

Exercice 1 (Mines Telecom 2025) :

Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que $f + f^3 = 0$ et $f \neq 0$. On note A sa matrice associée.

1. Montrer que A n'est pas inversible.
2. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f^2 + \text{Id})$.
3. En déduire les dimensions respectives de $\text{Ker}(f)$ et $\text{Ker}(f^2 + \text{Id})$, puis déterminer la forme de la matrice de f dans une base adaptée.

Solution :

1. Pour aborder cette question, on peut raisonner directement sur le polynôme annulateur. L'équation de l'énoncé se réécrit $f^3 + f = 0$. Cela signifie que le polynôme $P(X) = X^3 + X = X(X^2 + 1)$ annule l'endomorphisme f . Si on suppose par l'absurde que A est inversible, cela équivaut à dire que f est un automorphisme. On pourrait alors composer notre équation $f^3 + f = 0$ par l'inverse f^{-1} , ce qui donnerait $f^2 + \text{Id} = 0$. En passant au déterminant, on obtiendrait $\det(f^2) = \det(-\text{Id})$. Puisque nous sommes dans l'espace \mathbb{R}^3 qui est de dimension 3 (un nombre impair), le déterminant de l'opposé de l'identité vaut $(-1)^3 = -1$. De l'autre côté, on a $\det(f^2) = \det(f)^2$, qui est nécessairement un nombre réel positif ou nul. Avoir un carré parfait réel égal à -1 est une contradiction absolue. L'hypothèse de départ est donc fautive : A n'est pas inversible.
2. La forme du polynôme annulateur factorisé $X(X^2 + 1)$ est une invitation explicite à utiliser le lemme des noyaux. Considérons les polynômes $P_1(X) = X$ et $P_2(X) = X^2 + 1$. Ces deux polynômes n'ont aucune racine commune dans les complexes (le premier s'annule en 0, le second en i et $-i$). Ils sont donc premiers entre eux. On peut d'ailleurs le vérifier avec une relation de Bézout évidente : $1 = (X^2 + 1) - X(X)$. Puisque le polynôme produit $P_1(X)P_2(X)$ annule f , le lemme des noyaux nous assure directement que l'espace entier se décompose en somme directe des noyaux de $P_1(f)$ et $P_2(f)$. On obtient donc instantanément l'égalité demandée :

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f^2 + \text{Id})$$

Cependant, le lemme des noyaux général n'étant pas formellement au programme de la filière PSI, le jury s'attend très souvent à ce que l'on sache redémontrer ce résultat "à la main" sur un cas concret. C'est en réalité très rapide grâce à la relation de Bézout trouvée juste au-dessus. Voici la rédaction parfaite pour l'oral : 1. L'intersection est réduite au vecteur nul Soit $x \in \text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(f^2 + \text{Id})$. Par définition, on a simultanément $f(x) = 0$ et $f^2(x) + x = 0$. Puisque $f(x) = 0$, on a obligatoirement $f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$. En réinjectant ceci dans la seconde équation, on obtient $0 + x = 0$, soit $x = 0$. L'intersection est donc directe : $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(f^2 + \text{Id}) = \{0\}$. 2. La somme engendre l'espace entier C'est ici qu'intervient l'astuce de Bézout : l'égalité polynomiale $1 = (X^2 + 1) - X^2$. En l'appliquant à l'endomorphisme f , on obtient une décomposition identitaire très pratique :

$$\text{Id} = (f^2 + \text{Id}) - f^2$$

Pour n'importe quel vecteur $x \in \mathbb{R}^3$, on peut donc forcer son écriture sous la forme :

$$x = \text{Id}(x) = \underbrace{(f^2 + \text{Id})(x)}_{:=x_1} + \underbrace{(-f^2)(x)}_{:=x_2}$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que ces deux morceaux appartiennent aux bons sous-espaces : Vérifions x_1 : on calcule $f(x_1) = f(f^2(x) + x) = f^3(x) + f(x)$. Or le polynôme $X^3 + X$ annule

f , donc $f^3(x) + f(x) = 0$. Ainsi, $x_1 \in \text{Ker}(f)$. Vérifions x_2 : on calcule $(f^2 + \text{Id})(x_2) = (f^2 + \text{Id})(-f^2(x)) = -f^4(x) - f^2(x) = -f(f^3(x) + f(x)) = -f(0) = 0$. Ainsi, $x_2 \in \text{Ker}(f^2 + \text{Id})$. Tout vecteur de l'espace se décompose donc comme la somme d'un vecteur de $\text{Ker}(f)$ et d'un vecteur de $\text{Ker}(f^2 + \text{Id})$. La démonstration est complète, les deux espaces sont bien supplémentaires en dimension 3.

3. Pour trouver les dimensions, analysons les deux sous-espaces que l'on vient de mettre en évidence. Notons d la dimension de $\text{Ker}(f^2 + \text{Id})$. Si l'on restreint l'endomorphisme f à ce sous-espace, il vérifie l'équation $f^2 = -\text{Id}$. Comme on l'a vu à la question 1, prendre le déterminant d'une telle relation implique que la dimension de l'espace sur lequel on travaille doit obligatoirement être paire. La dimension d ne peut donc valoir que 0 ou 2 (puisque l'espace total est de dimension 3). Si $d = 0$, la somme directe de la question 2 implique que $\text{Ker}(f)$ est de dimension 3, c'est-à-dire que f est l'endomorphisme nul. Or, l'énoncé précise explicitement que $f \neq 0$. Par conséquent, la dimension de $\text{Ker}(f^2 + \text{Id})$ est exactement 2. Par complémentarité de la somme directe en dimension 3, la dimension de $\text{Ker}(f)$ est obligatoirement 1. Cela nous donne la structure de la matrice. En choisissant un vecteur de base pour le noyau, et deux vecteurs pour le plan où $f^2 = -\text{Id}$ (sur lequel f se comporte invariablement comme une rotation de quart de tour), on conclut qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f s'écrit de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (Mines Telecom 2025)

Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Calculer :

1. $\mathbb{E}(X - \lambda)$
2. $\mathbb{E}(|X - \lambda|)$

Solution :

1. La première question est une simple vérification de la compréhension du cours sur les variables aléatoires. Le passage à l'espérance est une opération parfaitement linéaire. On peut donc distribuer l'espérance sur notre différence : $\mathbb{E}(X - \lambda) = \mathbb{E}(X) - \lambda$. Or, on sait d'après le cours que l'espérance d'une loi de Poisson de paramètre λ est précisément égale à λ . Le résultat coule de source : $\mathbb{E}(X - \lambda) = \lambda - \lambda = 0$.
2. L'apparition de la valeur absolue rend l'espérance non linéaire, ce qui bloque l'utilisation directe des propriétés habituelles. Pour s'en sortir, il faut revenir à la définition fondamentale de l'espérance sous forme de série temporelle, et faire appel à une astuce de découpage très élégante. On cherche à calculer la somme de $|k - \lambda| \mathbb{P}(X = k)$ pour k allant de 0 à l'infini. L'idée maîtresse est de séparer la somme en deux parties pour faire sauter la valeur absolue : d'un côté les entiers k inférieurs ou égaux à λ , et de l'autre ceux qui sont strictement supérieurs. Notons $m = \lfloor \lambda \rfloor$ la partie entière de λ , c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à λ . Puisque $\mathbb{E}(X - \lambda) = 0$, on sait que la somme de $(k - \lambda) \mathbb{P}(X = k)$ sur tous les entiers vaut 0. Cela signifie que la somme sur la partie positive compense exactement la somme sur la partie négative. Grâce à cette symétrie des masses autour de la moyenne, l'espérance de la valeur absolue est simplement égale à deux fois la somme sur la partie de gauche (là où $\lambda - k$ est positif) :

$$\mathbb{E}(|X - \lambda|) = 2 \sum_{k=0}^m (\lambda - k) \mathbb{P}(X = k)$$

Séparons cette somme en deux termes :

$$\mathbb{E}(|X - \lambda|) = 2\lambda \sum_{k=0}^m \mathbb{P}(X = k) - 2 \sum_{k=1}^m k \mathbb{P}(X = k)$$

(On peut commencer la deuxième somme à 1 puisque le terme pour $k = 0$ est de toute façon nul). Manipulons maintenant le terme $k \mathbb{P}(X = k)$. En remplaçant par l'expression de la loi de Poisson :

$$k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \mathbb{P}(X = k-1)$$

C'est le phénomène de la loi de Poisson : multiplier par k crée un décalage d'indice. En réinjectant cette identité dans notre deuxième somme, on trouve :

$$\sum_{k=1}^m k \mathbb{P}(X = k) = \lambda \sum_{k=1}^m \mathbb{P}(X = k-1)$$

En effectuant le changement d'indice $j = k-1$, cette somme devient exactement $\lambda \sum_{j=0}^{m-1} \mathbb{P}(X = j)$. Regardons maintenant la différence de nos deux sommes principales. On a deux fois le facteur λ , et presque tous les termes de probabilité vont se télescoper et s'annuler entre la somme allant jusqu'à m et celle allant jusqu'à $m-1$. Il ne restera de ce grand nettoyage que le tout dernier terme de la première somme, c'est-à-dire celui pour l'indice m .

$$\mathbb{E}(|X - \lambda|) = 2\lambda \mathbb{P}(X = m)$$

Il ne reste plus qu'à remplacer m par sa valeur explicite pour conclure la démonstration de manière très propre.

$$\mathbb{E}(|X - \lambda|) = 2\lambda e^{-\lambda} \frac{\lambda^{[\lambda]}}{[\lambda]!}$$

Exercice 1 (Mines Télécom 2025) :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = -\text{id}_E$ et $\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle = 0$.

