

### Planche math-info 1

Un ascenseur avec  $n$  personnes monte dans un bâtiment ayant  $p$  étages. Les personnes descendent chacune aléatoirement et indépendamment à un étage. On note  $X$  la variable aléatoire qui donne le nombre d'étages auxquels l'ascenseur s'est arrêté.

1. En utilisant `np.randint`, écrire une fonction Python simulant la loi de  $X$ .
- 2.a. Pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , soit  $X_i$  la variable aléatoire qui vaut 1 si l'ascenseur s'est arrêté au  $i$ -ième étage, et 0 sinon. Donner la loi de  $X_i$ .
  - b. Exprimer  $X$  en fonction des  $X_i$ . En déduire  $E(X)$  en fonction de  $n$  et  $p$ .
- 3.a. Déterminer  $\lim_{p \rightarrow +\infty} E(X)$ , avec  $n$  fixé.
  - b. On fixe  $n = 10$ . Calculer avec Python  $E(X)$  pour  $p = 20$ ,  $p = 100$ , et confirmer le résultat précédent.
4. Si  $a$  et  $b$  sont deux entiers naturels non nuls, on note  $S_{a,b}$  le nombre de surjections d'un ensemble à  $a$  éléments vers un ensemble à  $b$  éléments.

a. Montrer que 
$$\sum_{k=1}^{\min\{n,p\}} \binom{p}{k} S_{n,k} = p^n.$$

b. À l'aide de  $E(X)$ , obtenir que 
$$\sum_{k=1}^{\min\{n,p\}} \binom{p-1}{k-1} S_{n,k} = p^n - (p-1)^n.$$

-----

1. cf. script.
- 2.a. Chacune des  $n$  personnes choisit de façon équiprobable un des  $p$  étages où il va descendre. Pour modéliser cette situation aléatoire, on prend pour univers  $\Omega = \mathcal{F}(\llbracket 1, n \rrbracket, \llbracket 1, p \rrbracket)$ , soit  $\Omega = \llbracket 1, p \rrbracket^{\llbracket 1, n \rrbracket}$ , l'ensemble des applications d'un ensemble à  $n$  éléments (les personnes présentes au départ de l'ascenseur) vers un ensemble à  $p$  éléments (les étages desservis), et on munit  $\Omega$  de la probabilité uniforme. On a donc  $|\Omega| = p^n$ . La variable  $X_i$  prend les valeurs 0 et 1, c'est donc une variable de Bernoulli, et si  $f \in \Omega$ , on a  $X_i(f) = 0$  si et seulement si  $f$  prend ses valeurs dans l'ensemble  $\llbracket 1, p \rrbracket \setminus \{i\}$ , de cardinal  $p-1$ . Parmi les  $p^n$  applications de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  vers  $\llbracket 1, p \rrbracket$ , il y en a  $(p-1)^n$  dont l'image ne contient pas l'élément  $i$ , donc  $P(X_i = 0) = \frac{(p-1)^n}{p^n}$ . Le paramètre de la loi de Bernoulli suivie par la variable  $X_i$  est alors  $P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = 1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n$ . Bref,  $X_i \sim \mathcal{B}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n\right)$ .

b. On a clairement  $X = \sum_{i=1}^n X_i$  donc, par linéarité de l'espérance,  $E(X) = p \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n\right)$ .

- 3.a. Par un petit développement limité,

$$E(X) = p \left(1 - \left(1 - \frac{n}{p} + o\left(\frac{1}{p}\right)\right)\right) = n + o(1) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} n.$$

- b. cf. script.

- 4.a. Si  $f \in \Omega = \llbracket 1, p \rrbracket^{\llbracket 1, n \rrbracket}$ , alors  $|f(\llbracket 1, n \rrbracket)| \in \llbracket 1, \min\{n, p\} \rrbracket$ .

Soit  $B$  une partie non vide de l'intervalle entier  $\llbracket 1, p \rrbracket$ , soit  $k$  son cardinal. Si  $f \in \Omega$  vérifie  $f(\llbracket 1, n \rrbracket) = B$ , alors  $f$  établit une surjection de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  vers  $B$ . Il y a alors autant d'applications de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  vers  $\llbracket 1, p \rrbracket$  dont l'image est  $B$  que de surjections de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  vers  $B$ , à savoir  $S_{n,k}$ . Comme il y a  $\binom{p}{k}$  façons de choisir une partie  $B$  de cardinal  $k$  dans  $\llbracket 1, p \rrbracket$ , on déduit que

$$|\Omega| = p^n = \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} S_{n,k} = \sum_{k=1}^{\min\{n,p\}} \binom{p}{k} S_{n,k}.$$

