

Leçon 1 : Rappels et compléments d'analyse

Table des matières

I Suites numériques	2
I.1 Convergence et limite	2
I.2 Cas des suites à valeurs réelles	2
I.2.a Limites et ordre	2
I.2.b Convergence monotone	3
I.2.c Limites infinies - Droite réelle achevée et voisinages	3
I.3 Suites extraites	4
II Limites et continuité d'une fonction de la variable réelle	5
II.1 Points adhérents à un intervalle	5
II.2 Litanie des définitions et caractérisations séquentielles de la limite - Limite monotone	5
II.3 Continuité d'une fonction en un point	6
II.4 Aspects globaux de la continuité d'une fonction à valeurs réelles sur un intervalle	7
III Dérivation d'une fonction de la variable réelle	8
III.1 Dérivabilité et dérivée en un point	8
III.2 Aspects globaux de la dérivabilité d'une fonction à valeurs réelles sur un intervalle	9
III.2.a Accroissements finis	10
III.2.b Variations et convexité	10
III.3 Dérivabilité d'ordre supérieur - Polynômes de Taylor	11
IV Analyse locale et asymptotique	13
IV.1 Relations de comparaison	13
IV.1.a Cas des suites	13
IV.1.b Cas des fonctions	14
IV.2 Développements limités	15
IV.2.a Définitions et propriétés élémentaires	15
IV.2.b Exemples de calcul	17

Dans toute cette leçon (et dans toutes les leçons d'analyse), $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'application $|\cdot| : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}_+$ désigne donc la valeur absolue ou le module. Elle est multiplicative et satisfait l'inégalité triangulaire (au sens où, pour tout $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, on a

$$|ab| = |a||b| \quad \text{et} \quad |a + b| \leq |a| + |b|,$$

ce qu'on peut généraliser par récurrence à tout produit ou somme finie).

En outre, cette application est 1-lipschitzienne (au sens où, pour tout $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, on a $||a| - |b|| \leq |a - b|$).

Rappelons enfin que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a les inégalités

$$\max\{|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)|\} \leq |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|.$$

I Suites numériques

I.1 Convergence et limite

Proposition-Définition I.1 : Une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ converge si la condition suivante est satisfaite :

Il existe $\ell \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$

Dans ce cas, ℓ est unique : c'est la limite de la suite (u_n) et on note $\lim u_n = \ell$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$.

On dit alors que (u_n) tend vers ℓ , et on note $u_n \longrightarrow \ell$ ou $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$. Dans le cas contraire, (u_n) diverge.

Exercice I.2 : Toutes les suites sont à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- 1) Soit (u_n) une suite convergente. Montrer que (u_n) est bornée.
- 2) Soient (u_n) une suite bornée et (v_n) une suite qui tend vers 0. Montrer que $(u_n v_n)$ tend vers 0.
- 3) Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes.
 - a) Montrer que $(u_n + v_n)$ converge et que $\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n$.
 - b) Montrer que $(u_n v_n)$ converge et que $\lim(u_n v_n) = (\lim u_n)(\lim v_n)$.

Remarque. Une suite constante est évidemment convergente. Par conséquent, si $\lambda \in \mathbb{K}$, la suite $(\lambda u_n + v_n)$ converge et $\lim(\lambda u_n + v_n) = \lambda(\lim u_n) + (\lim v_n)$. On généralise par récurrence aux combinaisons linéaires ou aux produits finis quelconques de suites convergentes.

Exercice I.3 (Théorème de Césaro) : Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite. Pour tout $n \geq 1$, on pose $C_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

On suppose que (u_n) converge et on note ℓ sa limite. On fixe également $\varepsilon > 0$.

- a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq N$, $|C_n - \ell| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{N-1} |u_k - \ell| + \frac{\varepsilon}{2}$.
- b) En déduire qu'il existe $N' \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq N'$, $|C_n - \ell| \leq \varepsilon$, i.e., que $C_n \longrightarrow \ell$.

Théorème I.4 (d'encadrement) : Soient $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ deux suites, et $\ell \in \mathbb{K}$. Si $|u_n - \ell| \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si (v_n) tend vers 0, alors (u_n) tend vers ℓ .