1. Montrer que la dimension n de E est paire. On note $n = 2p$.
2. Montrer que $(u(x), x)$ est libre pour tout $x \neq 0$.
3. Montrer qu'il existe des vecteurs e_1, \dots, e_p tels que la famille $(e_1, u(e_1), \dots, e_p, u(e_p))$ soit orthonormale.
4. En déduire que u est une isométrie.

Solution :

1. Pour attaquer cette question sur la parité de la dimension, le réflexe en algèbre linéaire est de passer par le déterminant, ou le théorème du rang, ici au vu de l'égalité que vérifie u on va plutôt passer par le det. L'équation fonctionnelle $u^2 = -\text{id}_E$ nous donne une relation matricielle simple. Appliquons le déterminant de chaque côté :

$$\det(u^2) = \det(-\text{id}_E)$$

Par multiplicativité du déterminant, le membre de gauche vaut $\det(u)^2$. Comme nous travaillons dans un espace euclidien (donc sur le corps des réels), le déterminant de u est un nombre réel. Son carré est par conséquent positif ou nul : $\det(u)^2 \geq 0$. Le membre de droite, quant à lui, vaut $(-1)^n \det(\text{id}_E) = (-1)^n$. On aboutit donc à l'inégalité $(-1)^n \geq 0$. La seule possibilité pour qu'une puissance de -1 soit positive est que l'exposant n soit un entier pair. On pose donc légitimement $n = 2p$.

2. L'indépendance linéaire de deux vecteurs se vérifie en posant une combinaison linéaire nulle. Soit $x \in E$ tel que $x \neq 0$. Supposons qu'il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\lambda u(x) + \mu x = 0$$

Pour isoler l'un des coefficients, l'astuce naturelle dans un espace préhilbertien est d'utiliser le produit scalaire. Faisons le produit scalaire de cette équation avec le vecteur x :

$$\langle \lambda u(x) + \mu x, x \rangle = 0$$

Par linéarité à gauche, cela donne $\lambda \langle u(x), x \rangle + \mu \langle x, x \rangle = 0$. L'hypothèse de l'énoncé nous dit exactement que $\langle u(x), x \rangle = 0$. L'équation s'effondre et il ne reste que $\mu \|x\|^2 = 0$. Puisque x est un vecteur non nul, sa norme est strictement positive. On en déduit obligatoirement que $\mu = 0$. En réinjectant ce résultat dans la combinaison de départ, on obtient $\lambda u(x) = 0$. Or, $u(x)$ ne peut pas être le vecteur nul (sinon on aurait $u^2(x) = u(0) = 0$, ce qui contredirait $u^2(x) = -x \neq 0$). Puisque $u(x) \neq 0$, on a nécessairement $\lambda = 0$. Les deux coefficients étant nuls, la famille $(u(x), x)$ est bien libre.

3. Pour construire une base orthonormale par blocs, la méthode reine est la récurrence sur la dimension de l'espace, en extrayant des plans stables orthogonaux. Pour que cela fonctionne, nous avons besoin d'une propriété cruciale : si un sous-espace F est stable par u , son orthogonal F^\perp doit l'être aussi. Cela équivaut à dire que l'endomorphisme est antisymétrique

($u^* = -u$). Vérifions si notre hypothèse cache cette antisymétrie. Pour tout couple de vecteurs (x, y) , évaluons $\langle u(x+y), x+y \rangle$, qui doit valoir 0 :

$$\langle u(x) + u(y), x + y \rangle = \langle u(x), x \rangle + \langle u(x), y \rangle + \langle u(y), x \rangle + \langle u(y), y \rangle = 0$$

Les termes croisés survivent et nous donnent la relation fondamentale :

$$\langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle$$

L'endomorphisme u est donc bien antisymétrique. Remarquons au passage une conséquence immédiate sur la norme : $\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x) \rangle = -\langle x, u^2(x) \rangle = -\langle x, -x \rangle = \|x\|^2$. L'endomorphisme u conserve la norme.

Procédons maintenant à la construction par récurrence sur p (où $\dim(E) = 2p$). Si $p = 1$ (dimension 2), il suffit de choisir un vecteur e_1 de norme 1. On sait par hypothèse que $u(e_1)$ est orthogonal à e_1 . De plus, on vient de voir que $\|u(e_1)\| = \|e_1\| = 1$. La famille $(e_1, u(e_1))$ est donc une base orthonormale, ce qui initialise la récurrence.

Supposons le résultat vrai pour un espace de dimension $2(p-1)$. Dans notre espace E de dimension $2p$, choisissons un vecteur unitaire e_1 . On pose $F = \text{Vect}(e_1, u(e_1))$. C'est un plan stable par u , et la famille $(e_1, u(e_1))$ est orthonormale. Considérons F^\perp , l'orthogonal de ce plan. Comme u est antisymétrique, F^\perp est stable par u . De plus, $\dim(F^\perp) = 2p - 2 = 2(p-1)$. La restriction de u à F^\perp vérifie évidemment les mêmes hypothèses que u . Par hypothèse de récurrence, on peut trouver dans F^\perp une famille orthonormale $(e_2, u(e_2), \dots, e_p, u(e_p))$. En recollant le plan F et son orthogonal F^\perp , on obtient bien notre famille orthonormale de $2p$ vecteurs, qui forme une base de E .

4. La question nous demande de déduire que u est une isométrie. Même si nous avons déjà senti ce résultat via la norme dans la question précédente, le mot "déduire" nous invite à utiliser la base fraîchement construite pour conclure de manière purement algébrique. Une isométrie est un endomorphisme qui transforme une base orthonormale en une autre base orthonormale. Regardons l'image de notre base $\mathcal{B} = (e_1, u(e_1), \dots, e_p, u(e_p))$ par l'endomorphisme u . Pour chaque indice k , on a : $-u(e_k)$ qui est simplement le vecteur suivant dans le bloc. $-u(u(e_k)) = u^2(e_k) = -e_k$. L'image de la base \mathcal{B} est donc la famille $(u(e_1), -e_1, \dots, u(e_p), -e_p)$. À des signes près et à une permutation près, il s'agit exactement des mêmes vecteurs que ceux de la base \mathcal{B} . Puisque changer le signe ou l'ordre des vecteurs d'une base orthonormale donne toujours une base orthonormale, l'image de notre base \mathcal{B} est bien une base orthonormale de E . L'endomorphisme u préserve l'orthonormalité, c'est donc une isométrie (on dit aussi un endomorphisme orthogonal).

Exercice 2 (Mines Telecom 2025) :

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$ en montrant la convergence de la série et de l'intégrale.

Solution :

L'énoncé nous guide vers un pont entre le monde continu (l'intégrale) et le monde discret (la série). Le chaînon manquant classique pour relier une exponentielle au dénominateur avec une série est le développement en série géométrique. Posons $f(t) = \frac{\sin t}{e^t - 1}$.

Commençons par justifier la bonne définition de l'intégrale sur $]0, +\infty[$. La fonction f est continue sur l'intervalle ouvert. Au voisinage de 0, on effectue un équivalent simple. On sait que $\sin t \sim t$ et que $e^t - 1 \sim t$. Par quotient, $f(t) \sim \frac{t}{t} = 1$. La fonction admet une limite finie en 0, elle y est donc prolongeable par continuité. C'est une fausse singularité, l'intégrale est parfaitement convergente en 0. Au voisinage de $+\infty$, on majore le numérateur oscillant par 1. On obtient $|f(t)| \leq \frac{1}{e^t - 1}$. Pour t grand, $e^t - 1 \sim e^t$, donc notre majorant est équivalent à e^{-t} . L'exponentielle décroissante étant intégrable sur $[1, +\infty[$, notre fonction l'est également par théorème de majoration. L'intégrale existe bien.

