

**Exercice 1 (IMT 2025) :**

On étudie les matrices  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant la relation (1) :

$$\chi_A(X) = \prod_{k=1}^n (X - a_{k,k})$$

c'est-à-dire les matrices dont les valeurs propres sont exactement les coefficients diagonaux de la matrice.

1. On pose  $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Ces deux matrices vérifient-elles la condition (1) ?

2. Soit  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ . On pose  $M_{u,v} = \begin{pmatrix} u & v & v \\ v & u & v \\ v & v & u \end{pmatrix}$ . Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $M_{u,v}$  vérifie la condition (1).

3. Quelles sont les matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  qui vérifient (1) ?

**Exercice 1 (IMT 2025) :****Quelques indications :**

- 1. Pour  $M_1$ , un calcul direct du déterminant par blocs est très rapide. Pour  $M_2$ , inutile de vous lancer dans un calcul long : remarquez que la matrice est pleine de 1. Son rang et sa trace vous donnent ses valeurs propres en une seconde.
- 2. Utilisez la décomposition classique des matrices circulantes symétriques : exprimez  $M_{u,v}$  en fonction de  $I_3$  et de la matrice universelle  $J_3$  (remplie de 1). Le décalage spectral vous évitera de fastidieux calculs de polynômes.
- 3. En dimension 2, le polynôme caractéristique possède une formule universelle ultra-classique liée à la trace et au déterminant :  $\chi_A(X) = X^2 - \text{Tr}(A)X + \det(A)$ .

**Solution :**

1. On peut répondre à cette question extrêmement rapidement, en effet on voit facilement que  $M_1$  est de rang 3 donc inversible et ainsi 0 n'est pas valeur propre. Pour  $M_2$  la matrice est de rang 1 et donc non inversible ie 0 est dans le spectre. Si on veut se tourner vers des calculs voici ce que l'on peut faire : Étudions les deux matrices proposées :

- Cas de  $M_1$  : Les coefficients diagonaux de  $M_1$  sont 1, 0, 0. Le membre de droite de la relation (1) vaut donc :

$$P(X) = (X - 1)(X - 0)(X - 0) = X^2(X - 1)$$

Calculons maintenant son polynôme caractéristique  $\chi_{M_1}(X) = \det(XI_3 - M_1)$  :

$$\chi_{M_1}(X) = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = (X-1) \begin{vmatrix} X & -1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = (X-1)(X^2-1) = (X-1)^2(X+1)$$

On constate que  $\chi_{M_1}(X) \neq X^2(X-1)$  (les racines et leurs multiplicités ne correspondent pas). La matrice  $M_1$  ne vérifie pas la condition (1).

- Cas de  $M_2$  : Les coefficients diagonaux de  $M_2$  sont 1, 1, 1. Le membre de droite de la relation (1) vaut donc :

$$P(X) = (X - 1)^3$$

La matrice  $M_2$  est la matrice  $J_3$  dont toutes les colonnes sont identiques et non nulles. Elle est donc de rang 1. Par le théorème du rang, la dimension de son noyau (l'espace propre associé à la valeur propre 0) est égale à  $3 - 1 = 2$ . Ainsi, 0 est valeur propre de multiplicité au moins 2. De plus, la somme des valeurs propres étant égale à la trace, la dernière valeur propre  $\lambda$  vérifie  $0 + 0 + \lambda = \text{Tr}(M_2) = 3$ , d'où  $\lambda = 3$ . On en déduit son polynôme caractéristique :  $\chi_{M_2}(X) = X^2(X - 3)$ . Comme  $X^2(X - 3) \neq (X - 1)^3$ , la matrice  $M_2$  ne vérifie pas la condition (1).

2. Exprimons la matrice  $M_{u,v}$  sous la forme :

$$M_{u,v} = (u - v)I_3 + vJ_3 \quad \text{où } J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On sait d'après la question précédente que le spectre de  $J_3$  est constitué de la valeur propre 3 (simple) et de 0 (double). Par propriété du décalage spectral, les valeurs propres de  $M_{u,v}$  s'obtiennent immédiatement :

- $\lambda_1 = (u - v) + v \times 3 = u + 2v$  (de multiplicité 1)
- $\lambda_2 = (u - v) + v \times 0 = u - v$  (de multiplicité 2)

Le polynôme caractéristique de  $M_{u,v}$  est donc :  $\chi_{M_{u,v}}(X) = (X - (u + 2v))(X - (u - v))^2$ . Par ailleurs, les coefficients diagonaux de  $M_{u,v}$  étant tous égaux à  $u$ , le membre de droite de la condition (1) est  $(X - u)^3$ . La condition (1) est donc vérifiée si et seulement si :

$$(X - (u + 2v))(X - (u - v))^2 = (X - u)^3$$

Par unicité de la décomposition d'un polynôme en facteurs irréductibles, cela impose que toutes les racines du membre de gauche soient égales à  $u$  :

$$\begin{cases} u + 2v = u \\ u - v = u \end{cases} \iff v = 0$$

**Conclusion :** La condition nécessaire et suffisante pour que  $M_{u,v}$  vérifie la relation (1) est  $v = 0$  (la matrice est alors une matrice diagonale scalaire  $uI_3$ ).

3. Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Les coefficients diagonaux de  $A$  sont  $a$  et  $d$ , le produit associé vaut donc :

$$P(X) = (X - a)(X - d) = X^2 - (a + d)X + ad$$

Or, on sait que le polynôme caractéristique de toute matrice de taille 2 s'exprime par :

$$\chi_A(X) = X^2 - \text{Tr}(A)X + \det(A) = X^2 - (a + d)X + (ad - bc)$$

La matrice  $A$  vérifie la condition (1) si et seulement si  $\chi_A(X) = P(X)$ , ce qui donne par identification du terme constant :

$$ad - bc = ad \iff bc = 0$$

L'équation  $bc = 0$  se traduit par  $b = 0$  ou  $c = 0$ . Conclusion : Les matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  qui vérifient la condition (1) sont exactement les matrices triangulaires (supérieures ou inférieures).

**Remarque 1.** Cet exercice cache en réalité une propriété fondamentale des matrices. Une classe évidente de matrices qui vérifie toujours la condition (1) est celle des matrices triangulaires (puisque leurs coefficients diagonaux sont trivialement leurs valeurs propres). La question 3 montre qu'en dimension 2, cette condition caractérise exactement les matrices triangulaires. Attention cependant à ne pas généraliser trop vite en dimension supérieure ! En dimension  $n \geq 3$ , il existe des matrices qui vérifient la relation (1) sans être triangulaires (par exemple en intégrant des blocs nilpotents bien placés hors de la diagonale).

**Exercice 2 (IMT 2025) :**

Pour tout  $x > 0$ , on pose  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+x)}$ .

1. Montrer que  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Déterminer  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  vérifiant  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ .

**Exercice 2 (IMT 2025) :**

**Quelques indications :**

- 1. Pour justifier la bonne définition à  $x > 0$  fixé, il suffit de majorer le terme général par celui d'une série numérique de référence bien connue (ici, la série exponentielle) pour prouver la convergence absolue.
- 2. Pour obtenir le développement asymptotique, la mauvaise idée serait d'essayer d'appliquer une formule de Taylor. La bonne méthode est de chercher l'équivalent des restes successifs. Formez l'expression  $xf(x)$  et faites apparaître l'astuce algébrique classique  $\frac{x}{n+x} = 1 - \frac{n}{n+x}$ . Pour intervertir la limite en  $+\infty$  et la somme infinie, pensez au Théorème de Convergence Dominée (version séries / intégration par rapport à la mesure de comptage).

**Solution :**

1. Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Pour tout entier naturel  $n$ , posons  $u_n(x) = \frac{1}{n!(n+x)}$ . Puisque  $x > 0$  et  $n \geq 0$ , on a  $n+x \geq x > 0$ , donc tous les termes de la suite  $(u_n(x))$  sont strictement positifs. Regardons le comportement pour  $n \geq 1$ . Comme  $n+x \geq 1$ , on peut écrire la majoration évidente suivante :

$$0 < u_n(x) = \frac{1}{n!(n+x)} \leq \frac{1}{n! \times 1} = \frac{1}{n!}$$

On reconnaît à droite le terme général de la série exponentielle  $\sum \frac{1}{n!}$ , dont on sait qu'elle converge (sa somme vaut  $e$ ). Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série  $\sum u_n(x)$  converge. Le premier terme  $u_0(x) = \frac{1}{x}$  étant bien défini, on conclut que la fonction  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

2. On cherche un développement asymptotique de la forme  $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$  quand  $x \rightarrow +\infty$ . Cela équivaut à écrire  $xf(x) = a + \frac{b}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ . Commençons par étudier  $xf(x)$ . Par linéarité de la somme convergente, on a :

$$xf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{n!(n+x)}$$

On utilise l'astuce algébrique qui consiste à faire apparaître  $(n+x)$  au numérateur :

$$\frac{x}{n+x} = \frac{(n+x) - n}{n+x} = 1 - \frac{n}{n+x}$$

On réinjecte cette décomposition dans notre série :

$$xf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left( 1 - \frac{n}{n+x} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!(n+x)}$$

La première somme est usuelle et vaut  $e$ . Dans la deuxième somme, le terme pour  $n = 0$  est nul. On peut donc commencer la sommation à 1 et simplifier le  $n$  avec la factorielle ( $n! = n \times (n-1)!$ ) :

$$xf(x) = e - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!(n+x)}$$

Posons alors la fonction reste  $R(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!(n+x)}$ . L'équation devient  $xf(x) = e - R(x)$ . L'objectif est de trouver un équivalent de  $R(x)$  quand  $x \rightarrow +\infty$ . Isolons  $xR(x)$  :

$$xR(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{(n-1)!(n+x)}$$

Appliquons le Théorème de Convergence Dominée (TCD) sur l'intervalle  $I = [1, +\infty[$ . Posons  $v_n(x) = \frac{x}{(n-1)!(n+x)}$ .

- **Convergence simple** : Pour tout  $n \geq 1$  fixé,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{n+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+n/x} = 1$ . Donc la suite de fonctions  $(v_n)$  converge simplement sur  $I$  vers  $L_n = \frac{1}{(n-1)!}$ .
- **Domination** : Pour tout  $x \in I$  et tout  $n \geq 1$ , on a  $x \leq n+x$ , ce qui implique  $\frac{x}{n+x} \leq 1$ . On en déduit la majoration :

$$|v_n(x)| = \frac{x}{n+x} \cdot \frac{1}{(n-1)!} \leq \frac{1}{(n-1)!} = \varphi_n$$

- **Sommabilité** : La suite dominante  $(\varphi_n)$  est indépendante de  $x$ , et la série  $\sum \varphi_n$  converge (c'est à nouveau la série exponentielle :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e$ ).

