Planche math-info 10

On pose $c_0(x) = 1$ et, pour x réel et $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n(x) = \dfrac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}$.

1. Écrire une fonction `c(n,x)` retournant $c_n(x)$. Tester pour $n = 10$ et $x \in \{-1,5\ ;\ 0,5\ ;\ 3\}$.

2. On pose $s_N(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} c_n(x)$. En programmer le calcul sur Python.

3. Tracer les courbes représentatives de $x \mapsto s_N(x)$ pour N de 0 à 15 sur l'intervalle $[-3, 6]$. Peut-on conjecturer la nature de la série $\displaystyle\sum_n c_n(x)$ si $x \leq -1$? Et si $x \geq 0$?

4. Pour $x \leq -1$, montrer que $\left|c_n(x)\right| \geq 1$. Que dire de la nature de la série $\displaystyle\sum_n c_n(x)$?

5. On prend maintenant $x \in \mathbb{R}_+$. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} c_n(x)$.

- -

1. et 2. *cf.* script.

3. Si $x \leq -1$, il semblerait que les sommes partielles de la série à étudier “s'éparpillent”, plus précisément que les sommes partielles d'indice pair croissent et tendent vers $+\infty$ alors que celles d'indice impair décroissent et tendent vers $-\infty$... à moins que ce ne soit l'inverse. La série serait donc divergente.

Si $x \geq 0$, les sommes partielles semblent “ne plus trop bouger” à partir du rang $N = 4$ ou 5, ce qui laisserait supposer que la série converge.

4. Si $x \leq -1$, alors les facteurs au numérateur de $c_n(x)$ sont tous négatifs avec $|x - k| \geq k + 1$ donc

$$\left|c_n(x)\right| \geq \frac{1 \times 2 \times \cdots \times n}{n!} = 1$$

et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} c_n(x)$ est donc grossièrement divergente.

5. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. D'abord, si $x \in \mathbb{N}$, on a $c_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq x + 1$ donc la série est évidemment convergente.

Sinon, les termes $c_n(x)$ sont tous non nuls. Posons $p = \lfloor x \rfloor$, alors $p \in \mathbb{N}$ et $p < x < p + 1$. La série est alternée à partir du rang $p + 2$.

On observe que $\left|\dfrac{c_{n+1}(x)}{c_n(x)}\right| = \left|\dfrac{x-n}{n+1}\right| = \dfrac{n-x}{n+1}$ pour $n \geq p+1$ donc $\left|\dfrac{c_{n+1}(x)}{c_n(x)}\right| \leq 1$, la valeur absolue du terme général est donc décroissante à partir d'un certain rang.

Enfin, pour $n \geq p + 1$,

$$\left|c_n(x)\right| = \frac{x(x-1)\cdots(x-p)(p+1-x)\cdots(n-1-x)}{n!} \leq \frac{(p+1)!\,(n-1)!}{n!} = \frac{(p+1)!}{n}\ ,$$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|c_n(x)\right| = 0$. Le critère des séries alternées permet alors d'affirmer que la série de terme général $c_n(x)$ est convergente.

Planche math-info 11

Soient $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 13 & 7 & 4 \\ 7 & 13 & 4 \\ 4 & 4 & 16 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Soient $M = \dfrac{1}{6}\ \mathrm{diag}(13, 13, 16)$ et $N = M - A$.

a. Montrer que l'équation $AX = B$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, a une solution unique que l'on notera L. La calculer avec Python.

b. On considère une suite vectorielle (X_n) avec $X_0 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et la relation de récurrence

$$\textbf{(R):} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad X_{n+1} = M^{-1}\left(NX_n + B\right).$$

Écrire une fonction Python, prenant pour arguments X_0 et n, et retournant la liste $[X_0, \cdots, X_n]$.

c. Tester cette fonction avec $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Qu'observe-t-on ?

d. **Si** la suite (X_n) converge, quelle est sa limite ?

e. En utilisant Python, vérifier que la matrice $M^{-1}N$ est diagonalisable et donner des valeurs approchées de ses valeurs propres.

f. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = L$.