Exercice I.5 : Soient $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

Montrer que (u_n) tend vers ℓ si et seulement si $(\operatorname{Re}(u_n)) \longrightarrow \operatorname{Re}(\ell)$ et $(\operatorname{Im}(u_n)) \longrightarrow \operatorname{Im}(\ell)$.

I.2 Cas des suites à valeurs réelles

Dans le cas de suites à valeurs réelles, le théorème d'encadrement peut prendre la forme suivante : soient $(u_n), (v_n)$ et (w_n) trois suites, et $\ell \in \mathbb{R}$. Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang et si $u_n \longrightarrow \ell$ et $w_n \longrightarrow \ell$, alors $v_n \longrightarrow \ell$.

I.2.a Limites et ordre

Théorème I.6 : Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs réelles convergentes telles que $\lim u_n < \lim v_n$. Alors on a $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang.

Exercice I.7 : 1) Soit $(u_n) \in (\mathbb{K}^*)^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $\ell \in \mathbb{K}^*$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que, pour tout $n \geq 0$, $|u_n| \geq m$ et en déduire que $\lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ell}$.

2) Soit (u_n) une suite à valeurs strictement positive et $\ell < 1$ tels que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow \ell$.

Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $0 < u_n \leq u_N \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-N}$ et en déduire que $u_n \longrightarrow 0$.

Corollaire I.8 (Conservation des inégalités larges par passage à la limite) : Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs réelles convergentes telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang. Alors $\lim u_n \leq \lim v_n$.

I.2.b Convergence monotone

Une propriété essentielle de $\mathbb{R}$ est la propriété de la borne supérieure : soit Ω une partie non-vidée majorée de $\mathbb{R}$. Alors l'ensemble des majorants de Ω est un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ et a est la borne supérieure de Ω , notée $\sup(\Omega)$. C'est le plus petit des majorants de Ω .

En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, $\sup(\Omega) - \varepsilon$ ne majore pas Ω et il existe $\omega \in \Omega$ tel que $\sup(\Omega) - \varepsilon < \omega \leq \sup(\Omega)$. On notera qu'en faisant "varier" ε , on montre l'existence d'une suite $(\omega_n) \in \Omega^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim \omega_n = \sup(\Omega)$.

Si Ω est minoré, on définit de manière analogue la borne inférieure $\inf(\Omega)$ comme le plus grand de ses minorants.

Théorème I.9 (de convergence monotone) : Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite croissante majorée (resp. décroissante minorée). Alors (u_n) converge et $\lim u_n = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ (resp. $\lim u_n = \inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$).

Remarque I.10 : Attention ! Ce théorème ne permet pas de calculer la limite. Il montre simplement qu'elle existe, ce qui permet parfois de la manipuler pour calculer sa valeur.

Exercice I.11 : Pour tout $n \geq 1$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n + x - 1$ pour tout $x \geq 0$.

- Montrer que, pour tout $n \geq 1$, il existe un unique $u_n \in]0, 1[$ tel que $f_n(u_n) = 0$.
- Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $f_{n+1}(u_n) < 0$ et en déduire que la suite (u_n) est croissante donc convergente.
- En notant ℓ sa limite, montrer que, pour tout $n \geq 1$, $0 \leq f_n(\ell)$ et en déduire que $\ell = 1$.

Théorème I.12 (des suites adjacentes) : Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $(v_n - u_n)$ tend vers 0. Alors (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

I.2.c Limites infinies - Droite réelle achevée et voisinages

Définition I.13 : Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1) On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ et on note $\lim u_n = +\infty$ ou $u_n \rightarrow +\infty$ si

pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq N$, $u_n \geq A$.

2) On dit que (u_n) tend vers $-\infty$ et on note $\lim u_n = -\infty$ ou $u_n \rightarrow -\infty$ si

pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq N$, $u_n \leq A$.

Proposition-Définition I.14 (Voisinages) : On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et on convient que :

- un voisinage de $\ell \in \mathbb{R}$ est un segment $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ avec $\varepsilon > 0$;
- un voisinage de $+\infty$ est un intervalle $[A, +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$;
- un voisinage de $-\infty$ est un intervalle $] - \infty, A]$ avec $A \in \mathbb{R}$.