**b.** Comme  $X(\Omega) = \llbracket 1, \min\{n, p\} \rrbracket$ , par définition de l'espérance,

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\min\{n,p\}} k P(X = k) = \sum_{k=1}^{\min\{n,p\}} k \binom{p}{k} \frac{S_{n,k}}{p^n} = \frac{1}{p^{n-1}} \sum_{k=1}^{\min\{n,p\}} \binom{p-1}{k-1} S_{n,k}.$$

On a en effet  $P(X = k) = \frac{|\Omega_k|}{|\Omega|}$  où  $\Omega_k$  est l'ensemble des applications de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  vers  $\llbracket 1, p \rrbracket$  ayant une image de cardinal  $k$ , et le **a.** ci-dessus montre que  $|\Omega_k| = \binom{p}{k} S_{n,k}$ . On a ensuite utilisé la relation classique  $k \binom{p}{k} = p \binom{p-1}{k-1}$ .

Donc  $p \left( 1 - \left( 1 - \frac{1}{p} \right)^n \right) = \frac{1}{p^{n-1}} \sum_{k=1}^{\min\{n,p\}} \binom{p-1}{k-1} S_{n,k}$ , ce qui donne la relation voulue.

## Planche math-info 2

Soit  $y$  un réel qui n'est pas un demi-entier, on définit  $q$  l'entier "le plus proche" de  $y$  comme étant le seul entier  $q$  vérifiant  $|y - q| < \frac{1}{2}$ .

**1.a.** Écrire une fonction Python qui prend comme argument un réel  $y$  et qui renvoie l'entier le plus proche de  $y$ .

**b.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $a_n$  l'entier le plus proche de  $n!e^{-1}$ , et on pose  $b_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ .

Écrire un script Python pour calculer les 16 premiers termes des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ . Faire une conjecture.

**c.** Démontrer le résultat conjecturé ci-dessus.

**2.** Pour tout  $n$ , on pose  $d_n = n!e^{-1} - b_n$  et  $J_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ .

**a.** Écrire un script Python pour calculer les 16 premiers termes des suites  $(d_n)$  et  $\left(\frac{J_n}{d_n}\right)$ . Faire une conjecture.

**b.** Prouver la conjecture faite ci-dessus.

-----

1.a. cf. script. L'entier le plus proche de  $y$  est en fait  $\left\lfloor y + \frac{1}{2} \right\rfloor$ .

b. cf. script. On conjecture que  $a_n = b_n$  pour  $n \geq 1$ .

c. La série exponentielle  $\sum \frac{(-1)^k}{k!}$  est alternée, et la valeur absolue du terme général tend vers 0 en décroissant, le théorème spécial permet alors de majorer la valeur absolue du reste, soit

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \right| = \left| e^{-1} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!}.$$

En multipliant par  $n!$ , on déduit

$$|n!e^{-1} - b_n| \leq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2} \quad (\text{pour } n \geq 2),$$

donc  $b_n$ , qui est bien un entier puisque  $\frac{n!}{k!} = n(n-1) \cdots (n-k+1)$  est entier pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , est l'entier le plus proche de  $n!e^{-1}$ .

2.a. cf. script. On conjecture que  $\frac{J_n}{d_n} = (-1)^{n+1} e$ .

b. On applique la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction  $g : x \mapsto e^{-x}$  entre 0 et 1 à l'ordre  $n$ . Comme  $g^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$ , et notamment  $g^{(k)}(0) = (-1)^k$ , cela donne

$$g(1) = e^{-1} = \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} (1-0)^k + \int_0^1 \frac{(1-x)^n g^{(n+1)}(x)}{n!} dx,$$

soit, en posant  $x = 1 - t$  dans l'intégrale,

$$e^{-1} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} + \frac{1}{n!} \int_0^1 (-1)^{n+1} t^n e^{t-1} dt = \frac{b_n}{n!} + \frac{(-1)^{n+1} e^{-1}}{n!} \int_0^1 t^n e^t dt,$$

soit enfin

$$d_n = n! e^{-1} - b_n = (-1)^{n+1} e^{-1} J_n, \quad \text{donc } J_n = (-1)^{n+1} e d_n.$$

### Planche math-info 3

Si  $(u_n)$  et  $(u'_n)$  sont deux suites réelles convergeant vers un même réel  $a$ , on dit que  $(u'_n)$  converge vers  $a$  **plus rapidement** que  $(u_n)$  si on a  $u'_n - a = o(u_n - a)$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

On définit une suite réelle  $(x_n)$  par  $x_0 = \frac{1}{2}$  et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - x_n^2}}{2}}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose ensuite  $u_n = 6 \times 2^n x_n$ , puis  $u'_n = \frac{4u_{n+1} - u_n}{3}$ .