- -

a. On calcule par exemple $\det(A) = 8 \neq 0$ donc A est inversible, et le système linéaire $AX = B$ est un système de Cramer dont la solution unique est $L = A^{-1}B$. On a en fait $L = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}^{\top}$.

b. *cf.* script.

c. La suite vectorielle (X_n) semble converger vers L.

d. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = X_\infty$, par continuité du produit matriciel, en passant à la limite dans **(R)**, on obtient $X_\infty = M^{-1}(NX_\infty + B)$, soit $MX_\infty = NX_\infty + B$, ou encore $AX_\infty = B$, donc $X_\infty = L$.

e. On observe que $M^{-1}N$ admet trois valeurs propres distinctes donc elle est diagonalisable. De plus, ces trois valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1, cela servira pour la suite.

f. Comme $B = AL = (M - N)L$, on a

$$X_{n+1} - L = M^{-1}NX_n + M^{-1}B - L = M^{-1}NX_n + M^{-1}(M-N)L - L = M^{-1}N(X_n - L).$$

De plus, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^{-1}N = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$ où α, β, γ sont les valeurs propres de $M^{-1}N$. Comme ces trois valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} D^n = 0$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Par une récurrence immédiate, on a, pour tout n,

$$X_n - L = (M^{-1}N)^n(X_0 - L) = (PDP^{-1})^n(X_0 - L) = PD^nP^{-1}(X_0 - L).$$

De $\lim\limits_{n\to+\infty} D^n = 0$ et de la continuité du produit matriciel, on déduit $\lim\limits_{n\to+\infty}(X_n - L) = 0$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = L$.

Remarque. Cette méthode itérative pour calculer de façon approchée la solution d'un système linéaire n'a d'intérêt que parce que la matrice M (ici diagonale) est beaucoup plus facile à inverser que la matrice A de départ. Évidemment, ce type de méthode n'a d'intérêt pratique que dans le cas de très gros systèmes et pas pour des systèmes 3×3.

Planche math-info 12

1.a. Montrer que, pour tout n entier naturel, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \quad P_n(k) = \frac{k}{k+1} \ .$$

Expliciter ce polynôme P_n.

b. "À la main", trouver les polynômes P_1 et P_2.

c. Écrire une fonction `P(n)` retournant les coefficients du polynôme P_n. En notant $P_n = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, la fonction renverra la liste $[a_0, a_1, \cdots, a_n]$.

d. Montrer que le coefficient dominant du polynôme P_n est $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$.

2.a. Écrire une fonction `eval(P,x)` qui évalue le polynôme P en le réel x. Évaluer P_n en $n+1$ pour $n \in [\![1, 16]\!]$. Que peut-on conjecturer ?

b. Prouver cette conjecture. *On pourra considérer* $Q_n = (X+1)P_n - X$.

- -

1.a. Allez, construisons un isomorphisme, c'est rigolo! L'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ définie par $\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \varphi(P) = \big(P(0), P(1), \cdots, P(n)\big)$ est clairement linéaire. Elle est injective car, si $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors P est de degré au plus n et admet $n+1$ racines, donc $P = 0$. Comme $\dim\big(\mathbb{R}_n[X]\big) = \dim(\mathbb{R}^{n+1})$, elle est bijective ce qui répond à la question posée.

Le cours permet d'expliciter P_n: on a en effet $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k+1} L_k$, où L_k est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui prend la valeur 1 au point n et la valeur 0 en les autres points $j \in [\![0, n]\!] \setminus \{k\}$, vous aurez reconnu le polynôme de Lagrange $L_k = \prod_{0 \le j \le n, j \ne k} \left(\frac{X-j}{k-j}\right)$.

Donc

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k+1} \prod_{0 \le j \le n, j \ne k} \left(\frac{X-j}{k-j}\right) .$$

b. On obtient $P_1 = \frac{1}{2}X$ et $P_2 = -\frac{1}{6}X^2 + \frac{2}{3}X$.

c. *cf.* script. Une remarque: on peut bien sûr utiliser la formule obtenue en **1.a.** pour expliciter P_n et en programmer le calcul en utilisant le module `numpy.polynomial`, mais c'est assez moche à écrire. J'ai préféré remarquer qu'on obtient les coefficients a_i du polynôme P_n en résolvant un système linéaire dont la matrice est une matrice de Vandermonde.

d. De l'expression ci-dessus du polynôme P_n, on déduit que son coefficient dominant est

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k+1} \prod_{0 \le j \le n, j \ne k} \left(\frac{1}{k-j}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1) \times k \times (k-1) \times \cdots \times 1 \times (-1) \times (-2) \times \big(-(n-k)\big)} .$$

Il faut arranger ça, c'est moins rigolo que les isomorphismes!

$$\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!\,(-1)^{n-k}\,(n-k)!} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n} k \frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!}\,(-1)^{n-k} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n} \big((k+1)-1\big) \binom{n+1}{k+1} (-1)^{n-k} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \left[\sum_{k=0}^{n} (k+1) \binom{n+1}{k+1} (-1)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} (-1)^{n-k} \right] \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \left[(n+1) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} - \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^{n+1-j} \right]
\end{aligned}$$

après avoir appliqué la formule du capitaine (ou "du pion") dans la première somme et avoir fait une translation d'indice dans la deuxième. On reconnaît dans la première somme le développement par la formule du binôme de $\big(1+(-1)\big)^n = 0$ et dans la deuxième somme celui de $\big(1+(-1)\big)^{n+1}$ qui est aussi nul... sauf qu'il y manque le terme d'indice $j=0$ qui vaut $(-1)^{n+1}$. En étant précautionneux sur les signes, on obtient finalement $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Il y avait peut-être plus simple, mais je préfère construire des isomorphismes!