Passons maintenant au cœur du calcul. Factorisons le dénominateur par e^t pour faire apparaître un terme strictement inférieur à 1 :

$$f(t) = \frac{\sin t}{e^t(1 - e^{-t})} = \sin(t)e^{-t} \frac{1}{1 - e^{-t}}$$

Pour tout $t > 0$, on a $0 < e^{-t} < 1$. On reconnaît la somme d'une série géométrique de raison e^{-t} :

$$f(t) = \sin(t)e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-t})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(t)e^{-(n+1)t}$$

Pour plus de clarté, effectuons un décalage d'indice en posant $k = n + 1$ (qui ira de 1 à $+\infty$) :

$$f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sin(t)e^{-kt}$$

Notre intégrale initiale devient donc l'intégrale d'une somme infinie. Pour intervertir les deux symboles \int et \sum , on fait appel au théorème d'intégration terme à terme. Pour cela, il faut vérifier que la série des intégrales des valeurs absolues est convergente. Considérons l'intégrale de la valeur absolue du terme général :

$$\int_0^{+\infty} |\sin(t)e^{-kt}| dt$$

On peut utiliser la majoration brutale $|\sin t| \leq t$, très efficace ici :

$$\int_0^{+\infty} |\sin(t)|e^{-kt} dt \leq \int_0^{+\infty} te^{-kt} dt$$

Cette dernière intégrale se calcule facilement par une intégration par parties (ou via la fonction Gamma), et elle vaut exactement $\frac{1}{k^2}$. Puisque la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^2}$ est convergente (exposant $2 > 1$), le théorème d'intégration terme à terme s'applique à la perfection.

On peut donc inverser la somme et l'intégrale, ce qui nous ramène à calculer l'intégrale du terme général sans les valeurs absolues :

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-nt} dt$$

Pour calculer cette intégrale de la forme "trigonométrique fois exponentielle", le plus élégant est de passer par les complexes, en remarquant que $\sin(t)$ est la partie imaginaire de e^{it} .

$$\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-nt} dt = \text{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{it}e^{-nt} dt \right) = \text{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{(i-n)t} dt \right)$$

La primitive d'une exponentielle complexe est directe :

$$\int_0^{+\infty} e^{(i-n)t} dt = \left[\frac{e^{(i-n)t}}{i-n} \right]_0^{+\infty}$$

En l'infini, la limite est nulle car la partie réelle de l'exposant ($-n$) est strictement négative, forçant le module à tendre vers zéro. En zéro, la valeur est simplement $\frac{1}{i-n}$. On obtient donc :

$$\text{Im} \left(0 - \frac{1}{i-n} \right) = \text{Im} \left(\frac{1}{n-i} \right)$$

Pour extraire la partie imaginaire, on multiplie par la quantité conjuguée $n+i$ au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{1}{n-i} = \frac{n+i}{(n-i)(n+i)} = \frac{n+i}{n^2-i^2} = \frac{n+i}{n^2+1}$$

La partie imaginaire de cette fraction est lue directement sur le numérateur : c'est $\frac{1}{n^2+1}$. En réinjectant ce calcul explicite dans notre somme, on aboutit exactement à la formule magique demandée :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

Exercice 1 (CCINP 2025) :

On pose : $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Montrer que f est bien définie et \mathcal{C}^0 sur $]0, +\infty[$. Déterminer f' .

2. (a) Montrer que : $\forall x > 0, f(x) \leq \frac{e^{-x}}{x}$.

(b) Montrer que $\forall x > 0, f(x) = -e^{-x} \ln x + \int_x^{+\infty} e^{-t} \ln t dt$.

(c) Montrer que f est intégrable sur $]0, +\infty[$.

3. Calculer $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ à l'aide d'une intégration par parties.

Solution :

1. L'intégrande $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est une fonction continue et strictement positive sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Pour s'assurer que l'intégrale définissant $f(x)$ converge pour un $x > 0$ fixé, il suffit d'étudier le comportement en $+\infty$. Par croissances comparées, la fonction est dominée par $1/t^2$, c'est-à-dire que $\frac{e^{-t}}{t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ quand t tend vers $+\infty$. Comme l'intégrale de Riemann de $1/t^2$ converge en $+\infty$, notre intégrale est bien définie. La fonction f existe sur $]0, +\infty[$.

Pour la régularité, on peut interpréter $f(x)$ comme le reste d'une intégrale convergente en coupant la relation de Chasles en 1 :

$$f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt$$

D'après le théorème fondamental de l'analyse, l'intégrale de 1 à x d'une fonction continue est de classe \mathcal{C}^1 . La fonction f est donc une fonction de classe \mathcal{C}^1 (ce qui implique a fortiori qu'elle est \mathcal{C}^0). En dérivant cette expression, la constante s'annule et on récupère simplement l'opposé de l'intégrande évalué en x :

$$f'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$$

2. (a) L'idée est de majorer l'intégrande directement sur son domaine d'intégration. Puisque l'on intègre la variable t de x à $+\infty$, on a toujours $t \geq x$. Comme $x > 0$, la fonction inverse décroît et on obtient $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{x}$. En multipliant par l'exponentielle qui est positive, on a $\frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{e^{-t}}{x}$. On intègre cette inégalité entre x et $+\infty$, une opération qui conserve l'ordre :

$$f(x) \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x} dt = \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt$$

Le calcul de cette dernière intégrale est primitif : la valeur est $[-e^{-t}]_x^{+\infty}$, ce qui donne e^{-x} . On obtient bien $f(x) \leq \frac{e^{-x}}{x}$.

(b) Pour faire apparaître un logarithme à partir d'un terme en $1/t$, l'outil parfait est l'intégration par parties. Posons $u'(t) = 1/t$ et $v(t) = e^{-t}$. On a alors logiquement $u(t) = \ln t$ et $v'(t) = -e^{-t}$. Ces fonctions sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[x, +\infty[$. Le terme de crochet s'écrit $[e^{-t} \ln t]_x^{+\infty}$. En $+\infty$, par croissances comparées, l'exponentielle écrase le logarithme, la limite est donc nulle. En x , le crochet vaut $e^{-x} \ln x$. L'intégration par parties s'applique (avec la correction de la borne inférieure de l'énoncé) :

$$f(x) = [e^{-t} \ln t]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} (-e^{-t} \ln t) dt = -e^{-x} \ln x + \int_x^{+\infty} e^{-t} \ln t dt$$

- (c) Pour statuer sur l'intégrabilité de f sur $]0, +\infty[$, il faut l'étudier en $+\infty$ et en 0 . En $+\infty$, la majoration de la question 2.a nous donne $0 \leq f(x) \leq \frac{e^{-x}}{x}$. Pour $x \geq 1$, on a $\frac{e^{-x}}{x} \leq e^{-x}$. Cette exponentielle décroissante est intégrable, donc par majoration, f est intégrable en $+\infty$. Au voisinage de 0^+ , on s'appuie sur la question 2.b. La fonction $t \mapsto e^{-t} \ln t$ est équivalente à $\ln t$ en 0 , elle y est donc intégrable. L'intégrale $\int_x^{+\infty} e^{-t} \ln t dt$ admet par conséquent une limite finie quand $x \rightarrow 0$. Le terme $-e^{-x} \ln x$, quant à lui, est équivalent à $-\ln x$ quand $x \rightarrow 0^+$. Globalement, au voisinage de 0 , la fonction $f(x)$ se comporte comme $-\ln x$ à une constante additive près. Puisque la fonction logarithme est intégrable en 0 , f l'est également.
3. Pour calculer l'intégrale de f , on va réaliser une nouvelle intégration par parties en exploitant la dérivée f' trouvée à la toute première question. Intégrons d'abord sur un segment $[a, X]$ pour éviter les soucis aux bornes. Posons $u(t) = f(t)$ et $v'(t) = 1$, ce qui donne $u'(t) = -\frac{e^{-t}}{t}$ et $v(t) = t$. L'intégration par parties donne :

$$\int_a^X f(t) dt = [tf(t)]_a^X - \int_a^X t \left(-\frac{e^{-t}}{t} \right) dt = Xf(X) - af(a) + \int_a^X e^{-t} dt$$

Observons le comportement de nos termes de bord lors du passage à la limite : Quand $X \rightarrow +\infty$, d'après 2.a, on a $0 \leq Xf(X) \leq e^{-X}$, donc $Xf(X)$ tend vers 0 . Quand $a \rightarrow 0^+$, d'après 2.b, $af(a) = -ae^{-a} \ln a + a \int_a^{+\infty} e^{-t} \ln t dt$. Par croissances comparées, le terme $a \ln a$ s'écrase vers 0 , tout comme le terme avec l'intégrale convergente. Ainsi, $af(a)$ tend vers 0 . En faisant tendre a vers 0 et X vers $+\infty$, l'équation se réduit magnifiquement à :

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$$

Exercice 2 (CCINP 2025) :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A commute avec A^\top .