Toutes les hypothèses du TCD étant vérifiées, on peut intervertir la limite et la somme infinie :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xR(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} v_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e$$

Cela signifie mathématiquement que  $xR(x) = e + o(1)$ , ou de manière équivalente,  $R(x) = \frac{e}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ .

Il ne reste plus qu'à remonter nos calculs dans l'expression initiale de  $xf(x)$  :

$$xf(x) = e - \left( \frac{e}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) = e - \frac{e}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

En divisant toute la ligne par  $x$ , on obtient le développement asymptotique final :

$$f(x) = \frac{e}{x} - \frac{e}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Par identification avec la formule demandée par l'énoncé, on conclut que  $a = e$  et  $b = -e$ .

**Remarque 2.** Lorsqu'on vous demande le comportement asymptotique d'une série de fonctions  $\sum u_n(x)$ , il faut être extrêmement rigoureux sur la gestion des "petits o". Une fois le premier terme trouvé (ici  $e/x$ ), il ne faut surtout pas faire un développement limité à l'intérieur de la somme pour trouver le terme suivant ! Écrire un  $o(1/x^2)$  à l'intérieur de la somme infinie donnerait un  $\sum o(1/x^2)$ , ce qui n'a aucun sens mathématique strict sans preuve d'uniformité (on ne peut pas sommer une infinité de restes de DL à la volée).

La méthode "béton" consiste à :

1. Isoler le terme principal par des manipulations algébriques.
2. Définir une fonction "Reste" formelle pour la série amputée de ce terme.
3. Multiplier ce reste par la puissance de  $x$  adéquate.
4. Appliquer à nouveau le Théorème de Convergence Dominée sur cette nouvelle expression globale.

**Exercice 1 (IMT 2025) :**

Soit  $a > 0$  fixé. On pose  $M = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ a^2 & 0 & 1 \\ a^3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $M$  admet une unique valeur propre réelle  $r$ .  
On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $s_n = \text{tr}(M^n)$ .
2. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_n}{r^n}$ .

**Exercice 1 (IMT 2025) :****Quelques indications :**

- 1. Commencez par calculer le polynôme caractéristique  $\chi_M(X)$ . Pour prouver l'existence et l'unicité de la racine réelle sans formule explicite lourde, l'étude des variations de la fonction polynomiale associée (avec calcul de la dérivée) est la voie royale. Le théorème de la bijection fera le reste.
- 2. Le terme  $\text{tr}(M^n)$  doit déclencher un réflexe : dans  $\mathbb{C}$ , la trace d'une puissance de matrice est la somme des puissances de ses valeurs propres. Pour trouver la limite, factorisez par  $r^n$  et utilisez les relations coefficients-racines sur  $\chi_M(X)$  pour comparer le module des racines complexes avec la racine réelle  $r$ .

**Solution :**

1. On commence par calculer le polynôme caractéristique de la matrice  $M$ .

$$\chi_M(X) = \det(XI_3 - M) = \begin{vmatrix} X - a & -1 & 0 \\ -a^2 & X & -1 \\ -a^3 & 0 & X \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la dernière colonne (ou en utilisant la règle de Sarrus), on obtient :

$$\chi_M(X) = X \begin{vmatrix} X - a & -1 \\ -a^2 & X \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} X - a & 0 \\ -a^3 & X \end{vmatrix}$$

$$\chi_M(X) = X(X(X - a) - a^2) + 1(-a^3) = X^3 - aX^2 - a^2X - a^3$$

Pour étudier le nombre de racines réelles, posons la fonction polynomiale  $P(X) = X^3 - aX^2 - a^2X - a^3$ . La fonction  $P$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée vaut :

$$P'(X) = 3X^2 - 2aX - a^2$$

C'est un polynôme du second degré dont le discriminant réduit est  $\Delta' = (-a)^2 - 3(-a^2) = 4a^2 > 0$  (car  $a > 0$ ).  $P'$  admet donc deux racines réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{a - 2a}{3} = -\frac{a}{3} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{a + 2a}{3} = a$$

Comme le coefficient dominant est positif ( $3 > 0$ ),  $P$  est strictement croissant sur  $]-\infty, -a/3]$ , strictement décroissant sur  $[-a/3, a]$ , et strictement croissant sur  $[a, +\infty[$ .

Évaluons les extrema locaux de  $P$  :

- Le minimum local est atteint en  $X = a$  :  $P(a) = a^3 - a^3 - a^3 - a^3 = -2a^3 < 0$  (puisque  $a > 0$ ).

- Le maximum local est atteint en  $X = -a/3$  :  $P(-a/3) = -\frac{a^3}{27} - a\frac{a^2}{9} - a^2\left(-\frac{a}{3}\right) - a^3 = a^3\left(-\frac{1}{27} - \frac{3}{27} + \frac{9}{27} - \frac{27}{27}\right) = -\frac{22}{27}a^3 < 0$ .

Puisque le maximum local est strictement négatif, la courbe représentative de  $P$  reste strictement en dessous de l'axe des abscisses sur tout l'intervalle  $] -\infty, a]$ . Il n'y a donc aucune racine réelle sur cet intervalle. Sur l'intervalle  $[a, +\infty[$ , la fonction  $P$  est continue, strictement croissante, avec  $P(a) < 0$  et  $\lim_{X \rightarrow +\infty} P(X) = +\infty$ . D'après le théorème de la bijection (ou corollaire du TVI), l'équation  $P(X) = 0$  admet une unique solution sur cet intervalle. Conclusion :  $M$  admet une unique valeur propre réelle, que l'on note  $r$ , et on a de plus  $r > a$ .

2. Plaçons-nous dans le corps des complexes  $\mathbb{C}$ . Le polynôme  $\chi_M$  étant de degré 3 à coefficients réels, il admet  $r$  comme racine réelle et deux racines complexes conjuguées que l'on notera  $\lambda$  et  $\bar{\lambda}$  (avec  $\lambda \notin \mathbb{R}$ ).

Les trois racines  $r, \lambda, \bar{\lambda}$  sont deux à deux distinctes, ce qui assure que la matrice  $M$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ . Il existe donc une matrice inversible  $P \in GL_3(\mathbb{C})$  telle que  $M = P \text{Diag}(r, \lambda, \bar{\lambda}) P^{-1}$ . En élevant à la puissance  $n$ , on obtient  $M^n = P \text{Diag}(r^n, \lambda^n, \bar{\lambda}^n) P^{-1}$ . Deux matrices semblables ayant la même trace, on en déduit :

$$s_n = \text{tr}(M^n) = r^n + \lambda^n + \bar{\lambda}^n$$

On cherche la limite du quotient :

$$\frac{s_n}{r^n} = 1 + \left(\frac{\lambda}{r}\right)^n + \left(\frac{\bar{\lambda}}{r}\right)^n$$

Il nous faut comparer le module de  $\lambda$  avec la valeur de  $r$ . Pour cela, utilisons les relations coefficients-racines du polynôme  $\chi_M(X) = X^3 - aX^2 - a^2X - a^3$ . Le produit des racines vaut  $(-1)^3 \times \frac{-a^3}{1} = a^3$ . On a donc :

$$r \cdot \lambda \cdot \bar{\lambda} = a^3 \iff r|\lambda|^2 = a^3$$

Or, nous avons établi à la question précédente que  $r > a > 0$ . On peut donc écrire :

$$|\lambda|^2 = \frac{a^3}{r} < \frac{a^3}{a} = a^2$$

Comme les modules et  $a$  sont positifs, cela implique  $|\lambda| < a$ . Et comme  $a < r$ , on obtient par transitivité  $|\lambda| < r$ .

Par conséquent,  $\left|\frac{\lambda}{r}\right| < 1$  et  $\left|\frac{\bar{\lambda}}{r}\right| < 1$ . Les termes  $\left(\frac{\lambda}{r}\right)^n$  et  $\left(\frac{\bar{\lambda}}{r}\right)^n$  sont des suites géométriques complexes de raison strictement inférieure à 1 en module, elles convergent donc vers 0. **Conclusion** :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_n}{r^n} = 1$ .

**Remarque 3.** Ce type d'exercice est un grand classique des oraux (Mines, Centrale, IMT). Face à un polynôme caractéristique de degré 3 sans "racine évidente" (le terme constant  $-a^3$  empêche toute factorisation triviale), beaucoup de candidats s'acharnent à chercher une racine ou évoquent les lourdes formules de Cardan. C'est un piège chronophage, l'énoncé ne demande pas "calculer la valeur propre", mais "montrer qu'elle est unique". Cela doit immédiatement vous faire basculer de l'algèbre vers l'analyse (dérivation, tableau de variations, TVI). De plus, l'utilisation des relations coefficients-racines pour lier l'information algébrique (le produit) à l'information analytique ( $r > a$ ) est l'outil indispensable pour conclure sur le comportement asymptotique.

**Exercice 2 (IMT 2025) :**

On désigne par  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des coefficients du développement en série entière de  $x \mapsto \sqrt{1-x}$  sur  $] -1, 1[$ , soit :

$$\forall x \in ] -1, 1[, \quad \sqrt{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

1. Déterminer  $a_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} a_n$  est convergente.
2. En déduire que la fonction  $x \mapsto \sqrt{1-x}$  est limite uniforme d'une suite de polynômes sur le segment  $[-1, 1]$ .

**Exercice 2 (IMT 2025) :****Quelques indications :**

- 1. Le développement de  $(1+u)^\alpha$  est une formule de cours incontournable. Exprimez  $a_n$  à l'aide de factorielles en multipliant le numérateur et le dénominateur par les termes pairs manquants. Pour l'étude de la série numérique, cherchez un équivalent de  $a_n$  à l'aide de la formule de Stirling ou de l'équivalent classique du coefficient binomial central  $\binom{2n}{n}$ , ce qui vous permettra de conclure avec les séries de Riemann.
- 2. Le mot-clé "limite uniforme d'une suite de polynômes" fait immédiatement écho aux sommes partielles de la série entière. Il faut démontrer que la série de fonctions converge *normalement* sur le segment fermé  $[-1, 1]$ , et c'est la convergence de la série des coefficients (question 1) qui vous donne la clé.

