

Feuille d'exercices 1 : Rappels et compléments d'analyse

Etudes de suites.

Exercice 1 : 1) Soient a, b, u_0 trois complexes avec $a \neq 1$. Pour tout $n \geq 0$, on pose $u_{n+1} = au_n + b$. Calculer u_n pour tout $n \geq 0$.

2) Soient u_0, u_1 deux complexes.

a) Pour tout $n \geq 0$, on pose $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Calculer u_n pour tout $n \geq 0$.

b) Pour tout $n \geq 0$, on pose $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{u_n}{4}$. Calculer u_n pour tout $n \geq 0$.

Exercice 2 : 1) Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim(u_{n+1} - u_n) = \ell$. Montrer que $\lim \frac{u_n}{n} = \ell$.

2) Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\lim \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

Applications. Calculer les limites des suites $\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)$ et $\left(\frac{\sqrt[n]{n(n+1)} \dots (2n-1)}{n}\right)$.

Exercice 3 : Soient $a_0 \leq b_0$ deux réels positifs. On définit deux suites (a_n) et (b_n) en posant, pour tout $n \geq 0$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$. Montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

Exercice 4 (Etudes de suites définies par récurrence) : On commencera par tracer l'allure de la fonction utilisée pour conjecturer le comportement de la suite (qui peut dépendre de son premier terme!).

1) On fixe $u_0 \in [-1, +\infty[$ et, pour tout $n \geq 0$, on pose $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$. Etudier la suite (u_n) .

2) On fixe $v_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \geq 0$, on pose $v_{n+1} = e^{-v_n}$. Etudier la suite (v_n) .

3) On fixe $w_0 \in \mathbb{R}_+$ et, pour tout $n \geq 0$, on pose $w_{n+1} = |w_n^2 - 1|$. Etudier la suite (w_n) .

Exercice 5 (Etudes de suites définies implicitement) : 1) Etudier la suite de terme général u_n défini comme l'unique solution de l'équation $x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1 = 0$ dans $\mathbb{R}_+$.

2) Etudier la suite de terme général v_n défini comme l'unique solution de l'équation $x^{n+1} + x^n - n = 0$ dans $\mathbb{R}_+$.
(On pourra montrer que $\left(1 + \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^n - n \rightarrow +\infty$.)

Exercice 6 : 1) Soit (u_n) une suite à valeurs dans $[0, 1]$ telle que, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1}(1 - u_n) \geq \frac{1}{4}$.

En étudiant $x \mapsto x(1 - x)$ sur $[0, 1]$, montrer que (u_n) est croissante (donc elle converge) et calculer sa limite.

2) Soit (v_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que, pour tout $n \geq 0$, $v_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{v_n}$.

Montrer que (v_n) est décroissante (donc elle converge) et calculer sa limite.

Exercice 7 : Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+2} \leq \frac{u_{n+1} + u_n}{2}$.

1) Pour tout $n \geq 0$, on note $v_n = \max\{u_{n+1}, u_n\}$. Montrer que la suite (v_n) converge. On note ℓ sa limite.

2) Soit $\varepsilon > 0$.

a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_n \leq \ell + \varepsilon$.

b) Montrer que s'il existe $n \geq N + 1$ tel que $u_n < \ell - \varepsilon$, alors $v_n < \ell$.

c) Conclure que (u_n) tend vers ℓ .

Exercice 8 : Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que les suites extraites (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 9 (BWHP) : Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite. Si $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une extractrice telle que $(u_{\varphi(n)})$ converge, on dit que $\lim u_{\varphi(n)}$ est une *valeur d'adhérence* de la suite (u_n) .

- 1) Montrer que si (u_n) converge, alors (u_n) possède une unique valeur d'adhérence.
- 2) On fixe réciproquement une suite $(u_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ bornée possédant une unique valeur d'adhérence ℓ .
 - a) Ecrire la phrase logique signifiant que (u_n) ne tend pas vers ℓ .
 - b) Construire une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que, pour $\varepsilon > 0$ convenable, on ait $|u_{\varphi(n)} - \ell| > \varepsilon$ pour tout $n \geq 0$.
 - c) En déduire que (u_n) possède une valeur d'adhérence ℓ' avec $|\ell' - \ell| \geq \varepsilon$ et conclure à une contradiction.