1. Montrer que $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^\top)$.
2. Montrer que $\text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(A)$ sont supplémentaires orthogonaux.

Solution :

1. Avoir une matrice qui commute avec sa transposée est la définition même d'une matrice normale. Pour exploiter cette symétrie cachée et relier les noyaux, l'outil le plus puissant est la norme euclidienne canonique et le produit scalaire usuel $\langle u, v \rangle = u^\top v$. Pour tout vecteur colonne x , évaluons la norme au carré du vecteur Ax :

$$\|Ax\|^2 = (Ax)^\top (Ax) = x^\top A^\top Ax$$

C'est ici qu'intervient l'hypothèse de l'énoncé. Puisque A et A^\top commutent, on peut intervertir le produit central :

$$x^\top A^\top Ax = x^\top AA^\top x = (A^\top x)^\top (A^\top x) = \|A^\top x\|^2$$

On obtient donc la remarquable propriété géométrique : $\|Ax\| = \|A^\top x\|$. Un vecteur x appartient à $\text{Ker}(A)$ si et seulement si sa norme $\|Ax\|$ est nulle. D'après notre égalité stricte, cela équivaut exactement à $\|A^\top x\| = 0$, ce qui signifie que x appartient à $\text{Ker}(A^\top)$. Les deux espaces sont donc parfaitement identiques.

2. La question nous demande de prouver que deux espaces forment une somme directe orthogonale. Procédons par étapes, en commençant par l'orthogonalité qui est souvent le plus direct. Soit un vecteur $x \in \text{Ker}(A)$ et un vecteur $y \in \text{Im}(A)$. Par définition de l'image, il existe un certain vecteur z tel que $y = Az$. Calculons le produit scalaire entre x et y pour tester leur orthogonalité :

$$\langle x, y \rangle = x^\top y = x^\top (Az) = (A^\top x)^\top z$$

Or, d'après la conclusion de la première question, puisque x est dans $\text{Ker}(A)$, il réside également dans $\text{Ker}(A^\top)$. Cela se traduit par $A^\top x = 0$. Le produit scalaire s'annule instantanément : $\langle x, y \rangle = 0$. On a bien démontré que l'espace $\text{Ker}(A)$ est orthogonal à l'espace $\text{Im}(A)$.

Pour conclure qu'ils sont supplémentaires, il suffit de convoquer un argument de dimension. D'après le célèbre théorème du rang, la somme de leurs dimensions donne la dimension de l'espace total :

$$\dim(\text{Ker}(A)) + \dim(\text{Im}(A)) = n$$

En algèbre linéaire euclidienne, deux sous-espaces orthogonaux dont la somme des dimensions atteint la dimension de l'espace ambiant sont automatiquement des supplémentaires orthogonaux.

Exercice 1 (Mines 2025) :

Soit $\varphi_0 : x \mapsto e^{-x^2}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $H_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :
 $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_0^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) e^{-x^2}$
2. Montrer que : $(P, Q) \mapsto (P|Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x^2} dx$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
3. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall P \in \mathbb{R}[X], (H_n|P) = (H_{n-1}|P')$.
 (b) Montrer que $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme une famille orthogonale.
 (c) Calculer $\|H_n\|^2$.
 (d) On considère la série $\sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} H_n(x)$. Nature et valeur éventuelle.

Solution :

1. Raisonnons par récurrence sur l'entier n . Pour $n = 0$, la dérivée d'ordre 0 est la fonction elle-même : $\varphi_0^{(0)}(x) = e^{-x^2}$. On peut écrire cela sous la forme $(-1)^0 \times 1 \times e^{-x^2}$. Le polynôme constant $H_0 = 1$ convient, il est bien de degré 0, ce qui initialise la récurrence.

Supposons que la propriété soit vraie à un certain rang n . On a donc $\varphi_0^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) e^{-x^2}$. Pour passer au rang $n + 1$, il suffit de dériver cette expression en utilisant la règle du produit :

$$\varphi_0^{(n+1)}(x) = (-1)^n \left(H_n'(x) e^{-x^2} + H_n(x) (-2x e^{-x^2}) \right)$$

En factorisant par le terme en exponentielle et en ajustant le signe $(-1)^{n+1}$, on obtient :

$$\varphi_0^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} (2x H_n(x) - H_n'(x)) e^{-x^2}$$

On pose alors naturellement le polynôme $H_{n+1}(X) = 2X H_n(X) - H_n'(X)$. D'après l'hypothèse de récurrence, H_n est de degré n . La multiplication par $2X$ produit un terme de degré $n + 1$, tandis que la dérivation H_n' produit un terme de degré $n - 1$. Le polynôme H_{n+1} est donc exactement de degré $n + 1$, ce qui valide l'hérédité. Enfin, l'unicité est immédiate : si deux polynômes satisfaisaient cette équation, leur différence multipliée par e^{-x^2} serait nulle. L'exponentielle ne s'annulant jamais, la différence des polynômes serait nulle, prouvant qu'il n'y a qu'un seul H_n possible.

2. L'application $(P|Q)$ est clairement symétrique et linéaire par rapport à sa première variable grâce à la linéarité de l'intégrale (elle est donc bilinéaire). L'intégrale est bien définie car pour tout polynôme $M(x)$, le produit $M(x)e^{-x^2}$ est un petit $o(1/x^2)$ en $\pm\infty$ par croissances comparées, assurant une convergence absolue. Pour le caractère positif : $(P|P) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)^2 e^{-x^2} dx$. L'intégrande est un carré multiplié par une exponentielle, c'est donc une fonction positive, et son intégrale sur \mathbb{R} l'est aussi. Pour le caractère défini : si $(P|P) = 0$, l'intégrale d'une fonction continue et positive est nulle. Cela implique que la fonction à l'intérieur est identiquement nulle sur \mathbb{R} . Ainsi $P(x)^2 e^{-x^2} = 0$ pour tout x . Comme l'exponentielle ne s'annule pas, c'est le polynôme P qui s'annule sur tout \mathbb{R} . Un polynôme ayant une infinité de racines est le polynôme nul. C'est bien un produit scalaire.
3. a) Remplaçons $H_n(x)$ par sa définition dans l'expression du produit scalaire :

$$(H_n|P) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) P(x) e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \varphi_0^{(n)}(x) P(x) dx$$

Effectuons une intégration par parties. Pour préparer le terrain, remarquons que la primitive de $(-1)^n \varphi_0^{(n)}(x)$ est $-(-1)^{n-1} \varphi_0^{(n-1)}(x)$. On pose $u(x) = P(x)$ et $v'(x) = (-1)^n \varphi_0^{(n)}(x)$.

$$(H_n|P) = \left[-P(x)(-1)^{n-1} \varphi_0^{(n-1)}(x) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x) \left(-(-1)^{n-1} \varphi_0^{(n-1)}(x) \right) dx$$

Le terme entre crochets met en compétition un polynôme et l'exponentielle contenue dans la dérivée $\varphi_0^{(n-1)}$. Par croissances comparées, ce terme s'écrase totalement et vaut 0 en $+\infty$ comme en $-\infty$. Les signes moins de l'intégrale résiduelle se compensent :

$$(H_n|P) = \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x)(-1)^{n-1} \varphi_0^{(n-1)}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x) H_{n-1}(x) e^{-x^2} dx = (H_{n-1}|P')$$

b) Pour montrer que la famille est orthogonale, prenons deux indices différents, disons m et n avec $m < n$. Évaluons leur produit scalaire en utilisant la propriété magique que l'on vient de démontrer en cascade :

$$(H_n|H_m) = (H_{n-1}|H'_m) = (H_{n-2}|H''_m) = \dots = (H_{n-m}|H_m^{(m)})$$

Or, H_m est un polynôme de degré exactement m . Si on le dérive m fois, il devient une simple constante c . On a donc $(H_n|H_m) = (H_{n-m}|c) = c(H_{n-m}|1)$. En appliquant la relation une toute dernière fois : $c(H_{n-m}|1) = c(H_{n-m-1}|0) = 0$. Le produit scalaire est nul, la famille est donc parfaitement orthogonale.

c) Pour la norme au carré, on applique la même cascade, mais cette fois les indices sont égaux.

$$\|H_n\|^2 = (H_n|H_n) = (H_{n-1}|H'_n) = \dots = (H_0|H_n^{(n)})$$

Il nous faut la dérivée n -ième de H_n . Regardons la relation de récurrence de la première question : $H_{n+1}(X) = 2XH_n(X) - H'_n(X)$. Le coefficient dominant de H_n , notons-le c_n , est multiplié par 2 à chaque étape. Comme $H_0 = 1$ (donc $c_0 = 1$), une récurrence immédiate donne $c_n = 2^n$. Ainsi, $H_n(X) = 2^n X^n + \dots$. Si on dérive ce polynôme n fois, tous les termes de degré inférieur disparaissent et le terme dominant donne la factorielle : $H_n^{(n)}(x) = 2^n n!$. On a donc $\|H_n\|^2 = (H_0|2^n n!) = 2^n n!(1|1)$. L'intégrale $(1|1)$ est l'intégrale de Gauss, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Conclusion : $\|H_n\|^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}$.