On peut alors unifier les définitions : une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ possède une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si

il existe $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que, pour tout voisinage V de ℓ , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geq N$, $u_n \in V$.

Remarques I.15 : 1) Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites à valeurs réelles avec $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq 0$.

Le théorème de minoration affirme que, si $u_n \rightarrow +\infty$, alors $v_n \rightarrow +\infty$.

Le théorème de majoration affirme que, si $v_n \rightarrow -\infty$ alors $u_n \rightarrow -\infty$.

2) Si Ω est une partie non-vidée de $\mathbb{R}$, on convient de noter $\sup(\Omega) = +\infty$ si Ω n'est pas majorée. Il existe alors une suite $(\omega_n) \in \Omega^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim \omega_n = +\infty$. Pareillement, on note $\inf(\Omega) = -\infty$ si Ω n'est pas minorée.

Avec cette convention, le théorème de la limite monotone toute suite croissante (resp. décroissante) admet $\sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ (resp. $\inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$) pour limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

3) On sait étendre partiellement les opérations $+$ et $\times$ sur $\overline{\mathbb{R}}$ en prenant garde aux formes indéterminées (F.I.)

$$\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 1^\infty, \quad 0^0.$$

Pour compléter notre inventaire, parlons également des voisinages à gauche et à droite :

Proposition-Définition I.16 : Soient (u_n) une suite à valeurs réelles et $\ell \in \mathbb{R}$.

- 1) On dit que (u_n) tend vers ℓ par valeurs supérieures, et on note $u_n \rightarrow \ell^+$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_n \in]\ell, \ell + \varepsilon]$. On dit que $] \ell, \ell + \varepsilon]$ est un voisinage à droite de ℓ .
- 2) On dit que (u_n) tend vers ℓ par valeurs inférieures, et on note $u_n \rightarrow \ell^-$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell[$. On dit que $[\ell - \varepsilon, \ell[$ est un voisinage à gauche de ℓ .

I.3 Suites extraites

Une extractrice est une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. Il est clair que, pour tout $n \geq 0$, on a $\varphi(n) \geq n$ et que la composée de deux extractrices est encore une extractrice.

Si $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est une suite et si $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une extractrice, la suite $(u_{\varphi(n)})$ est une suite extraite de (u_n) .

Par exemple, les suites (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{2^n}) sont extraites de (u_n) .

Exercice I.17 : Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ (resp. dans $\mathbb{R}$) et $\ell \in \mathbb{K}$ (resp. $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$).

- 1) Montrer que si (u_n) tend vers ℓ alors toutes ses suites extraites tendent vers ℓ .
- 2) Montrer que si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ alors (u_n) tend également vers ℓ .

Exemple I.18 : Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ une suite non-majorée. Pour tout $M \in \mathbb{R}_+$, pour tout $N \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } k \geq N \text{ et } u_k \geq M\}$ est donc non-vidé. En posant $\varphi(0) = 0$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$\varphi(n+1) = \min \{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } k \geq \varphi(n) + 1 \text{ et } u_k \geq n+1\},$$

on définit une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \geq 0$, $u_{\varphi(n)} \geq n$. Ainsi, $\lim(u_{\varphi(n)}) = +\infty$.

Complément Hors-Programme. L'essentiel des résultats d'analyse admis dans le programme de PSI, qu'on signalera tout au long de l'année par le tétragramme **BWHP**, repose sur le théorème suivant.

Théorème I.19 (Bolzano-Weierstrass) : De toute suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ bornée, on peut extraire une suite convergente.

Esquisse de preuve. Soit (u_n) une suite à valeurs dans le segment $[a_0, b_0] \subset \mathbb{R}$. Puisque la réunion de deux ensembles finis est finie, on construit par dichotomie deux suites (a_n) et (b_n) adjacentes telles que, pour tout $n \geq 0$, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } u_k \in [a_n, b_n]\}$ est infini (donc non-majoré). On en déduit que, pour tout $N \geq 0$, pour tout $n \geq 0$, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } k \geq N \text{ et } u_k \in [a_n, b_n]\}$ est non-vidé. En posant $\varphi(0) = 0$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$\varphi(n+1) = \min \{k \in \mathbb{N} \text{ tel que } k \geq \varphi(n) + 1 \text{ et } u_k \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\},$$

on construit par récurrence une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n$ pour tout $n \geq 0$ et $(u_{\varphi(n)})$ converge.