1. Écrire un script Python affichant les six premiers termes des suites  $(u_n)$  et  $(u'_n)$ . Que peut-on conjecturer sur le comportement asymptotique de ces suites ?

2. Soit  $(v_n)$  une suite réelle admettant un développement asymptotique de la forme

$$v_n = a + \lambda k_1^n + O(k_2^n), \quad \text{avec } 0 < |k_2| < |k_1| < 1, \quad a \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

On pose  $v'_n = \frac{v_{n+1} - k_1 v_n}{1 - k_1}$  pour tout  $n$ . Montrer que  $v'_n = a + O(k_2^n)$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , et comparer les vitesses de convergence des suites  $(v_n)$  et  $(v'_n)$ .

3.a. Montrer que  $x_n = \sin\left(\frac{\pi}{6 \times 2^n}\right)$  pour tout  $n$  entier naturel.

b. En déduire une preuve de la conjecture faite à la question 1.

-----

1. Il semblerait que les deux suites convergent vers le nombre  $\pi$ , la deuxième plus rapidement que la première.

2. On a le développement asymptotique

$$v'_n = \frac{1}{1 - k_1} \left( a + \lambda k_1^{n+1} + O(k_2^n) - k_1 a - \lambda k_1^{n+1} + O(k_2^n) \right) = a + O(k_2^n).$$

Déjà,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a$  puis, pour  $n$  assez grand, on a  $v_n - a \neq 0$  et

$$\frac{v'_n - a}{v_n - a} = \frac{O(k_2^n)}{\lambda k_1^n + O(k_2^n)} = \frac{O(k_2^n)}{k_1^n (\lambda + o(1))} = O\left(\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^n\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc  $(v'_n)$  converge vers  $a$  plus rapidement que  $(v_n)$ .

3.a. L'égalité est vraie pour  $n = 0$  et, si elle est vraie pour  $n \in \mathbb{N}$  donné, alors  $1 - x_n^2 = 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{6 \times 2^n}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{6 \times 2^n}\right)$  et, comme  $\frac{\pi}{6 \times 2^n} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , le cosinus est positif, donc

$$1 - \sqrt{1 - x_n^2} = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{6 \times 2^n}\right) = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{6 \times 2^{n+1}}\right)$$

et comme, de nouveau, le sinus est positif,

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - x_n^2}}{2}} = \sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{6 \times 2^{n+1}}\right)} = \sin\left(\frac{\pi}{6 \times 2^{n+1}}\right),$$

ce qui achève la récurrence.

b. On a donc  $u_n = 6 \times 2^n \sin\left(\frac{\pi}{6 \times 2^n}\right)$  pour tout  $n$ , d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pi$  (facile en utilisant  $\sin(x) \sim x$  au voisinage de 0) puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u'_n = \pi$ . En développant un peu plus, i.e. en

utilisant  $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$  au voisinage de zéro, on obtient

$$u_n = 6 \times 2^n \left( \frac{\pi}{6 \times 2^n} - \frac{1}{6} \frac{\pi^3}{6^3 \times 8^n} + O\left(\frac{1}{32^n}\right) \right) = \pi - \frac{\pi^3}{216} \left(\frac{1}{4}\right)^n + O\left(\left(\frac{1}{16}\right)^n\right).$$

On reconnaît un développement asymptotique de la forme proposée question 2. avec  $a = \pi$ ,  $\lambda = -\frac{\pi^3}{216}$ ,  $k_1 = \frac{1}{4}$  et  $k_2 = \frac{1}{16}$ , on a bien  $0 < |k_2| < |k_1| < 1$ . On “accélère” donc la convergence de la suite  $(u_n)$  vers  $\pi$  en la remplaçant par la suite  $(u'_n)$  avec

$$u'_n = \frac{u_{n+1} - k_1 u_n}{1 - k_1} = \frac{4u_{n+1} - u_n}{3}.$$

C'est le **procédé d'accélération de convergence de Richardson-Romberg**.

#### Planche math-info 4

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)$ .

1. Avec Python, calculer  $u_n$  pour  $n$  de 1 à 10, puis  $\frac{1}{u_{10^k}}$  pour  $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$  et conjecturer son comportement lorsque  $n$  ou  $k$  tend vers l'infini.
2. On pose  $f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2 - k^2\pi^2}$  et  $g(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)} - \frac{1}{t}$ .
  - a. Calculer la limite de  $g$  en 0. Montrer que  $f$  et  $g$  (une fois prolongée) sont continues sur l'intervalle  $]0, \pi[$ .
  - b. Représenter  $f$  et  $g$  sur  $]0, \pi[$ . Conjecturer un résultat... que l'on admettra!
  - c. Pour  $x \in ]0, \pi[$ , déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$ .