4. L'expression demandée ressemble furieusement à un développement en série de Taylor. La fonction $y \mapsto e^{-y^2}$ est indéfiniment dérivable (et même développable en série entière sur \mathbb{R}). Considérons le développement de la fonction évaluée au point $(x-t)$ par rapport à la variable t . D'après la formule de Taylor, on a :

$$f(x-t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t)^n}{n!} f^{(n)}(x)$$

Or, nous savons que $f^{(n)}(x) = \varphi_0^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) e^{-x^2}$. En injectant cela dans notre série :

$$f(x-t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t)^n}{n!} (-1)^n H_n(x) e^{-x^2} = e^{-x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x)$$

D'un autre côté, le calcul direct de la fonction évaluée en $x-t$ donne :

$$f(x-t) = e^{-(x-t)^2} = e^{-x^2+2xt-t^2} = e^{-x^2} e^{2xt-t^2}$$

En égalisant les deux expressions et en simplifiant par l'exponentielle e^{-x^2} qui ne s'annule jamais, on obtient la réponse :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) = e^{2xt-t^2}$$

La série converge pour absolument tout réel t , et sa somme est la fonction génératrice des polynômes d'Hermite.

Exercice 2 (Mines 2025) :

Dénombrer le nombre de parties A de $\llbracket 1, n \rrbracket$ ayant p éléments et telles que : $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, i \in A$ ou $i+1 \in A$.

Exercice 2

Dénombrer le nombre de parties A de $\llbracket 1, n \rrbracket$ ayant p éléments et telles que : $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, i \in A$ ou $i+1 \in A$.

Solution :

L'astuce suprême en dénombrement, quand une condition de présence est compliquée à manipuler, est de regarder son exact opposé. Compter les présences sous contrainte est difficile, comptons donc les absences.

Soit A une partie de $\llbracket 1, n \rrbracket$ comportant p éléments. Considérons son complémentaire $B = \llbracket 1, n \rrbracket \setminus A$. Ce sous-ensemble B comporte exactement $n - p$ éléments. Traduisons la condition de l'énoncé sur notre ensemble B . Dire que pour tout indice i , on a $i \in A$ ou $i+1 \in A$, c'est dire qu'il est absolument interdit d'avoir simultanément $i \notin A$ et $i+1 \notin A$. Autrement dit, il est interdit d'avoir $i \in B$ et $i+1 \in B$. La contrainte complexe sur A se transforme en une contrainte très visuelle sur B : le sous-ensemble B ne doit contenir aucun couple d'entiers consécutifs.

Le problème revient donc à placer $n - p$ éléments dans un ensemble de n places sans jamais en mettre deux côte à côte. C'est un simple jeu de chaises musicales. Alignons d'abord les p éléments de l'ensemble A (les "présents"). Ces éléments agissent comme des murs de séparation. En alignant p murs, on crée exactement $p + 1$ espaces vides : un espace tout à gauche, un espace entre chaque mur, et un espace tout à droite. Pour que les éléments de B ne soient jamais consécutifs, ils doivent être placés dans ces espaces vides, avec une règle stricte : pas plus d'un seul élément de B par espace vide (sinon ils se toucheraient).

Nous avons $n - p$ éléments de B à répartir dans ces $p + 1$ espaces disponibles. Choisir les emplacements pour construire l'ensemble B revient simplement à choisir $n - p$ espaces parmi les $p + 1$ espaces existants. Le nombre de façons de faire ce choix est donné par le coefficient binomial :

$$\binom{p+1}{n-p}$$

Bien sûr, pour que ce choix soit possible, il faut qu'il y ait suffisamment d'espaces pour loger tous les éléments de B . Il faut donc que $n - p \leq p + 1$, c'est-à-dire $n \leq 2p + 1$. Si $n > 2p + 1$, il y a trop d'absents à placer, le principe des tiroirs nous force à en mettre deux côte à côte, et le nombre cherché est tout simplement 0.

En conclusion, le nombre de parties A satisfaisant cette condition est $\binom{p+1}{n-p}$.

Exercice 1

1. Soit A une matrice carrée d'ordre n , montrer l'équivalence entre les deux propositions
i) A est nilpotente ii) $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A^2) = \dots = \text{Tr}(A^n) = 0$
2. Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n telles que $AB - BA = B$. Montrer que B est nilpotente.

Exercice 2 (Mines 2024) :

Soit f, g deux fonctions continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telles que $f \circ g = g \circ f$.

1. On suppose que $f(x) > g(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$, montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout entier naturel n , $f^n(x) \geq g^n(x) + n\alpha$.
2. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Solution de l'exercice 1 :

1. Le sens de l'implication i) vers ii) est le plus direct. Si une matrice A est nilpotente, on sait que son unique valeur propre sur les complexes est 0 (car son polynôme minimal divise X^k). En trigonalisant la matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on obtient une matrice triangulaire supérieure avec uniquement des 0 sur la diagonale. Pour tout entier $k \geq 1$, la matrice A^k sera également triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale. Puisque la trace est un invariant de similitude (la somme des éléments diagonaux), on a bien immédiatement $\text{Tr}(A^k) = 0$ pour tout k .

Le sens retour de ii) vers i) demande un peu plus de finesse algébrique. L'objectif est de montrer que la matrice n'a que 0 comme valeur propre. Travaillons dans \mathbb{C} où le polynôme caractéristique est scindé. Supposons par l'absurde que A possède p valeurs propres non nulles et distinctes, que nous noterons $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, avec $p \geq 1$. Notons m_1, \dots, m_p leurs multiplicités algébriques respectives (qui sont des entiers strictement positifs). On sait que la trace de A^k est la somme des k -ièmes puissances de toutes les valeurs propres de A . L'hypothèse s'écrit donc : pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $m_1\lambda_1^k + m_2\lambda_2^k + \dots + m_p\lambda_p^k = 0$

Comme p (le nombre de valeurs propres non nulles distinctes) est au plus égal à n , on peut extraire de cette hypothèse les p premières équations, pour k allant de 1 à p . Écrivons ce système sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{p-1} & \lambda_2^{p-1} & \dots & \lambda_p^{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1\lambda_1 \\ m_2\lambda_2 \\ \vdots \\ m_p\lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

On reconnaît à gauche une matrice de Vandermonde. Puisque nos valeurs propres λ_i sont distinctes deux à deux, cette matrice est inversible ! Le noyau de cette matrice est donc réduit au vecteur nul. Cela impose que $m_i\lambda_i = 0$ pour tout i . Comme nous avons supposé les λ_i non nuls, il faut obligatoirement que les multiplicités m_i soient nulles, ce qui est une contradiction absolue avec le fait que ce sont des multiplicités de racines. Notre hypothèse de départ est donc fautive : il n'y a aucune valeur propre non nulle. Toutes les valeurs propres valent 0. Le polynôme caractéristique de A est donc X^n . D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $A^n = 0$, donc A est nilpotente.

2. L'équation $AB - BA = B$ (qui s'apparente à une relation de crochet de Lie) fait souvent apparaître des phénomènes sympathiques lorsqu'on la combine avec des puissances. Cherchons une formule pour $AB^k - B^kA$. Faisons-le par récurrence sur l'entier k . Pour $k = 1$, l'énoncé nous donne $AB - BA = B$, l'initialisation est vérifiée. Pour l'hérédité, supposons que $AB^k - B^kA = kB^k$. Regardons au rang $k + 1$:

$$AB^{k+1} - B^{k+1}A = AB^k B - B^k AB + B^k AB - B^{k+1}A$$

On a astucieusement inséré le terme croisé $-B^k AB + B^k AB = 0$ au milieu. On peut maintenant factoriser :

$$= (AB^k - B^kA)B + B^k(AB - BA)$$

On utilise l'hypothèse de récurrence pour le premier terme et l'hypothèse de l'énoncé pour le second :

$$= (kB^k)B + B^k(B) = (k+1)B^{k+1}$$

La relation est donc démontrée pour tout $k \geq 1$.