**Solution :**

1. On utilise le développement en série entière usuel de la fonction  $u \mapsto (1+u)^\alpha$  avec  $\alpha = 1/2$  et  $u = -x$ . Pour  $x \in ] -1, 1[$ , on a :

$$(1-x)^{1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) \dots (\frac{1}{2}-n+1)}{n!} (-x)^n$$

Par identification, le premier terme est  $a_0 = 1$ . Pour  $n \geq 1$ , isolons les signes négatifs au numérateur (il y en a  $n-1$ ) et descendons les puissances de 2 au dénominateur :

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1} 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n n!} (-1)^n = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n n!}$$

Pour faire apparaître des factorielles propres, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le produit des entiers pairs manquants, c'est-à-dire  $2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2) = 2^{n-1}(n-1)!$  :

$$a_n = -\frac{(2n-2)!}{2^n n! \times 2^{n-1}(n-1)!} = -\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} n! (n-1)!}$$

Ce qui s'écrit de manière plus compacte à l'aide d'un coefficient binomial :

$$a_n = -\frac{1}{n 2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1}$$

Montrons maintenant que la série  $\sum a_n$  converge. Cherchons un équivalent asymptotique de son terme général. On connaît l'équivalent classique déduit de la formule de Stirling :  $\binom{2p}{p} \sim$

$\frac{4^p}{\sqrt{\pi p}}$ . En l'appliquant avec  $p = n - 1$ , on obtient :

$$\binom{2n-2}{n-1} \sim \frac{4^{n-1}}{\sqrt{\pi(n-1)}} \sim \frac{4^{n-1}}{\sqrt{\pi n}}$$

En réinjectant cet équivalent dans l'expression de  $a_n$  :

$$a_n \sim -\frac{1}{n2^{2n-1}} \frac{4^{n-1}}{\sqrt{\pi n}} = -\frac{1}{2n \cdot 4^{n-1}} \frac{4^{n-1}}{\sqrt{\pi n}} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi n^{3/2}}}$$

Puisque  $a_n$  est de signe constant (strictement négatif pour  $n \geq 1$ ), on a  $|a_n| \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi n^{3/2}}}$ . La série  $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$  est une série de Riemann convergente car  $\alpha = 3/2 > 1$ . Par théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série  $\sum |a_n|$  converge. AINSI La série  $\sum a_n$  est absolument convergente (donc convergente).

2. Notons  $P_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n$  la suite des sommes partielles de la série entière. Ce sont bien des polynômes. Montrons que la suite de fonctions  $(P_N)_{N \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers la fonction  $f : x \mapsto \sqrt{1-x}$  sur le segment fermé  $[-1, 1]$ .

Considérons le terme général de la série de fonctions  $u_n(x) = a_n x^n$ . Pour tout  $x \in [-1, 1]$ , on a  $|x| \leq 1$ , ce qui donne la majoration universelle suivante :

$$\|u_n\|_{\infty, [-1, 1]} = \sup_{x \in [-1, 1]} |a_n x^n| = |a_n|$$

Or, nous avons démontré à la question 1 que la série numérique  $\sum |a_n|$  est convergente. Par définition, cela signifie que la série de fonctions  $\sum a_n x^n$  converge normalement sur le segment  $[-1, 1]$ .

La convergence normale impliquant la convergence uniforme, la suite de polynômes  $(P_N)$  converge uniformément sur  $[-1, 1]$  vers une fonction limite que l'on notera  $S(x)$ . Les polynômes étant continus, la limite uniforme  $S$  est nécessairement continue sur  $[-1, 1]$ . Or, sur l'intervalle ouvert  $] -1, 1[$ , l'énoncé nous indique que  $S(x) = \sqrt{1-x}$ . Les deux fonctions  $S(x)$  et  $\sqrt{1-x}$  étant continues sur le segment fermé  $[-1, 1]$  et coïncidant sur l'ouvert  $] -1, 1[$ , elles sont égales sur tout le segment  $[-1, 1]$  par passage à la limite aux bornes. **Conclusion :** La fonction  $x \mapsto \sqrt{1-x}$  est bien la limite uniforme de la suite de polynômes  $(P_N)$  sur le segment  $[-1, 1]$ .

**Remarque 4.** Cet exercice est extrêmement classique car il constitue une démonstration "constructive" du théorème d'approximation de Weierstrass pour la fonction racine carrée. Le point subtil à retenir pour les oraux : le rayon de convergence  $R$  d'une série entière garantit une convergence normale uniquement sur tout compact strictement inclus dans le disque ouvert (soit  $[-r, r]$  avec  $r < R$ ). Il ne garantit jamais rien aux bornes. Mais si, par chance (comme c'est le cas ici), l'étude de la série numérique des coefficients prouve que  $\sum |a_n| R^n$  converge, alors la convergence normale s'étend au segment fermé complet  $[-R, R]$ . C'est un argument de continuité jusqu'au bord très puissant, souvent utilisé en lien avec le théorème radial d'Abel.

**Exercice 1 (Mines 2025) :**

Soit  $n$  un entier et  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . Soient  $a_0, \dots, a_n$  des réels deux à deux distincts.

1. Montrer que  $(P|Q) = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$  définit un produit scalaire sur  $E$ .
2. Soient  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$  des réels non tous nuls.
  - (a) Déterminer la dimension de  $H = \{P \in E, \sum_{k=0}^n \alpha_k P(a_k) = 0\}$ .
  - (b) Soit  $Q \in E$ . Déterminer  $d(Q, H)$ .

**Exercice 1 (Mines 2025) :****Quelques indications :**

- 1. La symétrie, la bilinéarité et la positivité sont immédiates par les propriétés de la somme. Pour le caractère défini (séparation), rappelez-vous du lien fondamental entre le nombre de racines d'un polynôme et son degré. C'est l'argument massue dans  $\mathbb{R}_n[X]$ !
- 2.a. Identifiez l'application qui à  $P$  associe la somme  $\sum \alpha_k P(a_k)$ . C'est une forme linéaire. Son noyau est donc  $H$ . Que dire de la dimension du noyau d'une forme linéaire non nulle? (Pensez aux polynômes interpolateurs de Lagrange pour prouver qu'elle est non nulle).
- 2.b. Le but est d'exprimer la forme linéaire définissant  $H$  à l'aide du produit scalaire, c'est-à-dire trouver un polynôme  $A$  tel que  $\forall P, (A|P) = \sum \alpha_k P(a_k)$ . C'est une application concrète du théorème de représentation de Riesz. Une fois  $A$  identifié (toujours via Lagrange), utilisez la formule classique de la distance à un hyperplan.

**Solution :**

1. Montrons que l'application  $(P, Q) \mapsto (P|Q) = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$  est un produit scalaire sur  $E = \mathbb{R}_n[X]$ .

- Symétrie : Pour tous  $P, Q \in E$ ,  $(P|Q) = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k) = \sum_{k=0}^n Q(a_k)P(a_k) = (Q|P)$ .
- Bilinéarité : Par symétrie, il suffit de montrer la linéarité à gauche. Pour tous  $P_1, P_2, Q \in E$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

$$(\lambda P_1 + P_2|Q) = \sum_{k=0}^n (\lambda P_1(a_k) + P_2(a_k))Q(a_k) = \lambda \sum_{k=0}^n P_1(a_k)Q(a_k) + \sum_{k=0}^n P_2(a_k)Q(a_k) = \lambda(P_1|Q) + (P_2|Q)$$

- Positivité : Pour tout  $P \in E$ ,  $(P|P) = \sum_{k=0}^n (P(a_k))^2$ . C'est une somme de carrés de réels, donc  $(P|P) \geq 0$ .
- Caractère défini : Soit  $P \in E$  tel que  $(P|P) = 0$ . On a alors une somme de termes positifs qui est nulle :

$$\sum_{k=0}^n (P(a_k))^2 = 0 \implies \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_k) = 0$$

Le polynôme  $P$  admet donc les  $n + 1$  réels distincts  $a_0, \dots, a_n$  comme racines. Or  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , donc  $\deg(P) \leq n$ . Un polynôme de degré au plus  $n$  admettant au moins  $n + 1$  racines est nécessairement le polynôme nul. Donc  $P = 0$ .

Donc  $(P|Q)$  définit bien un produit scalaire sur  $E$ .

2. (a) Considérons l'application  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\varphi(P) = \sum_{k=0}^n \alpha_k P(a_k)$ . Par linéarité de l'évaluation,  $\varphi$  est une forme linéaire sur  $E$ . De plus, l'ensemble  $H$  n'est autre que le noyau de cette forme linéaire :  $H = \ker(\varphi)$ .

Montrons que  $\varphi$  est non nulle. Puisque les réels  $\alpha_k$  ne sont pas tous nuls, il existe au moins un indice  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$  tel que  $\alpha_j \neq 0$ . Introduisons les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux points  $(a_k)$ , notés  $L_i$  et définis par  $L_i(a_k) = \delta_{i,k}$  (symbole de Kronecker). Évaluons  $\varphi$  en  $L_j$  :

$$\varphi(L_j) = \sum_{k=0}^n \alpha_k L_j(a_k) = \alpha_j \times 1 = \alpha_j \neq 0$$

Ainsi,  $\varphi$  est une forme linéaire non nulle. Son noyau  $H$  est donc un hyperplan de  $E$ . Comme l'espace  $E = \mathbb{R}_n[X]$  est de dimension  $n + 1$ , on en déduit que :

$$\dim(H) = (n + 1) - 1 = n$$

- (b) On cherche la distance de  $Q$  à l'hyperplan  $H$ . Remarquons la ressemblance frappante entre la forme linéaire  $\varphi(P)$  et le produit scalaire  $(A|P) = \sum_{k=0}^n A(a_k)P(a_k)$ . Cherchons un polynôme  $A \in E$  tel que pour tout  $P \in E$ , on ait  $(A|P) = \varphi(P)$ . Il suffit d'avoir, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $A(a_k) = \alpha_k$ . D'après le théorème d'interpolation de Lagrange, il existe un unique polynôme  $A \in \mathbb{R}_n[X]$  vérifiant ces  $n + 1$  conditions. Il s'écrit explicitement  $A = \sum_{k=0}^n \alpha_k L_k$ .

On a donc  $H = \ker(\varphi) = \{P \in E \mid (A|P) = 0\} = (\text{Vect}(A))^\perp$ . Le vecteur  $A$  est un vecteur normal à l'hyperplan  $H$ . La formule de la distance d'un point à un hyperplan nous donne directement :

$$d(Q, H) = \frac{|(Q|A)|}{\|A\|}$$

Calculons les deux termes :

- $(Q|A) = \varphi(Q) = \sum_{k=0}^n \alpha_k Q(a_k)$
- $\|A\|^2 = (A|A) = \sum_{k=0}^n (A(a_k))^2 = \sum_{k=0}^n \alpha_k^2$

On obtient finalement la distance cherchée :

$$d(Q, H) = \frac{|\sum_{k=0}^n \alpha_k Q(a_k)|}{\sqrt{\sum_{k=0}^n \alpha_k^2}}$$

**Remarque 5.** Cet exercice illustre magnifiquement le théorème de représentation de Riesz en dimension finie ("Toute forme linéaire sur un espace euclidien s'écrit comme le produit scalaire par un unique vecteur"). Ce qui fait la beauté des espaces de polynômes munis de ce produit scalaire discret, c'est que l'on peut construire ce "vecteur représentant" de manière totalement explicite grâce aux polynômes interpolateurs de Lagrange. Dès que vous voyez des évaluations  $P(a_k)$  mélangées à des sommes (produit scalaire discret, sommes de Riemann, quadratures de Gauss...), ayez toujours le réflexe "Famille de Lagrange" : c'est la base orthonormée naturelle pour ce produit scalaire !