*Indication: Calculer de deux manières différentes  $G(x) = \int_0^x g(t) dt$ .*

- d. En déduire la limite de  $u_n$ .

1. cf. script. On pourrait conjecturer que la deuxième suite converge vers  $\frac{\pi}{2}$ , et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{\pi}$ .
- 2.a. On écrit  $g(t) = \frac{N(t)}{D(t)}$  avec  $D(t) = t \sin(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^2$  et  $N(t) = t \cos(t) - \sin(t)$  que l'on développe un petit peu:  $N(t) = t(1 + o(t)) - (t + o(t^2)) = o(t^2)$ , c'est suffisant pour affirmer que  $\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = 0$ . On prolongera désormais  $g$  par continuité en 0 en posant  $g(0) = 0$ , et  $g$  sera ainsi une fonction continue sur  $]0, \pi[$  (puisque la continuité sur l'intervalle ouvert  $]0, \pi[$  est immédiate).

Pour  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in [0, \pi[$ , posons  $f_k(t) = \frac{2t}{t^2 - k^2\pi^2}$ . Chaque fonction  $f_k$  est définie et continue sur  $]0, \pi[$ . Si  $S = [a, b]$  est un segment inclus dans  $]0, \pi[$ , alors

$$\forall t \in S \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad |f_k(t)| = \frac{2t}{k^2\pi^2 - t^2} \leq \frac{2b}{k^2\pi^2 - b^2}$$

qui est sommable puisque  $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ . Cette majoration étant “uniforme”, on a en fait prouvé

que  $\|f_k\|_{\infty, S} \leq \frac{2b}{k^2\pi^2 - b^2}$ , ce qui prouve la convergence normale, donc uniforme, de la série de fonctions  $\sum f_k$  sur tout segment inclus dans  $]0, \pi[$ . Par théorème du cours, la fonction somme  $f$  est alors continue sur  $]0, \pi[$ .

**Remarque.** On peut aussi dire que la fonction  $f_1 : t \mapsto \frac{2t}{t^2 - \pi^2}$  est continue sur  $]0, \pi[$ , et que la série de fonctions  $\sum_{k \geq 2} f_k$  converge normalement sur  $]0, \pi[$  d'où la continuité de la somme  $\sum_{k=2}^{+\infty} f_k$ .

b. On conjecture que  $f = g$  sur  $]0, \pi[$ ... et, du coup, on l'admet! *Oui, pour le démontrer, il y a un peu de boulot... mais vous l'avez fait dans le DM 3 de cette année.*

c. La fonction  $g$  est continue sur  $]0, \pi[$  donc admet des primitives sur cet intervalle, celle qui s'annule en 0 est donnée par

$$G(x) = \int_0^x \left( \frac{\cos(t)}{\sin(t)} - \frac{1}{t} \right) dt = [\ln(\sin t) - \ln(t)]_0^x = \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right).$$

Pour ce calcul, on convient bien sûr que  $\frac{\sin(t)}{t}$  vaut 1 pour  $t = 0$ , c'est le prolongement par continuité bien connu.

Mais on a aussi  $g = f = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ , les fonctions  $f_k$  étant continues sur  $]0, x[$ , la convergence de la série étant normale sur le segment  $]0, x[$  d'après a., on peut donc intervertir série et intégrale, d'où

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{2t}{t^2 - k^2\pi^2} dt = \sum_{k=1}^{+\infty} [\ln|t^2 - k^2\pi^2|]_0^x \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} [\ln(k^2\pi^2 - t^2)]_0^x = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right). \end{aligned}$$

Pour  $x \in ]0, \pi[$  fixé, on a donc  $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$ .

d. Par continuité de l'exponentielle, on déduit, pour  $x \in ]0, \pi[$ , que

$$\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x}.$$

En particulier, pour  $x = \frac{\pi}{2}$ ,

$$u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi}.$$

### Planche math-info 5

Pour  $t$  réel non nul, on pose  $\varphi(t) = \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right)$ , on pose  $\varphi(0) = 0$ .

1.a. Représenter  $\varphi$  sur  $[-3, 3]$  à l'aide de Python.

b. Montrer que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

2. On fixe  $a \in \mathbb{R}_+^*$ .

a. Montrer que, pour tout réel  $x$ , il existe un unique réel  $y$  tel que  $\int_x^y \varphi(t) dt = a$ . Ce réel  $y$  est alors noté  $f(x)$ .

b. Montrer que l'application  $f$  est continue et strictement monotone sur  $\mathbb{R}$ .

c. Montrer qu'il existe un unique réel  $b$  tel que  $f(-b) = b$ .

d. Écrire une fonction Python prenant  $a > 0$  pour argument et retournant les nombres  $f(0)$  et  $b$  à  $10^{-1}$  près.