2.a. *cf.* script. Il semblerait que l'on obtienne une fois sur deux le nombre 1, et une fois sur deux des nombres de la forme $\dfrac{k}{k+1}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

b. On observe que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $Q_n(k) = (k+1)\,\dfrac{k}{k+1} - k = 0$. Le polynôme Q_n admet donc tous les entiers de 0 à n comme racines et, comme il est de degré n et de même coefficient dominant a_n que P_n, sa factorisation est $Q_n = a_n \displaystyle\prod_{k=0}^{n} (X-k)$.

En évaluant pour $X = n+1$, on obtient

$$Q_n(n+1) = a_n\,(n+1)! \qquad \text{mézôssi} \qquad Q_n(n+1) = (n+2)\,P_n(n+1) - (n+1)\;.$$

En comparant les deux expressions, on obtient

$$P_n(n+1) = \frac{a_n\,(n+1)! + (n+1)}{n+2} = \frac{n+1+(-1)^{n+1}}{n+2}\;,$$

ce qui correspond aux observations faites avec Python puisque, pour n impair, on obtient $P_n(n+1) = 1$ et, pour n pair ($n = 2k$), on obtient $P_n(n+1) = \dfrac{n}{n+2} = \dfrac{k}{k+1}$.

Planche math-info 13

Une personne possède deux paquets de chewing-gums, un dans sa poche gauche et un dans sa poche droite, contenant chacun n chewing-gums. Dès qu'elle a faim, elle pioche de manière équiprobable un chewing-gum dans l'une des deux poches. Au bout d'un certain temps elle pioche dans un paquet et s'aperçoit qu'il est vide. On note X_n la variable aléatoire qui correspond au nombre de chewing-gums restant dans l'autre poche lorsque la personne se rend compte qu'un paquet est vide.

a. Écrire un programme Python qui simule l'expérience et renvoie le nombre de chewing-gums restant dans l'autre poche. Donner une moyenne pour une centaine de répétitions.

b. Donner la loi de X_n.

c. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad (2n-k)\, P(X_n = k+1) = 2(n-k)\, P(X_n = k)\ .$$

Donner l'espérance de X_n, ainsi qu'un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$.

- -

a. *cf.* script.

b. Clairement, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

Si $k \in [\![0, n]\!]$, l'événement $\{X_n = k\}$ se réalise si et seulement s'il y a eu $2n-k+1$ tirages, les $2n-k$ premiers étant constitués de n tirages dans une poche (disons la poche A, qui sera alors vide à l'issue de ces tirages) et $n-k$ dans l'autre poche (disons la poche B), et enfin un dernier tirage dans la poche A pour s'apercevoir qu'elle est vide.

Il y a $2 \times \binom{2n-k}{n}$ réalisations possibles de cet événement, le facteur 2 provenant du fait que la poche A peut être celle de gauche et la poche B celle de droite, ou bien l'inverse. Chaque tirage étant équiprobable, on déduit que

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \qquad P(X_n = k) = 2 \times \frac{\binom{2n-k}{n}}{2^{2n-k+1}} = \frac{\binom{2n-k}{n}}{2^{2n-k}} = \frac{\binom{2n-k}{n-k}}{2^{2n-k}}\ .$$

c. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. En utilisant la "formule du capitaine": $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ avec $1 \leq k \leq n$, on obtient

$$\begin{aligned} 2\,(n-k)\, P(X_n = k) &= 2\,(n-k) \binom{2n-k}{n-k} \times \frac{1}{2^{2n-k}} \\ &= (2n-k) \binom{2n-k-1}{n-k-1} \times \frac{1}{2^{2n-k-1}} \\ &= (2n-k)\, P(X_n = k+1)\ . \end{aligned}$$

Pour $k = n$, la relation est vraie puisque $P(X_n = n+1) = 0$. Pour $k > n$, elle est encore vraie puisque les deux membres de l'égalité sont nuls.