**Exercice 2 (Mines 2025) :**

Soit  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres complexes. On suppose :

$$\forall n \neq m, |z_n - z_m| \geq \sqrt{2}$$

On note  $M(z_n) = (x_n, y_n)$  pour  $z_n = x_n + iy_n$  et, pour  $A > 0$  :

$$\mathcal{E} = \{n \in \mathbb{N}, M(z_n) \in [-A, A]^2\}$$

1. Montrer que  $\mathcal{E}$  est fini.
2. En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = +\infty$ .
3. **(Bonus)** Montrer que la série  $\sum \frac{1}{|z_n|^3}$  converge.

**Exercice 2 (Mines 2025) :****Quelques indications :**

- 1. Montrer que  $\mathcal{E}$  est fini : il faut majorer le cardinal de  $\mathcal{E}$ . On pourra considérer les disques ouverts  $C_n = D(z_n, \sqrt{2}/2)$  pour  $n \in \mathcal{E}$ . L'hypothèse sur la distance garantit que ces disques sont deux à deux disjoints. Évaluez l'aire totale de ces disques et comparez-la à l'aire d'un grand carré les contenant tous.
- 2. En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = +\infty$  : utilisez la définition formelle de la limite en  $+\infty$ . L'indication clé est que l'ensemble  $\mathcal{E}$  est fini *pour tout*  $A$  choisi. Prenez  $A$  arbitrairement grand et observez le comportement des indices hors de  $\mathcal{E}$ .
- 3. **(Bonus)** Montrer que la série  $\sum \frac{1}{|z_n|^3}$  converge : définissez les couronnes  $A_N = \{n \in \mathbb{N}, |z_n| \in [N, N+1[ \}$ . Utilisez la même méthode d'aire qu'à la question 1 pour majorer le nombre de points dans  $A_N$  (c'est un  $O(N)$ ). Puis majorez le terme général sur cette couronne pour conclure avec une série de Riemann.

**Solution :**

1. Fixons  $A > 0$ . Pour chaque entier  $n \in \mathbb{N}$ , on considère le disque ouvert de centre  $z_n$  et de rayon  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  :  $C_n = D\left(z_n, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

L'hypothèse indique que pour  $n \neq m$ ,  $|z_n - z_m| \geq \sqrt{2}$ . Par inégalité triangulaire, la distance entre les centres est supérieure à la somme des rayons, ce qui assure que les disques  $C_n$  sont deux à deux disjoints.

Supposons que  $n \in \mathcal{E}$ , c'est-à-dire  $z_n \in [-A, A]^2$ . Si  $z \in C_n$ , on a par inégalité triangulaire :

$$|\operatorname{Re}(z)| \leq |\operatorname{Re}(z_n)| + |\operatorname{Re}(z - z_n)| \leq A + |z - z_n| < A + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Le même raisonnement s'applique à la partie imaginaire. Ainsi, tous les disques  $C_n$  pour  $n \in \mathcal{E}$  sont inclus dans un carré élargi  $\mathcal{C}' = \left[-A - \frac{\sqrt{2}}{2}, A + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]^2$ .

Notons  $N$  le cardinal de  $\mathcal{E}$ . Calculons les aires :

- L'aire d'un disque  $C_n$  vaut  $\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}$ .
- L'aire du grand carré  $\mathcal{C}'$  vaut  $(2A + \sqrt{2})^2$ .

Puisque les  $N$  disques sont disjoints et tous inclus dans  $\mathcal{C}'$ , la somme de leurs aires est inférieure à l'aire de  $\mathcal{C}'$  :

$$N \frac{\pi}{2} \leq (2A + \sqrt{2})^2 \implies N \leq \frac{2}{\pi} (2A + \sqrt{2})^2$$

La quantité de droite étant une constante finie, l'ensemble  $\mathcal{E}$  est fini.

2. Soit  $M > 0$ . Prenons  $A = M$ . D'après la question précédente, l'ensemble  $\mathcal{E}_M = \{n \in \mathbb{N}, M(z_n) \in [-M, M]^2\}$  est de cardinal fini. Puisque  $\mathcal{E}_M$  est fini, il admet un plus grand élément. Posons  $N_0 = \max(\mathcal{E}_M)$  (avec la convention  $N_0 = -1$  si l'ensemble est vide).

Pour tout entier  $n > N_0$ , on a nécessairement  $n \notin \mathcal{E}_M$ . Cela signifie que le point  $M(z_n)$  n'appartient pas au carré  $[-M, M]^2$ , ce qui se traduit par :

$$|\operatorname{Re}(z_n)| > M \quad \text{ou} \quad |\operatorname{Im}(z_n)| > M$$

Or, le module d'un nombre complexe est toujours supérieur ou égal à la valeur absolue de sa partie réelle ou imaginaire ( $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \max(|x|, |y|)$ ). On en déduit que pour tout  $n > N_0$ , on a  $|z_n| > M$ . C'est exactement la définition de la limite infinie d'une suite :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = +\infty$ .

3. **(Bonus)** Pour partitionner la suite, posons  $A_N = \{n \in \mathbb{N}, |z_n| \in [N, N+1[ \}$ . Soit  $n \in A_N$ . Le disque  $C_n = D(z_n, \sqrt{2}/2)$  est contenu dans la couronne élargie de centre 0, de rayon intérieur  $\max(0, N - \frac{\sqrt{2}}{2})$  et de rayon extérieur  $N + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Pour  $N \geq 1$ , l'aire de cette couronne élargie est :

$$\mathcal{A}_N = \pi \left( N + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \pi \left( N - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2$$

En factorisant la différence de carrés  $(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$ , on trouve :

$$\mathcal{A}_N = \pi (1 + \sqrt{2}) (2N + 1)$$

En notant  $k_N$  le cardinal de  $A_N$ , l'argument d'aire (disques disjoints) donne  $k_N \frac{\pi}{2} \leq \mathcal{A}_N$ , d'où :

$$k_N \leq 2(1 + \sqrt{2})(2N + 1)$$

Il existe donc une constante  $K > 0$  telle que pour tout  $N \geq 1$ ,  $k_N \leq KN$ .

Étudions maintenant la série. Comme  $|z_n| \rightarrow +\infty$ , seuls un nombre fini de termes peuvent s'annuler (en fait au plus un, vu la distance). Étudions la somme pour les termes tels que  $|z_n| \geq 1$  :

$$\sum_{|z_n| \geq 1} \frac{1}{|z_n|^3} = \sum_{N=1}^{+\infty} \sum_{n \in A_N} \frac{1}{|z_n|^3}$$

Pour un indice  $n \in A_N$ , on a  $|z_n| \geq N$ , donc  $\frac{1}{|z_n|^3} \leq \frac{1}{N^3}$ . On peut alors majorer la somme interne :

$$\sum_{n \in A_N} \frac{1}{|z_n|^3} \leq \sum_{n \in A_N} \frac{1}{N^3} = \frac{k_N}{N^3} \leq \frac{KN}{N^3} = \frac{K}{N^2}$$

Or, la série de terme général  $\frac{K}{N^2}$  est une série de Riemann convergente ( $\alpha = 2 > 1$ ). Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série  $\sum \frac{1}{|z_n|^3}$  est convergente.

**Exercice 1 (Centrale 2025) :**

1. Soit  $f : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- (a) Rappeler la définition de «  $f$  est bornée sur  $\Omega$  ».  
 (b) Rappeler la définition de «  $f$  admet un maximum sur  $\Omega$  ».

2. Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , on pose  $s(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$  et  $\varphi(z) = |s(z)|^2$ .

(a)  $\varphi$  est-elle bornée ?

On pose  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ .

- (b) Montrer que  $\varphi$  est bornée sur  $D$ .  
 (c) Montrer que  $\varphi$  atteint son maximum sur  $D$  en exactement deux points.

**Exercice 1 (Centrale 2025) :****Quelques indications :**

- 1. Ce sont des questions de cours pures. Attention à bien séparer la notion de "fonction bornée" (qui nécessite une valeur absolue) de la notion de "maximum" (qui concerne les valeurs réelles signées de la fonction).
- 2.a. Observez que  $s(z)$  est le prolongement naturel de la fonction sinus à  $\mathbb{C}$ . Que se passe-t-il si on évalue cette fonction sur l'axe des imaginaires purs (en posant  $z = iy$ ) ? L'apparition du sinus hyperbolique devrait vous donner la réponse.
- 2.b. Argument topologique direct : caractérisez topologiquement le disque  $D$  dans  $\mathbb{C}$  et rappelez les propriétés de continuité de  $\varphi$ .
- 2.c. C'est le cœur de l'exercice. Posez  $z = x + iy$  et développez  $\varphi(z)$ . En utilisant les formules d'Euler et la relation  $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$ , vous allez obtenir une expression remarquablement simple :  $\varphi(z) = \sin^2 x + \sinh^2 y$ . Il ne restera plus qu'à maximiser cette fonction sous la contrainte  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

**Solution :**

1. (a) Dire que  $f$  est bornée sur  $\Omega$  signifie qu'il existe un réel positif  $M$  tel que pour tout  $x \in \Omega$ , la valeur absolue de  $f(x)$  ne dépasse pas  $M$ . Mathématiquement :

$$\exists M \geq 0, \forall x \in \Omega, |f(x)| \leq M$$

- (b) Dire que  $f$  admet un maximum sur  $\Omega$  signifie qu'il existe un point de  $\Omega$  où la fonction prend une valeur supérieure ou égale à toutes les autres valeurs prises sur  $\Omega$  :

$$\exists x_0 \in \Omega, \forall x \in \Omega, f(x) \leq f(x_0)$$

2. (a) Évaluons  $\varphi$  sur l'axe des imaginaires purs. Soit  $y \in \mathbb{R}$  et posons  $z = iy$ .

$$s(iy) = \frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i} = \frac{e^{-y} - e^y}{2i} = i \left( \frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) = i \sinh(y)$$

On en déduit que  $\varphi(iy) = |i \sinh(y)|^2 = \sinh^2(y)$ . Or,  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \sinh^2(y) = +\infty$ . La fonction prenant des valeurs arbitrairement grandes,  $\varphi$  n'est pas bornée sur  $\mathbb{C}$ .