-----

1.a. cf. script.

b. La fonction  $\varphi$  est clairement de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$ , une étude locale en 0 s'impose. Tout d'abord,  $\lim_{t \rightarrow 0} \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 = \varphi(0)$  donc  $\varphi$  est continue en 0. Elle est par ailleurs dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  avec  $\varphi'(t) = \frac{2}{t^3} \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right)$ . Comme

$$\lim_{t \rightarrow 0} \varphi'(t) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x^3 e^{-x^2} = 0$$

par croissances comparées, le théorème de la limite de la dérivée permet d'affirmer que  $\varphi$  est dérivable en 0 avec  $\varphi'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \varphi'(t) = 0$ , finalement  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

2.a. Soit  $\Phi$  une primitive de  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}$ , par exemple  $\Phi : x \mapsto \int_0^x \varphi(t) dt$ . Alors  $\Phi$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  (car elle est dérivable avec  $\Phi' = \varphi$  positive et ne s'annulant qu'en zéro), elle établit donc une bijection entre  $\mathbb{R}$  et son image. Or, la fonction  $\varphi$  étant positive et non intégrable sur  $\mathbb{R}_+$  (car elle tend vers 1 en  $+\infty$ ), on déduit que  $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$  et,  $\varphi$  étant paire,  $\Phi$  est impaire donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = -\infty$ , donc  $\Phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ . Finalement,  $\Phi$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$ . Les réels  $x \in \mathbb{R}$  et  $a > 0$  étant donnés, l'équation  $\int_x^y \varphi(t) dt = a$  équivaut à  $\Phi(y) - \Phi(x) = a$  et admet donc pour unique solution  $y = \Phi^{-1}(\Phi(x) + a)$ . On posera donc  $f(x) = \Phi^{-1}(\Phi(x) + a)$  pour tout  $x$  réel.

b. Le "théorème de la bijection" du cours de première année indique que,  $\Phi$  étant continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  avec  $\Phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , la bijection réciproque  $\Phi^{-1}$  est aussi continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi,  $f$  est continue et strictement croissante comme composée de fonctions du même métal.

c. On a les équivalences

$$\begin{aligned} f(-b) = b &\iff \Phi^{-1}(\Phi(-b) + a) = b \iff \Phi(-b) + a = \Phi(b) \\ &\iff a = \Phi(b) - \Phi(-b) \iff a = 2\Phi(b) \end{aligned}$$

puisque la fonction  $\Phi$  est paire. L'unique solution est donc  $b = \Phi^{-1}\left(\frac{a}{2}\right)$ .

d. Pour retourner  $f(0)$  qui est l'unique réel  $y$  (qui est positif) tel que  $\int_0^y \varphi(t) dt = a$ , on calcule cette intégrale pour des bornes supérieures  $y$  que l'on initialise à 0 et que l'on incrémente de  $10^{-1}$  à chaque itération d'une boucle `while` jusqu'à atteindre ou dépasser la valeur  $a$ . On utilise la relation de Chasles pour ne pas recalculer l'intégrale depuis la borne inférieure 0 à chaque fois.

### Planche math-info 6

On dispose d'une urne avec  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ , on effectue  $n$  tirages avec remise. La variable aléatoire  $X$  compte le nombre de numéros distincts qui ont été tirés lors de cette expérience aléatoire.

1. Avec Python:

- Écrire une fonction prenant comme argument  $n$  et simulant la variable  $X$ .
- Écrire une fonction prenant comme arguments  $n$  et  $k$  et renvoyant une valeur approchée de  $P(X = k)$ .
- Écrire une fonction prenant comme argument  $n$  et retournant une valeur approchée de l'espérance  $E(X)$ . La tester avec  $n = 3$ .

2. Déterminer la loi de  $X$  pour  $n = 3$ .

3. Dans le cas général, calculer  $P(X = 1)$  et  $P(X = n)$ .

4. Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , soit  $X_i$  la variable indicatrice de l'événement  $A_i$ : "la  $i$ -ième boule a été tirée". En utilisant les  $X_i$ , calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ .

1. cf. script.

2. Si  $n = 3$ , alors  $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ . Sur les  $3^3 = 27$  tirages équiprobables, 3 conduisent à la réalisation de l'événement  $\{X = 1\}$ ,  $3! = 6$  conduisent à la réalisation de l'événement  $\{X = 3\}$ , les 18 restants à la réalisation de l'événement  $\{X = 2\}$ . Donc

$$P(X = 1) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}, \quad P(X = 2) = \frac{18}{27} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad P(X = 3) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}.$$

3. Avec  $n$  quelconque,  $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ . Sur les  $|\Omega| = n^n$  tirages équiprobables,  $n$  conduisent à la réalisation de l'événement  $\{X = 1\}$  donc  $P(X = 1) = \frac{n}{n^n} = \frac{1}{n^{n-1}}$ . Avec le même raisonnement,  $P(X = n) = \frac{n!}{n^n}$ .

