentielle **(E)** : $y' + y = g$ (exprimer y à l'aide d'une intégrale).
 - On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
 - On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l$, avec l réel. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.
-

EQD 4 (CCINP). Soit l'équation différentielle **(E)** : $(1-x)y'' + (x-3)y' + y = 0$.

- Montrer qu'il existe une solution de **(E)**, DSE en 0, telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.
 - Résoudre **(E)**.
-

EQD 5 (ENSEA). Soit l'équation différentielle

$$\textbf{(E)} \quad : \quad x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y - 1 = 0 .$$

- Chercher une solution de **(E)** développable en série entière sur \mathbb{R} .
 - Vérifier que $y = -\frac{1}{x^2}$ est solution de **(E)** sur \mathbb{R}_+^* .
 - Résoudre **(E)** sur \mathbb{R}_+^* .
-

EQD 6 (CCINP). Résoudre, sur \mathbb{R}_+^* , l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x} .$$

XI. CALCUL DIFFÉRENTIEL

CCD 1 (CCINP). Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = x^2y + \ln(1+y^2)$. Déterminer les extremums globaux et les extremums locaux de f .

CCD 2 (CCINP). On pose $f(x, y) = \frac{x^3y^2}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, et $f(0, 0) = 0$. Montrer que l'application f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

CCD 3 (CCMP). Soit $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, soit $\rho : U \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \|x\|^2$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne standard.

- a. Montrer que ρ est de classe \mathcal{C}^2 sur U et préciser ses dérivées partielles d'ordre deux.
- b. Soit $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 . Soit $f : \begin{cases} U \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto g(\rho(x)) = g(\|x\|^2) \end{cases}$. Déterminer les fonctions g telles que $\Delta f = 0$, où Δ est le laplacien.

CCD 4 (CMT). En utilisant les coordonnées polaires, résoudre, sur l'ouvert $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, les équations aux dérivées partielles

$$(1) \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 1 ;$$

$$(2) \quad x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 .$$

Montrer qu'il existe une unique solution de (1) sur U vérifiant $\forall y \in \mathbb{R} \quad f(1, y) = y$ et l'expliciter.

CCD 5 (CCMP). On pose $S(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin t) dt$.

- a. Montrer que S est définie et de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .
- b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad x S''(x) + S'(x) + x S(x) = 0$.
- c. Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Pour $(x, y) \in U$, on pose $\varphi(x, y) = S(\sqrt{x^2 + y^2})$. Montrer que φ est de classe \mathcal{C}^2 sur U et que $\Delta \varphi + \varphi = 0$, où Δ est le laplacien.

XII. PROBABILITÉS

PRO 1 (CCINP). Une urne contient initialement une boule noire et une boule blanche. On tire une boule dans l'urne. Si elle est noire, le jeu est terminé. Si elle est blanche, on remet la boule blanche tirée ainsi qu'une nouvelle boule blanche dans l'urne, et on recommence jusqu'à obtention de la boule noire. On note X le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule noire.

Quel est l'ensemble des valeurs prises par X ? Quelle est la loi de X ? Est-ce bien une variable aléatoire discrète ? La variable X est-elle d'espérance finie ?

PRO 2 (CMT). Des usagers d'internet effectuent des demandes de connexion à un opérateur. Le nombre X de demandes pendant un intervalle de temps de durée Δt suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. La probabilité qu'une demande aboutisse est $p \in]0, 1[$. Soit Y la variable aléatoire correspondant au nombre de demandes qui aboutissent pendant l'intervalle de temps Δt .

- a. Calculer $P(Y = k | X = j)$ pour $(j, k) \in \mathbb{N}^2$.
- b. Montrer que $\{Y = n\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (\{X = k + n\} \cap \{Y = n\})$. Déterminer la loi de Y .

PRO 3 (CCMP). Soit T une variable aléatoire telle que $T(\Omega) = \llbracket 1, k \rrbracket$. On considère $k + 1$ variables aléatoires X_0, \dots, X_k à valeurs dans \mathbb{N} , de même loi. On suppose que les variables T, X_0, \dots, X_k sont mutuellement indépendantes. On définit enfin une variable aléatoire Y par

$$\forall \omega \in \Omega \quad Y(\omega) = \sum_{i=0}^{T(\omega)} X_i(\omega).$$

Montrer que, si X_0 est d'espérance finie, alors Y aussi. Donner alors une expression de $E(Y)$ en fonction de $E(T)$ et $E(X_0)$.