- (b) L'ensemble  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$  est le disque unité fermé. Dans le plan complexe (identifiable à  $\mathbb{R}^2$  qui est de dimension finie),  $D$  est un ensemble fermé et borné, c'est donc un compact. La fonction  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{C}$  car elle est la composée de fonctions usuelles continues sur  $\mathbb{C}$  (exponentielle complexe, opérations algébriques et module). Le théorème des bornes atteintes assure que l'image d'un compact par une fonction continue est un compact. Donc  $\varphi$  est bornée sur  $D$  (et y atteint ses bornes).
- (c) Cherchons ce maximum. Posons  $z = x + iy$  avec  $x, y \in \mathbb{R}$ . Développons  $s(z)$  :

$$s(x + iy) = \frac{e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^y}{2i} = \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^y(\cos x - i \sin x)}{2i}$$

En regroupant les parties réelles et imaginaires au numérateur :

$$s(x + iy) = \frac{\cos x(e^{-y} - e^y) + i \sin x(e^{-y} + e^y)}{2i} = i \cos x \sinh y + \sin x \cosh y$$

Le carré du module de ce nombre complexe s'écrit alors :

$$\varphi(z) = (\sin x \cosh y)^2 + (\cos x \sinh y)^2 = \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y$$

Utilisons l'identité  $\cosh^2 y = 1 + \sinh^2 y$  et  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$  pour simplifier :

$$\varphi(z) = \sin^2 x(1 + \sinh^2 y) + (1 - \sin^2 x) \sinh^2 y = \sin^2 x + \sin^2 x \sinh^2 y + \sinh^2 y - \sin^2 x \sinh^2 y$$

Ce qui donne l'expression remarquable :  $\varphi(z) = \sin^2 x + \sinh^2 y$ .

Nous cherchons à maximiser  $\varphi$  sur  $D$ , ce qui correspond à la contrainte  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Puisque  $x \mapsto \sin^2 x$  et  $y \mapsto \sinh^2 y$  sont strictement croissantes sur  $[0, 1]$  (notons que  $1 < \pi/2$ ), le maximum ne peut pas se trouver à l'intérieur du disque. Il se trouve nécessairement sur le bord, là où  $x^2 + y^2 = 1$ . Sur ce bord, on peut paramétrer les valeurs par  $t = y^2 \in [0, 1]$ , ce qui impose  $x^2 = 1 - t$ . La fonction à maximiser devient une fonction d'une seule variable  $t \in [0, 1]$  :

$$\psi(t) = \sin^2(\sqrt{1-t}) + \sinh^2(\sqrt{t})$$

Dérivons  $\psi$  sur  $]0, 1[$  :

$$\psi'(t) = -\frac{2 \sin(\sqrt{1-t}) \cos(\sqrt{1-t})}{2\sqrt{1-t}} + \frac{2 \sinh(\sqrt{t}) \cosh(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} = -\frac{\sin(2\sqrt{1-t})}{2\sqrt{1-t}} + \frac{\sinh(2\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}$$

Or, des inégalités classiques nous disent que :

- Pour tout  $u > 0$ ,  $\sinh(u) > u \implies \frac{\sinh(u)}{u} > 1$ .
- Pour tout  $v \in ]0, \pi/2]$ ,  $\sin(v) < v \implies \frac{\sin(v)}{v} < 1$ .

En appliquant ceci avec  $u = 2\sqrt{t}$  et  $v = 2\sqrt{1-t}$  (qui est bien dans  $]0, 2] \subset ]0, \pi[$ ), on obtient :

$$\forall t \in ]0, 1[, \quad \psi'(t) > -1 + 1 = 0$$

La fonction  $\psi$  est donc strictement croissante sur  $[0, 1]$ . Son maximum global est atteint de manière unique en  $t = 1$ . Ceci correspond à  $y^2 = 1$  et  $x^2 = 0$ , c'est-à-dire aux points  $(0, 1)$  et  $(0, -1)$  dans le plan réel.  $\varphi$  atteint alors son maximum sur  $D$  en exactement deux points :  $z_1 = i$  et  $z_2 = -i$ .

**Exercice 1 (Centrale 2025)**

Soit  $E$  un espace euclidien muni du produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ . Soient  $u, v$  deux endomorphismes autoadjoints dans  $E$ . On suppose que  $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$  et  $\text{Sp}(v) \subset \mathbb{R}_+$ .

**Objectif :** Démontrer l'inégalité (1) :

$$\det(u)^{1/2} \cdot \det(v)^{1/2} \leq \det\left(\frac{u+v}{2}\right)$$

Soient  $\vec{x}, \vec{y} \in E$ . On pose  $B(\vec{x}, \vec{y}) = \langle \vec{x} | u(\vec{y}) \rangle$  et  $B'(\vec{x}, \vec{y}) = \langle \vec{x} | v(\vec{y}) \rangle$ .

1. Montrer que  $B$  est un produit scalaire (on admettra que  $B$  est une forme bilinéaire).  
Montrer qu'il existe un unique endomorphisme  $w$  tel que :

$$B(\vec{x}, w(\vec{y})) = B'(\vec{x}, \vec{y})$$

2. Justifier que  $w$  est diagonalisable et que  $\text{Sp}(w) \subset \mathbb{R}_+$ .
3. Montrer que (1) est équivalente à :

$$\det(w)^{1/2} \leq \det\left(\frac{\text{Id} + w}{2}\right)$$

4. Conclure.

**Quelques indications :**

- 1. Pour montrer que  $B$  est un produit scalaire, la symétrie provient de celle de  $u$ . Pour le caractère défini positif, utilisez le fait que les valeurs propres de  $u$  sont strictement positives. Pour l'existence de  $w$ , traduisez l'égalité  $B = B'$  avec le produit scalaire initial pour "isoler"  $w$  (en justifiant que  $u$  est inversible).
- 2. Attention au piège classique : l'endomorphisme  $w$  n'est *pas* autoadjoint pour le produit scalaire standard  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  ! Montrez qu'il est autoadjoint pour le nouveau produit scalaire  $B$ . Évaluez ensuite la quantité  $B(x, w(x))$  avec un vecteur propre pour obtenir le signe du spectre.
- 3. Remplacez  $v$  par  $u \circ w$  dans le déterminant de la somme et utilisez la multiplicativité du déterminant ( $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ ) pour factoriser.
- 4. Passez par le spectre de  $w$ . En exprimant les deux déterminants à l'aide des valeurs propres  $\lambda_i$  de  $w$ , vous devriez reconnaître une inégalité universelle très célèbre liant racine carrée et demi-somme (Moyenne Géométrique  $\leq$  Moyenne Arithmétique).

**Solution :**

1. Étude de la forme  $B$  :

- Symétrie : Pour tous  $\vec{x}, \vec{y} \in E$ , on a  $B(\vec{x}, \vec{y}) = \langle \vec{x} | u(\vec{y}) \rangle$ . Puisque  $u$  est un endomorphisme autoadjoint pour  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ , on a  $\langle \vec{x} | u(\vec{y}) \rangle = \langle u(\vec{x}) | \vec{y} \rangle$ . Par symétrie du produit scalaire initial, cela vaut  $\langle \vec{y} | u(\vec{x}) \rangle = B(\vec{y}, \vec{x})$ .
- Positivité et caractère défini : Soit  $\vec{x} \in E$ .  $B(\vec{x}, \vec{x}) = \langle \vec{x} | u(\vec{x}) \rangle$ . Puisque  $u$  est autoadjoint, le théorème spectral assure qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres  $(\vec{e}_i)$  associés aux valeurs propres  $\mu_i \in \text{Sp}(u)$ . En décomposant  $\vec{x} = \sum x_i \vec{e}_i$ , on obtient  $B(\vec{x}, \vec{x}) = \sum \mu_i x_i^2$ . Comme  $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$ , tous les  $\mu_i$  sont strictement positifs. Ainsi,  $B(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$ , et si  $B(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ , alors nécessairement tous les  $x_i$  sont nuls, donc  $\vec{x} = \vec{0}$ .

$B$  est bien un produit scalaire sur  $E$ .

Existence et unicité de  $w$  : On cherche  $w$  tel que pour tous  $\vec{x}, \vec{y}$ ,  $B(\vec{x}, w(\vec{y})) = B'(\vec{x}, \vec{y})$ . En repassant au produit scalaire initial, cela s'écrit :

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \quad \langle \vec{x} | u(w(\vec{y})) \rangle = \langle \vec{x} | v(\vec{y}) \rangle$$

Cette égalité devant être vraie pour tout vecteur  $\vec{x}$ , on en déduit l'égalité vectorielle :

$$\forall \vec{y} \in E, \quad u(w(\vec{y})) = v(\vec{y}) \implies u \circ w = v$$

Puisque  $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$ , 0 n'est pas valeur propre de  $u$ , donc  $u$  est un automorphisme (inversible). Il existe donc un unique endomorphisme  $w$  vérifiant cette relation, donné par :  $w = u^{-1} \circ v$ .

2. Diagonalisation de  $w$  : Montrons que  $w$  est un endomorphisme autoadjoint pour l'espace euclidien  $(E, B)$ . Pour tous  $\vec{x}, \vec{y} \in E$  :

$$B(w(\vec{x}), \vec{y}) = B(\vec{y}, w(\vec{x})) \quad (\text{par symétrie de } B)$$

$$B(w(\vec{x}), \vec{y}) = B'(\vec{y}, \vec{x}) \quad (\text{par définition de } w)$$

$$B(w(\vec{x}), \vec{y}) = \langle \vec{y} | v(\vec{x}) \rangle = \langle v(\vec{y}) | \vec{x} \rangle \quad (\text{car } v \text{ est autoadjoint pour } \langle \cdot | \cdot \rangle)$$

$$B(w(\vec{x}), \vec{y}) = \langle \vec{x} | v(\vec{y}) \rangle = B'(\vec{x}, \vec{y}) = B(\vec{x}, w(\vec{y}))$$

L'endomorphisme  $w$  est donc symétrique pour le produit scalaire  $B$ . Par le théorème spectral,  $w$  est diagonalisable.

Spectre de  $w$  : Soit  $\lambda \in \text{Sp}(w)$  et  $\vec{x} \neq \vec{0}$  un vecteur propre associé ( $w(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ ). Calculons  $B(\vec{x}, w(\vec{x}))$  de deux manières : D'une part,  $B(\vec{x}, w(\vec{x})) = B(\vec{x}, \lambda\vec{x}) = \lambda B(\vec{x}, \vec{x})$ . D'autre part, par définition de  $w$ ,  $B(\vec{x}, w(\vec{x})) = B'(\vec{x}, \vec{x}) = \langle \vec{x} | v(\vec{x}) \rangle$ . Puisque  $\text{Sp}(v) \subset \mathbb{R}_+$ , l'endomorphisme  $v$  est un opérateur positif, donc  $\langle \vec{x} | v(\vec{x}) \rangle \geq 0$ . On a donc  $\lambda B(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$ . Comme  $\vec{x} \neq \vec{0}$  et  $B$  est un produit scalaire,  $B(\vec{x}, \vec{x}) > 0$ . On en déduit que  $\lambda \geq 0$ . Conclusion :  $\text{Sp}(w) \subset \mathbb{R}_+$ .