4. Clairement  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ . D'autre part,  $P(X_i = 0) = \frac{(n-1)^n}{n^n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$  pour tout  $i$  donc  $X_i \sim \mathcal{B}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)$  et  $E(X_i) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ . Par linéarité de l'espérance,

$$E(X) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right).$$

Par la formule de Koenig-Huygens,  $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ . Or

$$X^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 + \sum_{i \neq j} X_i X_j = \sum_{i=1}^n X_i + \sum_{i \neq j} X_i X_j$$

et, pour  $i \neq j$ , la variable  $X_i X_j$  suit une loi de Bernoulli avec

$$\begin{aligned} P(X_i X_j = 0) &= P(\{X_i = 0\} \cup \{X_j = 0\}) \\ &= P(X_i = 0) + P(X_j = 0) - P(X_i = 0, X_j = 0) \\ &= \frac{2(n-1)^n - (n-2)^n}{n^n} \end{aligned}$$

donc  $E(X_i X_j) = 1 - \frac{2(n-1)^n - (n-2)^n}{n^n}$ . Finalement,

$$E(X^2) = n \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right) + n(n-1) \left(1 - \frac{2(n-1)^n - (n-2)^n}{n^n}\right).$$

Afin de ne pas heurter les plus sensibles de mes lecteurs ou lectrices, je n'achève pas le calcul.

### Planche math-info 7

Pour  $x \in ]-1, 1[$ , on pose  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ .

- Notons  $a_n$  le  $n$ -ième coefficient du développement en série entière de  $f$ . Trouver une équation différentielle du premier ordre vérifiée par  $f$ , en déduire une relation entre  $a_n$  et  $a_{n+1}$ . Écrire un script Python pour calculer  $a_n$ .
- On pose  $S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  pour  $x$  réel et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Écrire une fonction Python pour calculer  $S_n(x)$  en fonction de  $n$  et de  $x$ .
- Tracer les points  $M_n$  de coordonnées  $(n, a_n)$  pour  $n$  de 0 à 10. Que peut-on conjecturer sur la suite  $(a_n)$ ? Monotonie et limite de la suite  $(a_n)$ ? Pour déterminer la limite de  $a_n$ , on cherchera un réel  $\alpha$  tel que la série  $\sum \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$  converge.
- Tracer les points  $P_n$  de coordonnées  $(n, 2S_n(-1))$  pour  $n$  de 0 à 10. Que peut-on conjecturer sur la limite  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2S_n(-1))$ ? Prouver cette conjecture.

-----

1. On a  $f'(x) = \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}} = \frac{f(x)}{2(1-x)}$ , soit **(E)**:  $2(x-1)f'(x) + f(x) = 0$ . Avec  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  pour  $x \in ]-1, 1[$ , cela donne

$$2 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0,$$

donc, par unicité du développement en série entière,  $2(n+1)a_{n+1} - (2n+1)a_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Pour programmer le calcul des  $a_n$  de façon récursive, il sera plus commode d'écrire  $a_n = \frac{2n-1}{2n} a_{n-1}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , cf. script.

**Remarque.** D'après le cours, on a aussi

$$a_n = \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n = \binom{-\frac{1}{2}}{n} \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \cdots \left(-\frac{1}{2} - n + 1\right) \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}.$$

2. cf. script.

3. On peut conjecturer que  $(a_n)$  décroît et tend vers 0. La décroissance est facile puisque  $a_n > 0$  et  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$ . Pour la limite nulle, utilisons l'indication, soit  $\alpha$  un réel, posons

$$u_n = \ln \left( \left( \frac{n+1}{n} \right)^\alpha \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \alpha \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left( \frac{2n+1}{2n+2} \right),$$

soit encore  $u_n = (\alpha - 1) \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) + \ln \left( 1 + \frac{1}{2n} \right)$ . On fait un petit développement limité "à l'économie", i.e. en utilisant  $\ln(1+x) = x + O(x^2)$  lorsque  $x \rightarrow 0$ , cela donne

$$u_n = (\alpha - 1) \left( \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{2\alpha - 1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

En choisissant  $\alpha = \frac{1}{2}$ , la série  $\sum u_n$  est alors absolument convergente, donc convergente, puisque son terme général est un  $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Mais l'on observe que, avec  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,

$$u_n = \ln(\sqrt{n+1} a_{n+1}) - \ln(\sqrt{n} a_n),$$

on reconnaît donc une série télescopique. On a donc prouvé la convergence de la suite de terme général  $\ln(\sqrt{n} a_n)$ . Posons  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(\sqrt{n} a_n)$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} a_n = e^l > 0$ , puis

$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^l}{\sqrt{n}}$ . On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ .

**Remarque.** De l'expression  $a_n = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$  et de la formule de Stirling, on peut déduire plus précisément l'équivalent  $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ .

4. On dirait bien que  $l = \sqrt{2}$ ... Prouvons-le, pardi!

Il s'agit en fait de montrer que  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Posons  $u_n(x) = a_n x^n$ , les fonctions  $u_n$  sont continues sur le segment  $I = [-1, 0]$  et la série de fonctions  $\sum u_n$  converge uniformément sur ce segment. En effet, pour  $x \in I$  fixé, la suite de terme général  $|u_n(x)| = a_n |x|^n$  décroît et tend vers zéro (conséquence facile de la question 3.), et la série  $\sum u_n(x)$  est alternée, on peut donc majorer son reste:

$$|R_n(x)| := \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq |u_{n+1}(x)| = a_{n+1} |x|^{n+1} \leq a_{n+1}.$$

Cette majoration **uniforme** du reste montre que  $\|R_n\|_{\infty, I} \leq a_{n+1}$ , donc  $\|R_n\|_{\infty, I} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , ce qui prouve la convergence uniforme de la série  $\sum u_n$  sur  $I$ . La fonction somme  $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  est alors continue sur  $I$  et en particulier au point  $-1$  (à droite). Comme  $S$  coïncide avec  $f$  sur  $] -1, 0]$ , on a donc

$$S(-1) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} S(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

ce qui prouve que  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 S_n(-1) = \sqrt{2}$ .

**Remarque.** On a ainsi calculé la somme d'une série, à savoir  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \binom{2n}{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

### Planche math-info 8

1. Pour  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , on introduit la matrice  $M(a, b) = \begin{pmatrix} 3a - 2b & -6a + 6b + 3 \\ a - b & -2a + 3b + 1 \end{pmatrix}$ .

On pose  $e(a, b) = |\lambda_1 - \lambda_2|$ , où  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les deux valeurs propres complexes de  $M(a, b)$ .

Écrire une fonction `ecart(a, b)` retournant une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de  $e(a, b)$ .

2.a. Soient  $A$  et  $B$  deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ , de même loi géométrique  $\mathcal{G}(p)$  avec  $0 < p < 1$ . Écrire une fonction `hasard(p)` qui, étant donné  $p$ , réalise la simulation de 500 valeurs  $(a, b)$  du couple aléatoire  $(A, B)$ , et renvoie le nombre de fois où `ecart(a, b)` est supérieur à  $10^{-1}$ .

b. Pour  $p = \frac{1}{100}, \frac{2}{100}, \dots, \frac{99}{100}$ , relier les points de coordonnées  $\left(p, \frac{\text{hasard}(p)}{500}\right)$ .

c. Sur le même graphique, tracer la courbe représentative de  $p \mapsto \frac{2-2p+p^2}{2-p}$  pour  $p \in ]0, 1[$ .

3.a. Montrer que  $M(a, b)$  est semblable à  $N(a, b) = \begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ .

b. À quelle condition  $N(a, b)$  est-elle diagonalisable ?

c. Calculer la probabilité de l'événement: " $M(A, B)$  est diagonalisable".

-----

1. et 2. cf. script.

3.a. On peut observer que  $M(a, b) - (a+1)I_2 = \begin{pmatrix} 2a-2b-1 & -6a+6b+3 \\ a-b & -3a+3b \end{pmatrix}$  est de rang au plus 1 puisque ses colonnes sont liées par la relation  $3C_1 + C_2 = 0$ , et ceci montre aussi que  $a+1 \in \text{Sp}(M(a, b))$  et que le vecteur  $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$  est vecteur propre de  $M(a, b)$  pour la valeur propre  $a+1$ . On cherche alors un vecteur  $X_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  tel que  $M(a, b) \cdot X_2 = X_1 + bX_2$ , soit  $(M(a, b) - bI_2)X_2 = X_1$ , ce qui ramène à l'équation  $(a-b)x + (-2a+2b+1)y = 1$ , et on voit que  $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  convient. On a donc  $M(a, b) = P \cdot N(a, b) \cdot P^{-1}$  avec  $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

b. Si  $b \neq a+1$ , la matrice  $N(a, b)$  admet deux valeurs propres distinctes donc elle est diagonalisable. Si  $b = a+1$ , elle a alors une seule valeur propre et ce n'est pas une matrice scalaire, elle n'est donc pas diagonalisable.