Il ne reste plus qu'à faire le lien avec la première question en passant à la trace. On sait que pour toutes matrices X et Y , $\text{Tr}(XY) = \text{Tr}(YX)$, donc $\text{Tr}(XY - YX) = 0$. En appliquant la trace à notre relation :

$$\begin{aligned}\text{Tr}(AB^k - B^kA) &= \text{Tr}(kB^k) \\ 0 &= k\text{Tr}(B^k)\end{aligned}$$

Puisque k est un entier non nul, on en déduit que $\text{Tr}(B^k) = 0$ pour tout entier $k \geq 1$. La condition ii) de la question 1 est parfaitement remplie, on peut conclure avec certitude que la matrice B est nilpotente.

Solution de l'exercice 2 :

1. L'énoncé nous donne une inégalité stricte $f(x) > g(x)$ sur tout l'intervalle. Face à une inégalité stricte de fonctions continues sur un segment on doit penser que l'on peut minorer la différence. Posons la fonction $h(x) = f(x) - g(x)$. Elle est continue sur le segment $[0, 1]$ qui est un espace compact. D'après le théorème des bornes atteintes, la fonction h atteint son minimum sur ce segment en un certain point x_0 . Notons $\alpha = h(x_0)$. Puisque l'énoncé garantit que $f(x_0) > g(x_0)$, on a avec certitude $\alpha > 0$. On a donc isolé l'écart minimal : pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) - g(x) \geq \alpha$.

Maintenant, comment propager cet écart aux itérées f^n et g^n ? En passant de l'un à l'autre progressivement, par le biais d'une somme télescopique. Écrivons la différence $f^n(x) - g^n(x)$ comme une cascade de petites transformations, où l'on remplace les occurrences de f par des g une à une :

$$f^n(x) - g^n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (f^{n-k}(g^k(x)) - f^{n-k-1}(g^{k+1}(x)))$$

Pour exploiter notre minorant α , il faut faire apparaître l'expression $f(y) - g(y)$. C'est ici qu'intervient l'hypothèse de commutation. Puisque $f \circ g = g \circ f$, la fonction g commute avec n'importe quelle puissance de f . Transformons le terme de droite de la parenthèse : $f^{n-k-1}(g^{k+1}(x)) = f^{n-k-1} \circ g \circ g^k(x) = g \circ f^{n-k-1} \circ g^k(x)$. Posons $y_k = f^{n-k-1}(g^k(x))$. Remarquons que, puisque f et g stabilisent le segment $[0, 1]$, le réel y_k appartient bien à $[0, 1]$. Le terme général de notre somme devient alors :

$$f(y_k) - g(y_k)$$

Or, nous avons établi que cette différence est minorée par α pour absolument tout point du segment $[0, 1]$. Notre somme est constituée d'exactly n termes, chacun minoré par α . On en déduit :

$$f^n(x) - g^n(x) \geq n\alpha$$

Ce qui s'écrit bien : $f^n(x) \geq g^n(x) + n\alpha$.

2. Cette deuxième question se traite naturellement par l'absurde. Si la fonction continue $x \mapsto f(x) - g(x)$ ne s'annule jamais sur l'intervalle (c'est-à-dire qu'elle n'a pas de point d'intersection), alors par le théorème des valeurs intermédiaires, elle garde un signe strictement constant. Sans perte de généralité, supposons que $f(x) > g(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$ (si c'était l'inverse, il suffirait d'échanger les noms de f et g , leurs rôles étant parfaitement symétriques). Nous sommes donc exactement dans les conditions de la question 1. Il existe un $\alpha > 0$ tel que pour tout entier n et tout $x \in [0, 1]$,

$$f^n(x) \geq g^n(x) + n\alpha$$

Comme la fonction g est à valeurs dans $[0, 1]$, on sait que $g^n(x) \geq 0$. L'inégalité donne donc :

$$f^n(x) \geq n\alpha$$

Mais d'un autre côté, la fonction f est également à valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$. Sa n -ième itérée l'est aussi, donc on a inévitablement :

$$f^n(x) \leq 1$$

En combinant ces deux faits, on arrive à la conclusion que pour tout entier n ,

$$n\alpha \leq 1$$

Cependant, comme α est une constante strictement positive, la suite $n\alpha$ tend vers $+\infty$ lorsque n grandit. Elle va finir par dépasser 1 très rapidement (dès que $n > 1/\alpha$), ce qui rend cette inégalité complètement absurde.

L'hypothèse de départ est donc intenable. La différence $f(x) - g(x)$ doit obligatoirement changer de signe ou s'annuler. Comme elle est continue, le théorème des valeurs intermédiaires nous garantit l'existence d'au moins un point $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) - g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) = g(c)$.

Exercice 1 (CCINP 2025) : Montrer que $\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{n}} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$.

Solution :

L'objectif de cet exercice est d'invertir un signe intégral et un signe somme. Le cadre est idéal pour appliquer le théorème d'intégration terme à terme, et plus particulièrement sa version pour les fonctions positives (souvent rattachée au théorème de Beppo-Levi ou de Tonelli).

Posons pour tout entier $n \geq 1$, la fonction $f_n(t) = \frac{e^{-nt}}{\sqrt{n}}$. Pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est continue par morceaux (elle est même continue) et strictement positive sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Puisque nous n'avons affaire qu'à des quantités positives, il n'est même pas nécessaire de prouver la convergence de la série de fonctions au préalable. Il suffit de vérifier que la série des intégrales converge pour s'assurer que tout est bien défini et que l'intervention est légitime.

Calculons l'intégrale du terme général sur $]0, +\infty[$:

$$\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{n}} dt = \frac{1}{\sqrt{n}} \left[\frac{-e^{-nt}}{n} \right]_0^{+\infty}$$

En $+\infty$, l'exponentielle tend vers 0. En 0, elle vaut 1. On obtient :

$$\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

La série de terme général $\frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann. Puisque l'exposant $3/2$ est strictement supérieur à 1, cette série est convergente. La condition d'intégrabilité du théorème d'intégration terme à terme pour les fonctions positives est parfaitement remplie. On peut donc permuter la somme et l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{n}} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{n}} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

Le résultat est démontré de manière immédiate et rigoureuse.

Exercice 2 (CCINP 2025) :

Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = x - y - z + t = 0\}$.

1. Montrer que F est un plan de \mathbb{R}^4 et en déterminer une base.
2. Donner la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^4 , de la projection orthogonale sur F (pour le produit scalaire usuel).
3. Soit $u = (1, 1, 1, 1)$. Déterminer $d(u, F^\perp)$.

Solution :

1. Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel et en trouver la dimension, traduisons les équations cartésiennes qui le définissent. Soit un vecteur $(x, y, z, t) \in F$. Il vérifie le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y - z + t = 0 \end{cases}$$

En sommant ces deux équations, on élimine y et z d'un seul coup :

$$2x + 2t = 0 \implies t = -x$$

En soustrayant la seconde équation à la première, on élimine x et t :

$$2y + 2z = 0 \implies z = -y$$

Un vecteur appartient donc à F si et seulement si il s'écrit sous la forme $(x, y, -y, -x)$. On peut séparer les variables libres x et y pour exhiber une famille génératrice :

$$(x, y, -y, -x) = x(1, 0, 0, -1) + y(0, 1, -1, 0)$$

Posons $e_1 = (1, 0, 0, -1)$ et $e_2 = (0, 1, -1, 0)$. L'espace F est engendré par ces deux vecteurs : $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (ils ne sont manifestement pas proportionnels), ils forment donc une famille libre. Ainsi, (e_1, e_2) est une base de F . Puisque cette base contient exactement 2 vecteurs dans un espace total de dimension 4, F est bien un plan vectoriel.