En sommant les inégalités obtenues pour k allant de 0 à n, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n}(2n-k)\,P(X_n=k+1)=2\sum_{k=0}^{n}(n-k)\,P(X_n=k)\ .$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}P(X_n=k)=1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\,P(X_n=k)=E(X_n)$, en réorganisant un peu et en décalant les indices dans la première somme, on obtient l'égalité

$$(2n+1)\left(1-\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\right)-E(X_n)=2n-2\,E(X_n)\ ,$$

d'où finalement

$$E(X_n)=(2n+1)\,\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}-1=\frac{(2n+1)!}{(n!)^2\,4^n}-1\ .$$

Enfin, grâce à la formule de Stirling, on montre que $\displaystyle\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt{\pi\,n}}$. On en déduit facilement que

$$E(X_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}2\sqrt{\frac{n}{\pi}}\ .$$

Planche math-info 14

On donne la suite de fonctions définie de la façon suivante:

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad f_0(x)=x\qquad \text{et}\qquad \forall n\in\mathbb{N}\quad f_{n+1}(x)=3\,f_n\left(\frac{x}{3}\right)-4\left[f_n\left(\frac{x}{3}\right)\right]^3\ .$$

1. Écrire une fonction Python qui retourne $f_n(x)$ pour n et x donnés.

2. Représenter f_n pour $n\in[\![1,5]\!]$ sur l'intervalle $[0,4\pi]$. *On restreindra l'axe des ordonnées à* $[-3,3]$.

3. Soit $\Phi : x\mapsto 3x-4x^3$.

a. Représenter Φ sur $[-1,1]$ et $x\mapsto\Phi\big(\sin(x)\big)$ sur $[-2\pi,2\pi]$.

b. Prouver l'inégalité suivante

$$\forall(x,y)\in[-1,1]^2\qquad \big|\Phi(x)-\Phi(y)\big|\le 9\,|x-y|\ .$$

4. Montrer que $\forall x\in[-1,1]\ \ \forall n\in\mathbb{N}\quad \big|f_n(x)-\sin(x)\big|\le 9^n\left|\dfrac{x}{3^n}-\sin\left(\dfrac{x}{3^n}\right)\right|$.

5. En déduire la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[-1,1]$.

- -

1., 2., 3.a. *cf.* script.

3.b. On calcule $\Phi'(x) = 3 - 12x^2$ et, si $x \in [-1, 1]$, alors $-9 \leq \Phi'(x) \leq 3$, donc $\big|\Phi'(x)\big| \leq 9$, et Φ est 9-lipschitzienne sur $[-1, 1]$.

4. D'abord, une étude de variations montre que $\Phi\big([-1, 1]\big) \subset [-1, 1]$.

Or, pour tout x réel et tout n entier naturel, on a $f_{n+1}(x) = \Phi\left(f_n\left(\dfrac{x}{3}\right)\right)$.

Montrons alors par récurrence la proposition $(\mathcal{P}_n)$: $f_n\big([-1, 1]\big) \subset [-1, 1]$.

- c'est évident pour $n = 0$ puisque $f_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.
- si c'est vrai au rang n, soit $x \in [-1, 1]$, alors $\dfrac{x}{3} \in [-1, 1]$ donc $f_n\left(\dfrac{x}{3}\right) \in [-1, 1]$ par **(HR)**, puis $f_{n+1}(x) = \Phi\left(f_n\left(\dfrac{x}{3}\right)\right)$ et c'est plié.

On note aussi, avec un petit zeste de trigo, que $\Phi\left(\sin\dfrac{x}{3}\right) = 3\sin\left(\dfrac{x}{3}\right) - 4\sin^3\left(\dfrac{x}{3}\right) = \sin(x)$.

Montrons maintenant par récurrence la proposition
$(\mathcal{Q}_n)$: $\quad \forall x \in [-1, 1] \quad \big|f_n(x) - \sin(x)\big| \leq 9^n \left|\dfrac{x}{3^n} - \sin\dfrac{x}{3^n}\right|$.