3. Nous avons établi à la question 1 que  $v = u \circ w$ . Remplaçons  $v$  dans le membre de droite de l'inégalité (1) :

$$\det \left( \frac{u+v}{2} \right) = \det \left( \frac{u+u \circ w}{2} \right) = \det \left( u \circ \frac{\text{Id}+w}{2} \right) = \det(u) \cdot \det \left( \frac{\text{Id}+w}{2} \right)$$

Évaluons maintenant le membre de gauche de (1) :

$$\det(v) = \det(u \circ w) = \det(u) \det(w)$$

Donc  $\det(u)^{1/2} \cdot \det(v)^{1/2} = \det(u)^{1/2} \cdot (\det(u) \det(w))^{1/2} = \det(u) \cdot \det(w)^{1/2}$ .

L'inégalité (1) initiale s'écrit donc :

$$\det(u) \cdot \det(w)^{1/2} \leq \det(u) \cdot \det \left( \frac{\text{Id}+w}{2} \right)$$

Puisque  $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$ ,  $\det(u) > 0$ . On peut simplifier par  $\det(u)$  sans changer le sens de l'inégalité, ce qui donne bien l'équivalence avec :

$$\det(w)^{1/2} \leq \det \left( \frac{\text{Id}+w}{2} \right)$$

4. Puisque  $w$  est diagonalisable et que  $\text{Sp}(w) \subset \mathbb{R}_+$ , notons  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  ses valeurs propres, qui sont toutes des réels positifs. Le déterminant d'un endomorphisme étant le produit de ses valeurs propres, on a :

$$\det(w)^{1/2} = \left( \prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{1/2} = \prod_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i}$$

De même, les valeurs propres de l'endomorphisme  $\frac{\text{Id}+w}{2}$  sont les réels  $\frac{1+\lambda_i}{2}$ . Donc :

$$\det\left(\frac{\text{Id}+w}{2}\right) = \prod_{i=1}^n \frac{1+\lambda_i}{2}$$

Or, pour tout réel positif  $\lambda$ , l'inégalité arithmético-géométrique (ou la concavité de la fonction racine carrée) nous dit que :

$$\sqrt{\lambda} = \sqrt{1 \cdot \lambda} \leq \frac{1+\lambda}{2}$$

En multipliant ces  $n$  inégalités (qui sont toutes à termes positifs), on obtient :

$$\prod_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} \leq \prod_{i=1}^n \frac{1+\lambda_i}{2}$$

Ce qui est exactement  $\det(w)^{1/2} \leq \det\left(\frac{\text{Id}+w}{2}\right)$ . L'équivalence démontrée à la question 3 permet de conclure que l'inégalité (1) est vraie.

**Remarque 6.** Cet exercice est une démonstration détournée d'un théorème fondamental souvent hors-programme direct mais omniprésent aux concours : le théorème de réduction simultanée. Lorsqu'on a deux formes quadratiques (représentées par  $u$  et  $v$ ), dont l'une est définie positive ( $u \in \mathcal{S}_n^{++}$ ), il est toujours possible de trouver une base qui est *orthonormée* pour la première, et *orthogonale* pour la seconde. L'astuce de l'énoncé (introduire un nouveau produit scalaire  $B$  et l'endomorphisme  $w = u^{-1}v$ ) est la construction analytique exacte de ce résultat : on absorbe la matrice définie positive pour la transformer en la matrice Identité (le produit scalaire  $B$ ), ce qui permet d'appliquer le théorème spectral standard au reste du problème.

**Exercice 1 (IMT 2025) :**

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ ; soit  $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$  une famille de vecteurs non nuls de  $E$  telle que :

$$\forall x \in E \quad \sum_{i=1}^n (e_i|x)^2 = \|x\|^2$$

1. Montrer que  $\mathcal{F}$  est une famille génératrice de  $E$ .
2. La famille  $\mathcal{F}$  est-elle une base orthonormée de  $E$ ?

**Exercice 2 (IMT 2025) :**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $U_n$  l'ensemble des polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  unitaires de degré  $n$  et scindés sur  $\mathbb{R}$ . On se propose de démontrer que  $U_n$  est un fermé de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

1. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ , unitaire de degré  $n$ . Montrer que  $P$  est scindé sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |\operatorname{Im}(z)|^n \leq |P(z)|$$

2. Conclure.

**Exercice 1 (IMT 2025) :****Quelques indications :**

- 1. Le réflexe absolu dans un espace euclidien : pour montrer qu'une famille est génératrice, prenez un vecteur  $x$  dans son orthogonal (donc tel que  $(e_i|x) = 0$  pour tout  $i$ ) et montrez qu'il est nécessairement nul.
- 2. Puisque la famille compte  $n$  éléments et génère un espace de dimension  $n$ , c'est une base. Pour prouver son orthonormalité, l'approche la plus élégante est d'introduire l'endomorphisme  $S(x) = \sum_{i=1}^n (e_i|x)e_i$ . Montrez que  $S = \operatorname{Id}_E$ , puis passez par la trace pour coincer la norme des vecteurs.

**Solution :**

1. Montrons que  $\mathcal{F}$  est génératrice. Soit  $x \in \mathcal{F}^\perp$ . Par définition de l'orthogonal, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $(e_i|x) = 0$ . En injectant cette propriété dans la relation fournie par l'énoncé, on obtient :

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (e_i|x)^2 = \sum_{i=1}^n 0^2 = 0$$

Une norme étant définie, on en déduit que  $x = 0_E$ . Ainsi,  $\mathcal{F}^\perp = \{0_E\}$ . Or, en dimension finie,  $E = \operatorname{Vect}(\mathcal{F}) \oplus \mathcal{F}^\perp$ . On conclut donc que  $\operatorname{Vect}(\mathcal{F}) = E$ . La famille  $\mathcal{F}$  est génératrice de  $E$ .

2. La famille  $\mathcal{F}$  est génératrice et possède exactement  $n$  éléments dans un espace de dimension  $n$ . C'est donc une base de  $E$ . Pour savoir si elle est orthonormée, introduisons l'endomorphisme  $S \in \mathcal{L}(E)$  défini par :

$$S(x) = \sum_{i=1}^n (e_i|x)e_i$$

Calculons le produit scalaire  $(S(x)|x)$  :

$$(S(x)|x) = \left( \sum_{i=1}^n (e_i|x)e_i \mid x \right) = \sum_{i=1}^n (e_i|x)(e_i|x) = \sum_{i=1}^n (e_i|x)^2$$

D'après l'énoncé, on a donc  $(S(x)|x) = \|x\|^2 = (x|x)$  pour tout  $x \in E$ , ce qui s'écrit  $((S - \text{Id}_E)(x)|x) = 0$ . L'endomorphisme  $S - \text{Id}_E$  étant symétrique, la nullité de la forme quadratique associée implique que l'endomorphisme est nul :  $S = \text{Id}_E$ .

Passons à la trace. La trace de  $\text{Id}_E$  vaut  $n$ . Par linéarité, on calcule la trace de  $S$  :

$$\text{Tr}(S) = \sum_{i=1}^n \text{Tr}(x \mapsto (e_i|x)e_i) = \sum_{i=1}^n \|e_i\|^2$$

On a donc  $\sum_{i=1}^n \|e_i\|^2 = n$ . Par ailleurs, appliquons la relation de l'énoncé à  $x = e_j$  :

$$\|e_j\|^2 = \sum_{i=1}^n (e_i|e_j)^2 = \|e_j\|^4 + \sum_{i \neq j} (e_i|e_j)^2$$

Ce qui donne :  $\|e_j\|^2 - \|e_j\|^4 = \sum_{i \neq j} (e_i|e_j)^2 \geq 0$ . Donc  $\|e_j\|^2(1 - \|e_j\|^2) \geq 0$ . Comme  $e_j$  est non nul, on en déduit  $\|e_j\|^2 \leq 1$ . Nous avons  $n$  réels positifs, tous inférieurs ou égaux à 1, dont la somme vaut exactement  $n$ . Ils sont donc tous égaux à 1. On a ainsi  $\|e_j\| = 1$  pour tout  $j$ . En réinjectant  $\|e_j\|^2 = 1$  et  $\|e_j\|^4 = 1$  dans notre équation précédente :

$$1 = 1 + \sum_{i \neq j} (e_i|e_j)^2 \implies \sum_{i \neq j} (e_i|e_j)^2 = 0$$

Une somme de carrés nuls impliquant la nullité de chaque terme, on a  $(e_i|e_j) = 0$  pour tout  $i \neq j$ . La famille  $\mathcal{F}$  est bien **une base orthonormée** de  $E$ .

### Exercice 2 (IMT 2025) :

#### Quelques indications :

- 1. Pour l'implication  $\implies$ , factorisez  $P$  dans  $\mathbb{C}$  (où il a la bonne idée d'avoir des racines *réelles* par hypothèse) et majorez le module de chaque facteur évalué en  $z = x + iy$ . Pour  $\impliedby$ , pensez de manière purement algébrique : que se passe-t-il si vous évaluez cette inégalité de module directement sur une racine (même complexe) du polynôme ?
- 2. En dimension finie (ce qui est le cas de  $\mathbb{R}_n[X]$ ), la convergence d'une suite de polynômes entraîne la convergence ponctuelle. Il vous suffira de prendre une suite de l'ensemble, de passer à la limite dans la merveilleuse inégalité de la question 1, et le tour sera joué.

#### Solution :

1. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  unitaire de degré  $n$ . D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, il admet exactement  $n$  racines complexes  $z_1, \dots, z_n$  (comptées avec multiplicité) et se factorise sous la forme  $P(X) = \prod_{k=1}^n (X - z_k)$ .

- Sens direct ( $\implies$ ) : Supposons que  $P$  soit scindé sur  $\mathbb{R}$ . Alors toutes ses racines  $z_k$  sont des réels. Soit  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  (avec  $x, y \in \mathbb{R}$ ). Évaluons le module de  $P(z)$  :

$$|P(z)| = \prod_{k=1}^n |x + iy - z_k| = \prod_{k=1}^n \sqrt{(x - z_k)^2 + y^2}$$

Or, pour tout  $k$ , le terme  $(x - z_k)^2$  est positif, d'où  $(x - z_k)^2 + y^2 \geq y^2$ . On en déduit par passage à la racine (fonction croissante) que  $\sqrt{(x - z_k)^2 + y^2} \geq \sqrt{y^2} = |y| = |\text{Im}(z)|$ . En multipliant ces  $n$  inégalités à termes positifs :

$$|P(z)| \geq \prod_{k=1}^n |\text{Im}(z)| = |\text{Im}(z)|^n$$

L'implication directe est donc démontrée.