Limites et continuité. Utilisation des théorèmes globaux

Exercice 10 : Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0, 1]$. On suppose que $f(0) = f(1) = 0$ et que, pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$.

- a) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, pour tout $p \in \llbracket 0, 2^n \rrbracket$, on a $f\left(\frac{p}{2^n}\right) = 0$ (on raisonnera par récurrence sur n .)
- b) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, la suite de terme général $u_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n}$ (à valeurs dans $[0, 1]$) tend vers x .
- c) Conclure que f est identiquement nulle sur $[0, 1]$

Exercice 11 : Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue sur $[0, 1]$.

- 1) Montrer que l'ensemble $E_f = \{x \in [0, 1] \text{ tel que } f(x) = x\}$ est non-vide.
- 2) On suppose que $f \circ f = f$. Montrer que l'ensemble $E_f = \{x \in [0, 1] \text{ tel que } f(x) = x\}$ est un intervalle.

Exercice 12 : Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction non-nulle, continue et décroissante sur $[0, 1]$.

- 1) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, il existe un unique $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = x^n$. On note x_n ce réel.
- 2) Montrer que la suite (x_n) est croissante et en déduire que (x_n) converge vers une limite notée ℓ .
- 3) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\ell^n \geq f(\ell)$ et en déduire que :
 - si $f > 0$ sur $[0, 1[$ alors $\ell = 1$;
 - sinon, $\ell = \inf\{x \in [0, 1[\text{ t.q. } f(x) = 0\}$. Que vaut $f(\ell)$ dans ce cas ?

Exercice 13 : Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$.

Montrer que, pour tout $n \geq 1$, il existe $\alpha_n \in [0, 1]$ tel que $f\left(\alpha_n + \frac{1}{n}\right) = f(\alpha_n)$.

(On pourra poser $g_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$ pour tout $x \in \left[0, \frac{n-1}{n}\right]$ et calculer $\sum_{k=0}^{n-1} g_n\left(\frac{k}{n}\right)$.)

Exercice 14 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $n \geq 1$ tel que $f^{[n]} = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ facteurs}}$ admet un point fixe. Montrer que f admet un point fixe (On pourra s'inspirer de l'exercice précédent.)

Exercice 15 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Dérivabilité et dérivation. Utilisation des théorèmes globaux

Exercice 16 : Justifier que la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, en calculant sa dérivée, montrer que

$$\frac{n^2}{\ln(n)} \left(\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \right) \text{ tend vers } -1.$$

Exercice 17 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f'(x)) = \ell \in \mathbb{R}$.

- a) Justifier que la fonction $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, par $g(x) = (f(x) - \ell)e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \geq M$, $|g(x) - g(M)| \leq \frac{\varepsilon}{2}(e^x - e^M)$.
- b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

Exercice 18 : Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et strictement décroissante. On note $g = f \circ f$.

- 1) Montrer qu'il existe un unique $\ell \in [0, 1]$ tel que $f(\ell) = \ell$ et que $0 < \ell < 1$.

On fixe $u_0 \in]\ell, 1]$ et, pour tout $n \geq 0$, on pose $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que (u_n) converge.

- 2) Montrer que $(u_{2n} - u_{2n+1})$ est à valeurs strictement positives et décroissante.
- 3) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, il existe $c_n \in]u_{2n+1}, u_{2n}[$ tel que $\frac{u_{2n+2} - u_{2n+3}}{u_{2n} - u_{2n+1}} = g'(c_n)$.
- 4) Conclure que $|f'(\ell)| \leq 1$.

Exercice 19 : Soient $n \geq 0$ un entier, $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} + f^{(n+1)}(c) \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$.
(On vérifiera dans la preuve que la condition $a < b$ ne sert qu'à donner sens à $[a, b]$!)