PRO 4 (CMT). Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre p . On pose $q = 1 - p$ et $Y = |X_1 - X_2|$.

- Calculer $P(Y = 0)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $P(X_1 - X_2 = n) = \frac{p q^n}{1 + q}$. En déduire la loi de Y .
 - Montrer que Y est d'espérance finie et calculer $E(Y)$.
 - Montrer que $E((X_1 - X_2)^2) = 2V(X_1)$. Montrer que Y est de variance finie, calculer $V(Y)$.
-

PRO 5 (CCINP). On considère un détecteur de particules ayant une probabilité de détection de chaque particule égale à $p \in]0, 1[$. On note N et S les variables aléatoires qui comptent respectivement le nombre de particules arrivant sur le capteur et le nombre de particules détectées. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ .

- Soient s et n entiers naturels. Calculer $P(S = s | N = n)$, puis $P(S = s, N = n)$. En déduire la loi de S .
 - Sans calcul, donner la loi de $N - S$.
 - Les variables S et $N - S$ sont-elles indépendantes ?
 - Les variables N et S sont-elles indépendantes ?
-

PRO 6 (Centrale). Soit $R \in \mathbb{N}^*$. Un garçon et sa petite sœur jouent à un jeu de devinettes. Chaque jour, le grand frère pose une devinette à sa sœur et cette dernière y répond correctement avec une probabilité $\frac{1}{3}$. Le jeu s'arrête lorsque la sœur répond correctement R jours consécutifs aux devinettes de son frère. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, p_n la probabilité que le jeu de devinettes s'arrête au n -ième jour.

- Déterminer p_R
- On considère dans cette question que le jeu ne dépasse pas R jours. On définit une variable aléatoire Z comme suit: Lorsque la sœur répond correctement R jours d'affilée, Z prend la valeur 0. Autrement, Z prend le numéro du jour où la sœur a répondu faux pour la première fois. Identifier la loi de Z

On suppose maintenant $R \geq 2$.

- Montrer que $\forall n \geq R \quad p_{n+1} = \sum_{i=0}^{R-1} \frac{2}{3^{i+1}} p_{n-i}$.
 - Quelle est la probabilité que le jeu se termine ?
-

PRO 7 (CCINP). Soient $\alpha \in]0, 1[$ et $\beta > 0$. Pour $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, on pose

$$p_{i,j} = \begin{cases} \frac{\beta^i e^{-\beta} \alpha^j (1-\alpha)^{i-j}}{j! (i-j)!} & \text{si } j \leq i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

a. Vérifier que $(p_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est une distribution de probabilités sur \mathbb{N}^2 .

On considère un couple (X, Y) de variables aléatoires sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) tel que

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2 \quad P(X = i, Y = j) = p_{i,j} .$$

b. Donner les lois marginales de X et Y .

c. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

d. Quelle est la loi de la variable $Z = X - Y$?

e. Soient $j \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$. Calculer $P(Y = j | Z = k)$. Que remarque-t-on ?

PRO 8 (CCINP). Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . On suppose que X suit la loi binomiale de paramètres n et p avec $p \in]0, 1[$, et que Y suit la loi uniforme sur l'intervalle entier $[[0, n]]$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si } X(\omega) \neq 0 \\ Y(\omega) & \text{si } X(\omega) = 0 \end{cases} .$$

Déterminer la loi et l'espérance de Z .

PRO 9 (CCINP). Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur (Ω, \mathcal{A}, P) , telle que, pour tout i , on ait $X_i \sim \mathcal{B}(p_i)$, avec $p_i \in]0, 1[$. On suppose que

$$\rho_n = \frac{p_1 + \dots + p_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \rho .$$

On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Calculer l'espérance et la variance de $\frac{S_n}{n}$.

b. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} V\left(\frac{S_n}{n}\right) = 0$.

c. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \rho_n\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0$.

d. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \rho\right| \geq \varepsilon\right) = 0$.