2. Pour déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F , il est crucial de remarquer une propriété <de la base que nous venons d'extraire. Calculons le produit scalaire usuel de e_1 et e_2 :

$$\langle e_1, e_2 \rangle = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times (-1) + (-1) \times 0 = 0$$

Les vecteurs e_1 et e_2 sont orthogonaux. C'est une véritable aubaine algébrique. Pour projeter orthogonalement un vecteur $v = (x, y, z, t)$ sur un espace muni d'une base orthogonale, la formule est directe et évite la résolution de systèmes lourds :

$$p_F(v) = \frac{\langle v, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1 + \frac{\langle v, e_2 \rangle}{\|e_2\|^2} e_2$$

Calculons les normes au carré : $\|e_1\|^2 = 1^2 + (-1)^2 = 2$ et $\|e_2\|^2 = 1^2 + (-1)^2 = 2$. Calculons les produits scalaires avec v : $\langle v, e_1 \rangle = x - t$ et $\langle v, e_2 \rangle = y - z$. En remplaçant dans la formule :

$$p_F(v) = \frac{x - t}{2}(1, 0, 0, -1) + \frac{y - z}{2}(0, 1, -1, 0)$$

En regroupant les coordonnées, on obtient l'expression analytique de la projection pour tout vecteur v :

$$p_F(x, y, z, t) = \left(\frac{x-t}{2}, \frac{y-z}{2}, \frac{-y+z}{2}, \frac{-x+t}{2} \right)$$

Il ne reste plus qu'à extraire la matrice de cet endomorphisme dans la base canonique. La première colonne correspond à l'image du premier vecteur canonique $(1, 0, 0, 0)$, c'est-à-dire en posant $x = 1$ et le reste à 0, ce qui donne $(1/2, 0, 0, -1/2)$. On procède de même pour les trois autres colonnes. La matrice M cherchée est donc :

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Avant de se lancer dans un calcul de distance laborieux avec des normes et des projections, prenons un peu de recul sur les objets géométriques que nous manipulons. La distance d'un vecteur u à un sous-espace, ici F^\perp , est par définition la norme du projeté orthogonal de u sur l'orthogonal de ce sous-espace. L'orthogonal de F^\perp étant simplement F , la distance cherchée est exactement $\|p_F(u)\|$.

Cependant, regardons de plus près le vecteur $u = (1, 1, 1, 1)$ et la nature géométrique de notre espace F . L'espace F est défini par l'intersection de deux hyperplans dont les équations cartésiennes sont $x + y + z + t = 0$ et $x - y - z + t = 0$. Ces équations s'interprètent directement comme des produits scalaires nuls : F est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $n_1 = (1, 1, 1, 1)$ et à $n_2 = (1, -1, -1, 1)$. Autrement dit, l'espace F^\perp est très exactement le plan engendré par ces deux vecteurs normaux : $F^\perp = \text{Vect}(n_1, n_2)$.

Or, le vecteur u fourni par l'énoncé est précisément égal au vecteur n_1 . Cela signifie que u appartient déjà à F^\perp . La distance d'un point à un espace dans lequel il se trouve est trivialement nulle (la projection de u sur F sera le vecteur nul). On conclut instantanément, sans le moindre calcul supplémentaire :

$$d(u, F^\perp) = 0$$

Exercice 1 (CCINP 2025) :

$$\text{Soit } M_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. (a) Déterminer le polynôme caractéristique χ_a de M_a .
 (b) Effectuer la division euclidienne de $3\chi_a$ par χ'_a .
 (c) M_a est-elle diagonalisable sur \mathbb{C} ?
2. On suppose que λ est une valeur propre complexe de M_a telle que $|\lambda| > 1$.
 (a) Montrer que $|a| > \frac{|\lambda|}{1 + |\lambda|} > \frac{1}{2}$.
 (b) Montrer que $(M_a)^n$ tend vers 0 pour a suffisamment petit.

Solution :

1. a) Le polynôme caractéristique se calcule classiquement par le déterminant $\det(XI_3 - M_a)$. En développant par rapport à la première ligne, on obtient :

$$\chi_a(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & -a \\ -1 & X & 0 \\ -1 & -1 & X \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} X & 0 \\ -1 & X \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} -1 & X \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\chi_a(X) = X(X^2) - a(1 + X) = X^3 - aX - a$$

b) Calculons d'abord la dérivée du polynôme caractéristique : $\chi'_a(X) = 3X^2 - a$. On cherche à diviser $3\chi_a(X) = 3X^3 - 3aX - 3a$ par ce trinôme. En posant la division euclidienne, on remarque que pour annuler le terme de degré 3, il faut multiplier χ'_a par X . On a $X\chi'_a(X) = 3X^3 - aX$. Par soustraction, le reste est $(3X^3 - 3aX - 3a) - (3X^3 - aX) = -2aX - 3a$. La division euclidienne s'écrit donc parfaitement :

$$3\chi_a(X) = X\chi'_a(X) - a(2X + 3)$$

c) La matrice M_a est diagonalisable sur les complexes si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples. Commençons par nous demander si le polynôme caractéristique admet des racines multiples. C'est le cas si et seulement si χ_a et sa dérivée χ'_a ont une racine commune. D'après la relation de la division euclidienne précédente, une racine commune à χ_a et χ'_a doit obligatoirement annuler le reste $-a(2X + 3)$. Séparons les cas : Si $a = 0$, la matrice M_0 est triangulaire inférieure stricte, elle est donc nilpotente. Son polynôme caractéristique est X^3 . Comme elle n'est pas égale à la matrice nulle, elle n'est pas diagonalisable. Si $a \neq 0$, la seule racine possible du reste est $X = -3/2$. Pour que cette valeur soit effectivement une racine double de χ_a , elle doit annuler la dérivée χ'_a . On évalue $\chi'_a(-3/2) = 3(-3/2)^2 - a = 27/4 - a$. Cela s'annule si et seulement si $a = 27/4$. Si $a = 27/4$, le polynôme admet $-3/2$ comme racine double (l'autre racine étant 3). Regardons le sous-espace propre associé à $-3/2$. La matrice $M_{27/4} + \frac{3}{2}I_3$ a pour deux premières colonnes $(3/2, 1, 1)^T$ et $(0, 3/2, 1)^T$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc la matrice est de rang au moins 2. D'après le théorème du rang, la dimension de l'espace propre est de 1. C'est strictement inférieur à la multiplicité algébrique (qui est 2). La matrice n'est donc pas diagonalisable pour $a = 27/4$. En conclusion, M_a est diagonalisable sur \mathbb{C} si et seulement si $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 27/4\}$.

2. a) Puisque λ est valeur propre, c'est une racine du polynôme caractéristique : $\lambda^3 - a\lambda - a = 0$. On peut isoler le paramètre a en factorisant : $a(\lambda+1) = \lambda^3$. Comme $|\lambda| > 1$, on a avec certitude $\lambda \neq -1$, ce qui autorise à écrire $a = \frac{\lambda^3}{\lambda+1}$. Passons au module. Par l'inégalité triangulaire au dénominateur, on sait que $|\lambda + 1| \leq |\lambda| + 1$. En inversant cette relation, on obtient une minoration du module de a :

$$|a| = \frac{|\lambda|^3}{|\lambda + 1|} \geq \frac{|\lambda|^3}{|\lambda| + 1}$$

Isolons un terme $|\lambda|^2$ au numérateur :

$$|a| \geq |\lambda|^2 \frac{|\lambda|}{|\lambda| + 1}$$

Puisque nous avons supposé $|\lambda| > 1$, on a strictement $|\lambda|^2 > 1$. En multipliant, l'inégalité devient stricte :

$$|a| > \frac{|\lambda|}{|\lambda| + 1}$$

Enfin, la fonction réelle $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ est strictement croissante sur les réels positifs. Puisque $|\lambda| > 1$, on a $\frac{|\lambda|}{|\lambda|+1} > \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$. La chaîne d'inégalités est parfaitement démontrée.

b) Le comportement asymptotique de la suite des puissances d'une matrice dépend de son rayon spectral. La suite $(M_a)^n$ tend vers la matrice nulle si et seulement si toutes les valeurs propres de M_a sont de module strictement inférieur à 1. Nous allons utiliser la contraposée du résultat précédent pour contraindre les valeurs propres. La question 2.a nous dit que s'il existe une valeur propre avec $|\lambda| > 1$, alors $|a| > 1/2$. Par contraposée, si on choisit un nombre a tel que $|a| \leq 1/2$, aucune valeur propre ne peut excéder 1 en module. On a donc systématiquement $|\lambda| \leq 1$. Que se passe-t-il si une valeur propre est de module exactement 1? Si $|\lambda| = 1$, la relation de départ donne $|a| = \frac{1}{|\lambda+1|}$. Or, avec $|\lambda| = 1$, le module $|\lambda + 1|$ est au maximum égal à 2 (le diamètre du cercle unité). On aurait donc $|a| \geq 1/2$. Ainsi, si l'on prend soin de choisir a de sorte que $|a| < 1/2$ strictement, il est totalement impossible d'avoir une valeur propre de module supérieur ou égal à 1. Toutes les valeurs propres sont donc strictement à l'intérieur du disque unité ($|\lambda| < 1$). Le rayon spectral est strictement inférieur à 1, ce qui assure que $(M_a)^n$ converge vers la matrice nulle pour tout a dans la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1/2.

Exercice 2 (CCINP 2025) :

On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de rois piochés (il y a 4 rois dans un jeu de 32 cartes).