- a) Justifier qu'il existe un unique réel A tel que $f(b) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} + A \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$.
- b) Justifier que $\Delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Delta(x) = \left[\sum_{k=0}^n f^{(k)}(x) \frac{(b-x)^k}{k!} + A \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} \right] - f(b)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et s'annule en a et b . Conclure.

- c) **Application.** Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Exercice 20 : Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que la tangente au graphe de f au point d'abscisse c passe par l'origine du repère.

Exercice 21 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+$ telle que $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 22 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ telle que $f'(0) = 0$. Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ telle que, pour tout $x \geq 0$, $f(x) = g(x^2)$.

Exercice 23 : Montrer que, pour tout $x \in [0, 1[$, on a $x \leq \text{Arcsin}(x) \leq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 24 : Montrer que la fonction définie par $f(x) = \ln(1 + e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
En déduire que, pour tous $a, b > 0$, on a $1 + \sqrt{ab} \leq \sqrt{1+a}\sqrt{1+b}$.

Exercice 25 : Soient $p, q > 1$ deux réels tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que, pour tous $u, v > 0$, on a $\frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \geq uv$.

Exercice 26 : Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x > 0$, on pose $f_n(x) = x^n \ln(x)$.

- 1) Justifier que f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- 2) Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, pour tout $x > 0$, $f_n^{(n)}(x) = n! \left[\ln(x) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right]$.
- 3) Calculer $f_n^{(n)}(x)$ d'une autre façon et conclure que $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Calcul local et asymptotique

Exercice 27 : 1) On pose $(u_n) = (n - \sqrt[3]{n^3 + 1})$. Montrer que $u_n \rightarrow 0$ et calculer un équivalent de (u_n) .

2) On pose $(v_n) = \left(\sin \left(\frac{n^2 + 2n + 3}{n + 1} \right) \right)$. Montrer que $v_n \rightarrow 0$ et calculer un équivalent de (v_n) .

3) On pose $(w_n) = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} \right)$. Montrer que $w_n \rightarrow 0$ et calculer un équivalent de (w_n) .

4) On pose $(x_n) = \left(\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t^2}} dt \right)$. Montrer que $x_n \rightarrow 0$. Peut-on conjecturer un équivalent de (x_n) ?

Exercice 28 : 1) Calculer $\lim (3 \sqrt[n]{2} - 2 \sqrt[n]{3})^n$.

2) Pour tout $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in (\mathbb{R}_+^*)^r$, calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \sqrt[n]{\alpha_k} \right)^n$.

Exercice 29 : Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes au voisinage de 0 :

$$\text{a) } x \mapsto \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}, \quad \text{b) } x \mapsto \tan(x) - \sin(x), \quad \text{c) } x \mapsto \ln(\ln(1+x)).$$

Exercice 30 : Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes au voisinage de $+\infty$:

$$\text{a) } x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}, \quad \text{b) } x \mapsto x \ln(x+1) - (x+1) \ln(x).$$

Exercice 31 : Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes au voisinage de 1 :

$$\text{a) } x \mapsto \ln(x) \ln(1-x), \quad \text{b) } x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} - 1.$$

Exercice 32 : Soient $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}$ et x_0 un point intérieur à $\mathcal{D}$. Calculer

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2}.$$

Exercice 33 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x+y)f(x-y) \leq f(x)^2$ pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)f''(x) \leq f'(x)^2$.

Exercice 34 : 1) Calculer un $\text{DL}_4(0)$ de $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{1+x}$.

2) Calculer un $\text{DL}_9(0)$ de $x \mapsto (\text{Arctan } x)^2 - \text{Arctan}(x^2)$.

3) Calculer un $\text{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$.

4) Calculer un $\text{DL}_3(\frac{\pi}{4})$ de $x \mapsto \ln(\tan(x))$.

5) Calculer un $\text{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{\text{sh}(x)^2} - \frac{1}{\sin^2 x}$.

Exercice 35 : Justifier que la fonction définie par $f(x) = x + \ln(1+x)$ réalise une bijection $] -1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que la réciproque $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow] -1, +\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer un $\text{DL}_4(0)$ de f^{-1} .

Exercice 36 : Pour tout $n \geq 1$, calculer un $\text{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \ln \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \right)$.