- Sens réciproque (  $\Leftarrow$  ) : Supposons que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|\operatorname{Im}(z)|^n \leq |P(z)|$ . Soit  $z_k$  une des racines (a priori complexe) du polynôme  $P$ . On a donc  $P(z_k) = 0$ . En appliquant l'inégalité de l'hypothèse à  $z = z_k$ , on obtient :

$$|\operatorname{Im}(z_k)|^n \leq |P(z_k)| = 0$$

Ceci impose  $|\operatorname{Im}(z_k)|^n = 0$ , et donc  $\operatorname{Im}(z_k) = 0$ . La racine  $z_k$  est donc un nombre réel. Puisque cela est vrai pour toute racine de  $P$ , le polynôme  $P$  (qui est déjà unitaire de degré  $n$ ) n'admet que des racines réelles. Il est donc scindé sur  $\mathbb{R}$ .

2. On veut montrer que l'ensemble  $U_n$  est un fermé de l'espace vectoriel normé de dimension finie  $\mathbb{R}_n[X]$ . Utilisons la caractérisation séquentielle des fermés : soit  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $U_n$  qui converge vers un certain polynôme  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ . Montrons que  $P \in U_n$ .

L'espace  $\mathbb{R}_n[X]$  étant de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes, et la convergence d'une suite de polynômes équivaut à la convergence coefficient par coefficient. Puisque pour tout  $k$ ,  $P_k$  est unitaire de degré  $n$ , le coefficient de  $X^n$  de  $P_k$  vaut constamment 1. Par passage à la limite, le coefficient de  $X^n$  de  $P$  vaut également 1. Le polynôme  $P$  est donc bien unitaire de degré  $n$ .

De plus, puisque chaque  $P_k \in U_n$ , on peut appliquer le résultat de la question 1 :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, \quad |\operatorname{Im}(z)|^n \leq |P_k(z)|$$

Fixons  $z \in \mathbb{C}$ . L'application d'évaluation  $Q \mapsto Q(z)$  est une forme linéaire sur l'espace de dimension finie  $\mathbb{R}_n[X]$  (à valeurs complexes), elle est donc continue. Ainsi,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} P_k(z) = P(z)$ , et par continuité du module,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} |P_k(z)| = |P(z)|$ .

En passant à la limite quand  $k \rightarrow +\infty$  dans l'inégalité, le sens large est conservé :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |\operatorname{Im}(z)|^n \leq |P(z)|$$

D'après la caractérisation démontrée à la question 1, cela garantit que  $P$  est scindé sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi,  $P \in U_n$ . Toute suite convergente d'éléments de  $U_n$  converge dans  $U_n$  ie l'ensemble  $U_n$  est un fermé de  $\mathbb{R}_n[X]$

**Exercice 1 (Centrale 2025) :**

Soit  $E$  un espace euclidien, et  $f \in \mathcal{L}(E)$  une application bijective vérifiant pour tout  $x, y \in E$  :

$$\langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$$

On définit  $s = f \circ f$ .

1. Montrer que  $s$  est un endomorphisme auto-adjoint.
2. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $s$ . Montrer que  $\lambda < 0$ . En déduire que la dimension de  $E$  est paire.
3. Soit  $x \in V_\lambda$  tel que  $x \neq 0_E$ . On pose  $F = \text{Vect}(x, f(x))$ . Montrer que  $F$  est un plan stable par  $f$  et que  $F^\perp$  est stable par  $f$ .
4. Montrer alors que dans une base orthonormale  $\mathcal{B}$  bien choisie,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$  (sous forme diagonale par blocs de ce type).

**Exercice (Centrale, sans préparation 25 minutes) :****Quelques indications :**

- 1. Appliquez simplement la définition de l'adjoint en utilisant la propriété d'antisymétrie de  $f$  à deux reprises.
- 2. Évaluez le produit scalaire  $\langle s(x), x \rangle$  de deux manières différentes pour un vecteur propre  $x$  non nul. Pour la parité de la dimension, le déterminant de  $s$  (qui est le produit de ses valeurs propres) fera le lien avec la bijectivité de  $f$ .
- 3. Pour montrer que  $F$  est un "plan" (donc de dimension 2), raisonnez par l'absurde en supposant la famille liée, ce qui contredirait le signe de  $\lambda$ . Pour la stabilité de  $F^\perp$ , l'antisymétrie permet de faire "passer"  $f$  de l'autre côté du produit scalaire de manière élégante.
- 4. Construisez explicitement la base orthonormée sur  $F$  à partir de  $x$  et  $f(x)$ . Quelle est la valeur de  $\langle x, f(x) \rangle$ ? Une fois le bloc  $2 \times 2$  obtenu, le théorème s'achève par une récurrence sur la dimension grâce à la stabilité de  $F^\perp$ .

**Solution :**

1. Pour montrer que  $s = f \circ f$  est auto-adjoint, il faut montrer que pour tous  $x, y \in E$ ,  $\langle s(x), y \rangle = \langle x, s(y) \rangle$ . Soient  $x, y \in E$ . En utilisant la propriété d'antisymétrie de  $f$  :

$$\langle s(x), y \rangle = \langle f(f(x)), y \rangle = -\langle f(x), f(y) \rangle$$

En appliquant à nouveau l'antisymétrie (en lisant de droite à gauche, ou en commutant le produit scalaire) :

$$-\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, f(f(y)) \rangle = \langle x, s(y) \rangle$$

Ainsi,  $\langle s(x), y \rangle = \langle x, s(y) \rangle$ . L'endomorphisme  $s$  est donc auto-adjoint.

2. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $s$ . Il existe un vecteur propre  $x \in E$ , non nul ( $x \neq 0_E$ ), tel que  $s(x) = \lambda x$ . Évaluons la quantité  $\langle s(x), x \rangle$  de deux façons :

- D'une part :  $\langle s(x), x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \|x\|^2$ .
- D'autre part :  $\langle s(x), x \rangle = \langle f(f(x)), x \rangle = -\langle f(x), f(x) \rangle = -\|f(x)\|^2$ .

On en déduit que  $\lambda \|x\|^2 = -\|f(x)\|^2 \leq 0$ . Puisque  $x \neq 0_E$ ,  $\|x\|^2 > 0$ , ce qui implique  $\lambda \leq 0$ . De plus,  $f$  est bijective, donc  $s = f \circ f$  est également bijective. Ainsi, 0 ne peut pas être valeur propre de  $s$ . Conclusion  $\lambda < 0$ .

Déduction sur la dimension : L'endomorphisme  $s$  étant auto-adjoint sur un espace euclidien, il est diagonalisable d'après le théorème spectral. Soit  $n = \dim(E)$ . Le déterminant de  $s$  est le produit de ses  $n$  valeurs propres (comptées avec multiplicité), qui sont toutes strictement négatives. Le signe du déterminant de  $s$  est donc  $(-1)^n$ . Or,  $s = f^2$ , donc  $\det(s) = \det(f)^2 > 0$  (car  $\det(f) \neq 0$ ). On a donc  $(-1)^n > 0$ , ce qui impose que  $n$  soit pair. La dimension de  $E$  est paire.

3. Soit  $x \in V_\lambda \setminus \{0_E\}$ . On a  $s(x) = f(f(x)) = \lambda x$ . Considérons  $F = \text{Vect}(x, f(x))$ .
- Dimension de  $F$  : Supposons par l'absurde que la famille  $(x, f(x))$  est liée. Comme  $x \neq 0_E$ , il existerait  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x) = cx$ . En composant par  $f$ , on aurait  $f(f(x)) = f(cx) = cf(x) = c^2x$ . Or  $f(f(x)) = \lambda x$ , ce qui donnerait  $\lambda = c^2 \geq 0$ . C'est absurde puisque  $\lambda < 0$ . La famille  $(x, f(x))$  est donc libre,  $F$  est bien un plan (dimension 2).
  - Stabilité de  $F$  : Les générateurs de  $F$  sont  $x$  et  $f(x)$ . L'image de  $x$  est  $f(x) \in F$ . L'image de  $f(x)$  est  $f(f(x)) = \lambda x \in F$ . Donc  $f(F) \subset F$ ,  $F$  est stable par  $f$ .
  - Stabilité de  $F^\perp$  : Soit  $y \in F^\perp$ . Montrons que  $f(y) \in F^\perp$ . Pour tout  $z \in F$ , on a :  $\langle f(y), z \rangle = -\langle y, f(z) \rangle$ . Puisque  $F$  est stable par  $f$ ,  $f(z) \in F$ . Comme  $y \in F^\perp$ , le produit scalaire  $\langle y, f(z) \rangle$  est nul. Ainsi,  $\langle f(y), z \rangle = 0$ .  $F^\perp$  est stable par  $f$ .
4. Construisons une base orthonormale de  $F$ . Remarquons d'abord que  $x$  et  $f(x)$  sont orthogonaux :  $\langle x, f(x) \rangle = -\langle f(x), x \rangle = -\langle x, f(x) \rangle$ , d'où  $2\langle x, f(x) \rangle = 0 \implies x \perp f(x)$ . Posons  $\mu = \sqrt{-\lambda}$  (qui existe car  $\lambda < 0$ ). Calculons la norme de  $f(x)$  :  $\|f(x)\|^2 = \langle f(x), f(x) \rangle = -\langle x, f(f(x)) \rangle = -\langle x, \lambda x \rangle = -\lambda \|x\|^2 = \mu^2 \|x\|^2$ . Donc  $\|f(x)\| = \mu \|x\|$ .

Posons les vecteurs normés :  $e_1 = \frac{x}{\|x\|}$  et  $e_2 = \frac{f(x)}{\|f(x)\|}$ . La famille  $(e_1, e_2)$  est une base orthonormale de  $F$ . Évaluons  $f$  sur cette base :

- $f(e_1) = \frac{f(x)}{\|x\|} = \frac{\|f(x)\|e_2}{\|x\|} = \frac{\mu\|x\|e_2}{\|x\|} = \mu e_2$ .
- $f(e_2) = \frac{f(f(x))}{\|f(x)\|} = \frac{\lambda x}{\mu\|x\|} = \frac{-\mu^2 x}{\mu\|x\|} = -\mu \frac{x}{\|x\|} = -\mu e_1$ .

Dans la base  $(e_1, e_2)$ , la restriction de  $f$  à  $F$  a pour matrice  $\begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$ , ce qui correspond à la forme voulue avec  $b = \mu$ .