- c'est immédiat pour $n = 0$.
- si c'est vrai au rang n, soit $x \in [-1, 1]$, alors

$$\big|f_{n+1}(x) - \sin(x)\big| = \left|\Phi\left(f_n\left(\frac{x}{3}\right)\right) - \Phi\left(\sin\frac{x}{3}\right)\right|.$$

Or, $\dfrac{x}{3} \in [-1, 1]$, donc $f_n\left(\dfrac{x}{3}\right) \in [-1, 1]$ d'après $(\mathcal{P}_n)$ ci-dessus, et $\sin\dfrac{x}{3} \in [-1, 1]$, on applique alors **3.c.**, on obtient, en appliquant ensuite **(HR)**:

$$\big|f_{n+1}(x) - \sin(x)\big| \leq 9\left|f_n\left(\frac{x}{3}\right) - \sin\frac{x}{3}\right| \leq 9 \times 9^n \left|\frac{\left(\frac{x}{3}\right)}{3^n} - \sin\left(\frac{\left(\frac{x}{3}\right)}{3^n}\right)\right|,$$

soit $\big|f_{n+1}(x) - \sin(x)\big| \leq 9^{n+1}\left|\dfrac{x}{3^{n+1}} - \sin\dfrac{x}{3^{n+1}}\right|$, soit $(\mathcal{Q}_{n+1})$ qu'il fallait démontrer.

5. On déduit de cela la convergence uniforme sur $[-1, 1]$ de la suite de fonctions (f_n) vers la fonction sinus. En effet, l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre deux permet d'écrire, en posant $M_3 = \|\sin^{(3)}\|_\infty = \|\sin\|_\infty = 1$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |\sin x - x| \leq \frac{M_3}{3!}|x|^3 = \frac{|x|^3}{6},$$

donc pour $x \in [-1, 1]$, on a

$$\big|f_n(x) - \sin(x)\big| \leq 9^n \left|\frac{x}{3^n} - \sin\frac{x}{3^n}\right| \leq \frac{9^n}{6}\left(\frac{|x|}{3^n}\right)^3 = \frac{|x|^3}{6 \times 3^n} \leq \frac{1}{6 \times 3^n},$$

soit $\|f_n - \sin\|_{\infty,[-1,1]} \leq \dfrac{1}{6 \times 3^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

On peut probablement obtenir mieux. Convergence uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$ *?*

Planche math-info 15

On donne la suite de fonctions (f_n) définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad f_n(x) = nx^3 + n^2 x - 2\ .$$

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n admet un unique zéro sur $\mathbb{R}$, on le note a_n.

b. Créer une fonction Python retournant a_n en fonction de n.

c. Montrer que la suite (a_n) est décroissante et prouver qu'elle converge.

d. Représenter $n^2 a_n$ en fonction de n pour $n \in [\![10, 100]\!]$. Formuler une conjecture sur le comportement asymptotique de a_n.

e. Prouver cette conjecture. Quelle est la nature de la série de terme général a_n ?

f. Déterminer, en fonction du réel α, la nature de la série de terme général $u_n = n^\alpha \left(a_n - \dfrac{2}{n^2}\right)$.

- -

a. La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est dérivable avec $f_n'(x) = 3nx^2 + n^2 > 0$, avec $\lim\limits_{-\infty} f_n = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f_n = +\infty$, donc elle établit une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Le réel 0 admet donc un unique antécédent a_n.

b. *cf.* script.

c. Comme f_n est croissante avec $f_n(0) = -2 < 0$, on a $a_n > 0$. On observe alors que

$$f_{n+1}(a_n) = (n+1)a_n^3 + (n+1)^2 a_n - 2 \geq n a_n^3 + n^2 a_n - 2 = f_n(a_n) = 0 = f_{n+1}(a_{n+1})\ .$$

Par croissance de la fonction f_{n+1}, on déduit que $a_{n+1} \leq a_n$, la suite (a_n) est donc décroissante. Comme elle est à valeurs positives, elle est minorée, elle est donc convergente.

d. *cf.* script. Il semblerait que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 a_n = 2$, soit $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2}$.

e. On a $0 < a_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ puisque $f_n(1) = n^2 + n - 2 \geq 0$, et **(*):** $n a_n^3 + n^2 a_n = 2$. Or,

$$0 \leq \frac{n a_n^3}{n^2 a_n} = \frac{a_n^2}{n} \leq \frac{1}{n}\ ,$$

le terme $n a_n^3$ est donc négligeable devant $n^2 a_n$ lorsque $n \to +\infty$. On a donc $n^2 a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2$, soit $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2}$. La série $\sum a_n$ converge donc.

f. La relation **(*)** s'écrit aussi $n^2 \left(a_n - \dfrac{2}{n^2}\right) = -n a_n^3$, donc

$$n^\alpha \left(a_n - \frac{2}{n^2}\right) = -n^{\alpha-1} a_n^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} -n^{\alpha-1} \left(\frac{2}{n^2}\right)^3 = -\frac{8}{n^{7-\alpha}}\ .$$

Par comparaison à une série de Riemann, la série $\sum n^\alpha \left(a_n - \dfrac{2}{n^2}\right)$ converge si et seulement si $7 - \alpha > 1$, i.e. si et seulement si $\alpha < 6$.