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. En admettant la formule de Vandermonde, déterminer l'espérance de X .

Solution :

1. Nous sommes face à un tirage simultané (ou sans remise) d'une poignée de 5 cartes parmi 32. L'univers des possibles est l'ensemble de toutes les combinaisons de 5 cartes parmi 32. Il y a donc $\binom{32}{5}$ tirages possibles, tous équiprobables. La variable aléatoire X compte le nombre de rois tirés. Un jeu de 32 cartes contient exactement 4 rois et 28 cartes qui ne sont pas des rois. Le nombre de rois tirés peut aller de 0 (aucun roi) jusqu'à 4 (tous les rois du jeu). Le support de X est donc $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Pour calculer la probabilité d'obtenir exactement k rois, il faut dénombrer les tirages favorables : Il faut choisir k rois parmi les 4 disponibles : il y a $\binom{4}{k}$ choix. Il faut compléter la main en choisissant les $5 - k$ cartes restantes parmi les 28 cartes qui ne sont pas des rois : il y a $\binom{28}{5-k}$ choix. Par principe multiplicatif, la loi de probabilité de X est donnée pour tout $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ par la formule de la loi hypergéométrique :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{4}{k} \binom{28}{5-k}}{\binom{32}{5}}$$

2. Par définition, l'espérance d'une variable aléatoire discrète finie est la somme des valeurs pondérées par leurs probabilités :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^4 k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^4 k \frac{\binom{4}{k} \binom{28}{5-k}}{\binom{32}{5}}$$

(Le terme pour $k = 0$ étant nul, on peut faire démarrer la somme à 1 sans rien changer).

Pour absorber le facteur k , l'astuce fondamentale en combinatoire est d'utiliser la formule du capitaine (ou du pion) : $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$. Appliquée à notre coefficient sur les rois, elle donne : $k \binom{4}{k} = 4 \binom{3}{k-1}$. Injectons cela dans la somme et sortons la constante :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{4}{\binom{32}{5}} \sum_{k=1}^4 \binom{3}{k-1} \binom{28}{5-k}$$

Pour y voir plus clair, effectuons le changement d'indice $j = k - 1$. Lorsque k parcourt l'ensemble de 1 à 4, j parcourt l'ensemble de 0 à 3. L'exposant $5 - k$ devient $4 - j$. L'expression se réécrit :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{4}{\binom{32}{5}} \sum_{j=0}^3 \binom{3}{j} \binom{28}{4-j}$$

C'est ici qu'intervient la célèbre identité de Vandermonde. Elle affirme que $\sum \binom{A}{j} \binom{B}{m-j} = \binom{A+B}{m}$. Ici, on a $A = 3$, $B = 28$ et $m = 4$. La somme des coefficients binomiaux se condense de manière spectaculaire en un seul terme : $\binom{31}{4}$. L'espérance devient alors :

$$\mathbb{E}(X) = 4 \frac{\binom{31}{4}}{\binom{32}{5}}$$

Il ne reste qu'à dérouler les factorielles pour simplifier la fraction :

$$\mathbb{E}(X) = 4 \frac{31!}{(31-4)!4!} \times \frac{(32-5)!5!}{32!} = 4 \frac{31!}{27!4!} \frac{27!5!}{32!}$$

Les termes $27!$ se simplifient. Il reste $31!/32! = 1/32$ et $5!/4! = 5$. On obtient le résultat final :

$$\mathbb{E}(X) = 4 \frac{5}{32} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$$

À titre de vérification heuristique très rassurante, la probabilité de tirer un roi sur une seule carte est de $4/32 = 1/8$. Par linéarité de l'espérance, si l'on tire 5 cartes, on s'attend à trouver en moyenne $5 \times 1/8 = 5/8$ roi.

Exercice

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{e^{-nx}}{n}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction somme $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.
2. Montrer que la fonction somme S est continue sur son domaine de définition.
3. Montrer qu'elle est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .
4. Pour tout x du domaine de définition, calculer explicitement la somme $S(x)$.
5. Montrer que la fonction S est intégrable sur $[0, +\infty[$.
6. Calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} S(x) dx$ et montrer qu'elle vaut $\frac{\pi^2}{12}$. On pourra utiliser librement que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Solution :

1. Pour déterminer le domaine de définition, on fixe un réel x et on étudie la convergence de la série de terme général $u_n(x)$. Si $x < 0$, la limite de e^{-nx} est $+\infty$. Le terme général $u_n(x)$ ne tend pas vers 0, la série diverge grossièrement. Si $x \geq 0$, la suite $\frac{e^{-nx}}{n}$ est positive, décroissante, et tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Le critère spécial des séries alternées (CSSA) s'applique et garantit la convergence de la série. Le domaine de définition de la fonction somme est donc $D = [0, +\infty[$.
2. Pour montrer la continuité sur ce domaine fermé, on peut exploiter une propriété formidable du CSSA : il nous donne une majoration très simple du reste. Pour tout $x \in [0, +\infty[$, la valeur absolue du reste $R_n(x)$ est majorée par la valeur absolue du premier terme négligé :

$$|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| = \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1}$$

Puisque $x \geq 0$, l'exponentielle est inférieure ou égale à 1. On peut donc majorer indépendamment de x :

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$$

Cette majorante tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, ce qui prouve que la série de fonctions converge uniformément sur tout l'intervalle $[0, +\infty[$. Comme chaque fonction u_n est continue sur cet intervalle, la convergence uniforme assure que la fonction somme S est elle-même continue sur $[0, +\infty[$.

3. Pour la régularité \mathcal{C}^1 , on fait appel au théorème de dérivation terme à terme. Chaque fonction u_n est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* , avec pour dérivée :

$$u_n'(x) = (-1)^{n-1} \frac{-ne^{-nx}}{n} = (-1)^n e^{-nx}$$

Pour justifier l'interversion, il suffit de montrer la convergence normale de la série des dérivées sur tout segment de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 0$. Pour tout $x \geq a > 0$, on a :

$$|u_n'(x)| = e^{-nx} \leq e^{-na} = (e^{-a})^n$$

Puisque $a > 0$, le réel e^{-a} est strictement compris entre 0 et 1. On reconnaît le terme général d'une série géométrique convergente. La série des dérivées converge donc normalement (et donc uniformément) sur tout intervalle $[a, +\infty[$. Toutes les hypothèses du théorème sont réunies : S est bien de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* .

4. Le terme général $u_n(x)$ doit évoquer le développement en série entière du logarithme usuel. On sait que pour tout $t \in]-1, 1]$, on a :

$$\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n}$$

Or, pour tout $x \in [0, +\infty[$, la quantité $t = e^{-x}$ appartient exactement à l'intervalle $]0, 1]$, qui est bien inclus dans le domaine de validité de la formule. En substituant t par e^{-x} , on obtient de manière limpide l'expression explicite :

$$S(x) = \ln(1 + e^{-x})$$

5. La fonction S est continue sur $[0, +\infty[$. L'unique borne à étudier pour l'intégrabilité est $+\infty$. Utilisons l'expression explicite fraîchement trouvée. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, la quantité e^{-x} tend vers 0. On peut utiliser l'équivalent classique du logarithme en zéro, $\ln(1+u) \sim u$, ce qui donne directement :

$$S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x}$$

La fonction exponentielle décroissante $x \mapsto e^{-x}$ est une intégrale de référence convergente en $+\infty$. Par théorème d'équivalence pour les fonctions positives, la fonction S est bien intégrable sur $[0, +\infty[$.

6. Pour calculer l'intégrale de S , le chemin le plus élégant est d'intégrer la série terme à terme. Utilisons le théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions (version de Lebesgue ou corollaire usuel). Vérifions si la série des intégrales des valeurs absolues converge :

$$\int_0^{+\infty} |u_n(x)| dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n} dx = \frac{1}{n} \left[\frac{-e^{-nx}}{n} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n^2}$$

La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente (exposant $2 > 1$). Le théorème s'applique, nous avons l'autorisation formelle d'intervertir le symbole intégral et le symbole somme :

$$\int_0^{+\infty} S(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{e^{-nx}}{n} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

Il nous reste à calculer cette somme alternée. L'astuce est de la relier à la somme absolue (dont la valeur $\pi^2/6$ est fournie) en soustrayant les termes pairs.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2}$$

(En effet, en retirant deux fois les termes pairs de la somme totale, on les transforme en termes négatifs, recréant ainsi l'alternance parfaite des signes). En factorisant le coefficient des termes pairs :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{2}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Il ne reste plus qu'à remplacer la somme par la valeur donnée par l'énoncé :

$$\int_0^{+\infty} S(x) dx = \frac{1}{2} \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}$$