L'espace  $E$  se décompose en  $E = F \oplus F^\perp$ , tous deux stables par  $f$ . La restriction de  $f$  à l'espace euclidien  $F^\perp$  (qui est de dimension  $n - 2$ , donc paire) est toujours un automorphisme antisymétrique. Par une récurrence immédiate sur la dimension (de 2 en 2, l'initialisation pour  $n = 0$  ou  $n = 2$  étant évidente),  $E$  se décompose en une somme directe orthogonale de plans stables sur lesquels la matrice de  $f$  est de la forme requise. En concaténant ces bases orthonormales de chaque plan, on obtient une base orthonormale  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est diagonale par blocs de la forme  $\begin{pmatrix} 0 & -b_i \\ b_i & 0 \end{pmatrix}$ .

**Remarque 7.** Cet exercice reconstruit pas à pas le théorème de réduction des endomorphismes antisymétriques (matrices antisymétriques réelles). À retenir absolument :

- Une matrice symétrique réelle a des valeurs propres réelles.
- Une matrice antisymétrique réelle n'a que des valeurs propres imaginaires pures (ou nulles) sur  $\mathbb{C}$ . C'est la raison profonde pour laquelle son carré  $s$  a des valeurs propres strictement négatives sur  $\mathbb{R}$ .
- Géométriquement, tout endomorphisme antisymétrique se comporte comme une somme de "similitudes de rotation d'angle  $\pi/2$ " (les blocs  $2 \times 2$ ) opérant sur des plans orthogonaux indépendants.

**Exercice 1 (Mines 2025) :**

On pose  $f(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{1 + y^{2n}}$ .

1. Donner l'ensemble de définition  $\mathcal{D}$  de  $f$  et le représenter graphiquement.
2. Déterminer les dérivées partielles de  $f$ .

**Exercice 2 (Mines 2025) :**

Soit  $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$  et  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $A^k = 0$ .

1. Montrer qu'il existe un unique  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $A^p = 0$  et  $A^{p-1} \neq 0$ , puis que  $p \leq 4$ .
2. On suppose  $p = 4$ . Montrer que  $A$  est semblable à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 1 (Mines 2025) :****Quelques indications :**

- 1. Distinguez deux cas selon la position de  $y$  par rapport à 1 (en valeur absolue). Si  $|y| \leq 1$ , le dénominateur est encadré par 1 et 2, la série se comporte comme  $\sum (x^2)^n$ . Si  $|y| > 1$ , le dénominateur est équivalent à  $y^{2n}$ , la série se comporte comme  $\sum (x/y)^{2n}$ . Graphiquement, le domaine  $\mathcal{D}$  s'écrit de manière très compacte :  $|x| < \max(1, |y|)$ .
- 2. Il s'agit d'appliquer le théorème de dérivation terme à terme. Vous n'avez pas besoin de redémontrer la convergence normale dans le détail absolu si vous invoquez habilement la structure de série entière pour la variable  $x$  (à  $y$  fixé).

**Solution :**

1. Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Posons  $u_n(x, y) = \frac{x^{2n}}{1+y^{2n}}$ . Étudions la convergence de la série numérique  $\sum u_n(x, y)$  selon les valeurs de  $y$  :

- Cas  $|y| \leq 1$  : On a l'encadrement évident  $1 \leq 1 + y^{2n} \leq 2$ . On en déduit par passage à l'inverse que  $\frac{1}{2}x^{2n} \leq u_n(x, y) \leq x^{2n}$ . La série  $\sum u_n(x, y)$  (à termes positifs) est donc de même nature que la série géométrique  $\sum (x^2)^n$ . Elle converge si et seulement si sa raison vérifie  $x^2 < 1$ , c'est-à-dire  $|x| < 1$ .
- Cas  $|y| > 1$  : Quand  $n \rightarrow +\infty$ , on a l'équivalent  $1 + y^{2n} \sim y^{2n}$ . Puisque les termes sont strictement positifs,  $u_n(x, y) \sim \frac{x^{2n}}{y^{2n}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{2n}$ . Il s'agit à nouveau du terme général d'une série géométrique. Par comparaison, la série converge si et seulement si la raison vérifie  $\left|\frac{x}{y}\right|^2 < 1$ , ce qui équivaut à  $|x| < |y|$ .

L'ensemble de définition de  $f$  est donc la réunion de ces deux zones :

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (|y| \leq 1 \text{ et } |x| < 1) \text{ ou } (|y| > 1 \text{ et } |x| < |y|)\}$$

Ce qui se résume de manière élégante par :  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < \max(1, |y|)\}$ .

Représentation graphique :  $\mathcal{D}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Pour la zone centrale  $y \in [-1, 1]$ , le domaine est la bande verticale  $] -1, 1[ \times [-1, 1]$ . Au-delà (pour  $|y| > 1$ ), le domaine s'évase

symétriquement et correspond à la région strictement comprise entre les droites diagonales d'équations  $y = x$  et  $y = -x$ . L'ensemble ressemble à un sablier vertical dont la partie la plus resserrée a une largeur de 2.

2. Les fonctions  $u_n$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathcal{D}$ .

- Dérivée partielle par rapport à  $x$  : Soit  $y \in \mathbb{R}$  fixé. La fonction  $x \mapsto f(x, y)$  est la somme d'une série entière en la variable  $x$ , de rayon de convergence  $R = \max(1, |y|)$ . D'après le théorème de dérivation des séries entières, sa somme est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur l'intervalle ouvert  $] -R, R[$  et on peut la dériver terme à terme :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2nx^{2n-1}}{1+y^{2n}}$$

- Dérivée partielle par rapport à  $y$  : À  $x$  fixé, calculons la dérivée formelle du terme général par rapport à  $y$  :

$$\frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y) = x^{2n} \frac{\partial}{\partial y} ((1+y^{2n})^{-1}) = -\frac{x^{2n}(2ny^{2n-1})}{(1+y^{2n})^2}$$

Sur tout segment (compact) strictement inclus dans l'intervalle de définition selon  $y$ , on peut montrer que la série des dérivées converge normalement (le terme général en  $O(1/y^{2n+1})$  est écrasé par le critère de d'Alembert ou Riemann). Le théorème de dérivation terme à terme pour les séries de fonctions s'applique, ce qui donne :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2nx^{2n}y^{2n-1}}{(1+y^{2n})^2}$$

### Exercice 2 (Mines 2025) :

#### Quelques indications :

- 1. La définition de l'indice de nilpotence cache un argument élémentaire sur les entiers (toute partie non vide de  $\mathbb{N}$  admet un minimum). Pour borner cet indice par 4, utilisez le théorème de Cayley-Hamilton en remarquant que le polynôme caractéristique d'une matrice nilpotente de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$  est nécessairement  $X^4$ .
- 2. Si  $p = 4$ , on a  $A^3 \neq 0$ . Il existe donc un vecteur  $x$  qui n'est pas "tué" par  $A^3$ . Construisez la famille cyclique  $\mathcal{B} = (A^3x, A^2x, Ax, x)$ . Écrivez la matrice de l'endomorphisme dans cette nouvelle base pour voir apparaître la solution.

#### Solution :

1. La matrice  $A$  vérifie  $A^k = 0$ , elle est donc nilpotente. Considérons l'ensemble  $I = \{m \in \mathbb{N}^* \mid A^m = 0\}$ . Cet ensemble est une partie non vide de  $\mathbb{N}^*$  (puisqu'il contient  $k$ ). D'après la propriété fondamentale des entiers naturels, toute partie non vide de  $\mathbb{N}^*$  admet un plus petit élément. Posons  $p = \min(I)$ .
  - Comme  $p \in I$ , on a immédiatement  $A^p = 0$ .
  - Comme  $p$  est le minimum strict de  $I$ , l'entier  $p - 1$  (s'il est  $\geq 1$ ) n'appartient pas à  $I$ , ce qui signifie que  $A^{p-1} \neq 0$ . (Et si  $p = 1$ , par convention  $A^0 = I_4 \neq 0$ ).

L'entier  $p$  est unique par l'unicité du minimum d'un sous-ensemble de  $\mathbb{N}$ .

Par ailleurs,  $A$  étant nilpotente dans  $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ , sa seule valeur propre possible est 0. Son polynôme caractéristique est donc entièrement scindé et s'écrit  $\chi_A(X) = X^4$ . D'après le théorème de Cayley-Hamilton, la matrice annule son polynôme caractéristique :  $\chi_A(A) = 0$ , c'est-à-dire  $A^4 = 0$ . Ainsi,  $4 \in I$ . Puisque  $p$  est le minimum de  $I$ , on en déduit que  $p \leq 4$ .

2. On suppose désormais que  $p = 4$ . Cela signifie que  $A^4 = 0$  et  $A^3 \neq 0$ . Puisque  $A^3$  n'est pas la matrice nulle, il existe un vecteur colonne  $x \in \mathbb{C}^4$  tel que  $A^3x \neq 0_E$ . Considérons la famille de vecteurs  $\mathcal{B} = (A^3x, A^2x, Ax, x)$ .

Montrons que la famille  $\mathcal{B}$  est libre. Soient  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{C}$  tels que :

$$\lambda_1 A^3x + \lambda_2 A^2x + \lambda_3 Ax + \lambda_4 x = 0_E$$

Multiplions cette égalité à gauche par la matrice  $A^3$ . En utilisant le fait que  $A^4 = A^5 = A^6 = 0$ , tous les termes s'annulent sauf le dernier :

$$\lambda_4 A^3x = 0_E$$

Or  $A^3x \neq 0_E$ , ce qui implique  $\lambda_4 = 0$ . L'équation de liaison se réduit donc à  $\lambda_1 A^3x + \lambda_2 A^2x + \lambda_3 Ax = 0_E$ . Multiplions maintenant cette nouvelle équation par  $A^2$ . Les termes en  $A^4x$  et  $A^5x$  s'annulent :

$$\lambda_3 A^3x = 0_E \implies \lambda_3 = 0$$

De proche en proche, en multipliant par  $A$  puis par  $I_4$ , on obtient successivement  $\lambda_2 = 0$  puis  $\lambda_1 = 0$ . La famille  $\mathcal{B}$  est donc libre. Comme elle comporte 4 vecteurs dans un espace de dimension 4 ( $\mathbb{C}^4$ ), c'est une base de  $\mathbb{C}^4$ .

Déterminons la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$  dans cette base  $\mathcal{B}$ . Notons  $e_1 = A^3x$ ,  $e_2 = A^2x$ ,  $e_3 = Ax$ , et  $e_4 = x$ . Calculons l'image de chaque vecteur de base :

- $Ae_1 = A(A^3x) = A^4x = 0_E$
- $Ae_2 = A(A^2x) = A^3x = e_1$
- $Ae_3 = A(Ax) = A^2x = e_2$
- $Ae_4 = A(x) = Ax = e_3$

En écrivant les coordonnées de ces images en colonnes, on obtient la matrice représentative dans la base  $\mathcal{B}$  :

$$M_{\mathcal{B}}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Deux matrices représentant le même endomorphisme (dans des bases différentes) étant semblables,  $A$  est bien semblable à cette matrice.