**Bilan:** La matrice  $N(a, b)$ , et donc aussi la matrice  $M(a, b)$  qui lui est semblable, est diagonalisable si et seulement si  $b \neq a+1$ .

c. Notons  $E$  l'événement " $M(A, B)$  est diagonalisable". Alors  $E = \{B \neq A+1\}$ , il est plus facile de travailler sur l'événement contraire  $\bar{E} = \{B = A+1\}$ . Ainsi, en posant  $q = 1-p$ ,

$$\begin{aligned} P(B = A + 1) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{A = k\} \cap \{B = k + 1\}) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(A = k) P(B = k + 1) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1} pq^k = p^2 q \sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k \\ &= \frac{p^2(1-p)}{1-(1-p)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } P(E) = 1 - P(B = A + 1) = \frac{2-2p+p^2}{2-p}.$$

**Planche math-info 9**

Pour  $x \in ]-1, 1[$ , on pose  $f(x) = \frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)}$ .

- a. Montrer que  $f$  est développable en série entière sur  $] - 1, 1[$ .
- b. On note  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$  ce développement en série entière. Écrire une fonction en langage Python qui calcule  $c_n$ , prenant  $n$  comme argument. Calculer  $c_n$  pour  $n \in \llbracket 0, 199 \rrbracket$ .
- c. Avec Python, comparer  $c_n$  et  $c_{n+6}$  pour  $n \in \llbracket 0, 184 \rrbracket$ . Faire une conjecture.
- d. En considérant la fonction  $g : x \mapsto (1-x^6)f(x) - \frac{1}{1-x}$ , prouver cette conjecture.
- e. Pour tout  $n$  entier naturel, on pose  $D_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid 2p + 3q = n\}$ , et  $d_n = \text{Card}(D_n)$ . Écrire une fonction Python prenant comme argument un entier naturel  $n$  et retournant la liste des éléments de l'ensemble  $D_n$ .
- f. Vérifier expérimentalement la relation  $c_n = d_n$ , puis la démontrer.

-----

- a. Les fonctions  $u : x \mapsto \frac{1}{1-x^2} = (1-x^2)^{-1}$  et  $v : x \mapsto \frac{1}{1-x^3} = (1-x^3)^{-1}$  sont DSE sur  $] - 1, 1[$ . Par produit de Cauchy, il en est donc de même de  $f = uv$ . Pour le calcul, précisons:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad \text{avec} \quad a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \pmod 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

De même,

$$v(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{3k} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n, \quad \text{avec} \quad b_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \pmod 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Enfin, pour  $|x| < 1$ ,  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$  avec  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ .

- b. cf. script.
- c. cf. script. Il semblerait que  $c_{n+6} = c_n + 1$ .
- d. D'une part, on calcule, pour  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ ,

$$g(x) = \frac{1-x^6}{(1-x^2)(1-x^3)} - \frac{1}{1-x} = \frac{(1-x^6) - (1+x)(1-x^3)}{(1-x^2)(1-x^3)} = \frac{-x^6 + x^4 + x^3 - x}{x^5 - x^3 - x^2 + 1} = -x.$$

D'autre part, sur  $] - 1, 1[$ , on a

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - x^6 f(x) - \frac{1}{1-x} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{n+6} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n - \sum_{n=6}^{+\infty} c_{n-6} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\
&= \sum_{n=0}^5 (c_n - 1) x^n + \sum_{n=6}^{+\infty} (c_n - c_{n-6} - 1) x^n,
\end{aligned}$$

et ceci doit aussi être égal à  $-x = 0x^0 - 1x^1 + \sum_{n=2}^{+\infty} 0x^n$  sur  $] -1, 1[$ . Par unicité du développement en série entière, on peut identifier les coefficients, ce qui donne notamment  $c_n - c_{n-6} - 1 = 0$  pour tout  $n \geq 6$ , soit  $c_{n+6} = c_n + 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

e. *cf.* script.

f. On a  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ , mais  $a_k$  et  $b_{n-k}$  prenant leurs valeurs dans  $\{0, 1\}$ , il en est de même de leur produit, qui vaut alors 1 si et seulement si  $a_k = 1$  et  $b_{n-k} = 1$ , donc si et seulement s'il existe  $p$  et  $q$  entiers naturels tels que  $k = 2p$  et  $n - k = 3q$ . Donc  $c_n$  est égal au nombre d'entiers  $k$  dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$  tels que  $2 \mid k$  et  $3 \mid n - k$ , c'est aussi le nombre de couples  $(p, q)$  dans  $\llbracket 0, n \rrbracket^2$ , donc dans  $\mathbb{N}^2$ , tels que  $2p + 3q = n$ . Ainsi  $c_n = d_n$ .

---