Si $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est bornée, on procède par extractions successives en raisonnant sur les parties réelles et imaginaires. $\square$

Exercice I.20 : Une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy si elle satisfait la condition suivante :

(Critère de Cauchy) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous entiers $p, q \geq N$, $|u_p - u_q| \leq \varepsilon$.

- 1) Montrer qu'une suite convergente est de Cauchy.
- 2) Soit réciproquement (u_n) une suite de Cauchy.
 - a) Montrer que (u_n) est bornée et en déduire que (u_n) possède une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge.
 - b) Montrer que $(u_n - u_{\varphi(n)})$ tend vers 0 et conclure que (u_n) est convergente.

II Limites et continuité d'une fonction de la variable réelle

II.1 Points adhérents à un intervalle

Rappelons qu'un intervalle I est une partie de $\mathbb{R}$ telle que, pour tous $a < b$ dans I , I contient le segment

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } a \leq x \leq b\}.$$

Il y a 9 types d'intervalles qu'on classe dans le tableau ci-contre, où "sup = b " (resp. "inf = a ") signifie que $b \in \mathbb{R}$ (resp. $a \in \mathbb{R}$) n'est pas un maximum (resp. un minimum), i.e., n'est pas dans I .

	sup = $+\infty$	sup = b	max = b
inf = $-\infty$	$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$	$] -\infty, b[$	$] -\infty, b]$
inf = a	$]a, +\infty[$	$]a, b[$	$]a, b]$
min = a	$[a, +\infty[$	$[a, b[$	$[a, b]$

Soient I un intervalle. On dit qu'un réel x_0 est :

- adhérent à droite de I si, pour tout $\varepsilon > 0$, $[x_0 - \varepsilon, x_0] \cap I \neq \emptyset$;
- adhérent à gauche de I si, pour tout $\varepsilon > 0$, $I \cap]x_0, x_0 + \varepsilon] \neq \emptyset$;
- adhérent à I s'il est adhérent à droite ou à gauche de I , i.e., si, pour tout $\varepsilon > 0$, $I \cap [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \neq \emptyset$.

L'adhérence $\bar{I}$ de I est l'ensemble des réels adhérents à I . C'est l'intervalle fermé de mêmes bornes.

On dit également que

- $+\infty$ est adhérent à I si I est non-majoré. De manière équivalente, pour tout $A \in \mathbb{R}$, $[A, +\infty[\cap I \neq \emptyset$;
- $-\infty$ est adhérent à I si I est non-minoré. De manière équivalente, pour tout $A \in \mathbb{R}$, $I \cap]-\infty, A] \neq \emptyset$.

et on unifie les définitions en disant qu'un point $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ est adhérent à I si, pour tout voisinage U de x_0 , $U \cap I \neq \emptyset$.

On dit qu'un réel x_0 est intérieur à I s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset I$ (ou, de manière équivalente, si x_0 est adhérent à droite et à gauche de I).

L'intérieur $\overset{\circ}{I}$ de l'intervalle I est l'ensemble des points intérieurs à I . C'est l'intervalle ouvert de même bornes.

On notera que seul un intervalle vide ou réduit à un point, de la forme $[a, a] = \{a\}$, est d'intérieur vide.

Enfin, un domaine $\mathcal{D}$ est une réunion (finie ou non) d'intervalles d'intérieurs non-vides.

Un point $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$ est adhérent (resp. un point $x_0 \in \mathbb{R}$ est adhérent à droite, resp. à gauche, resp. intérieur) à $\mathcal{D}$ s'il est adhérent (resp. adhérent à droite, resp. à gauche, resp. intérieur) à un des intervalles qui le constituent.

(Attention : un point adhérent à droite et à gauche de $\mathcal{D}$ peut ne pas être intérieur à $\mathcal{D}$!)

II.2 Litanie des définitions et caractérisations séquentielles de la limite - Limite monotone

Proposition-Définition II.1 : Soient $\mathcal{D}$ un domaine, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction et $x_0 \in \mathbb{R}$ un point adhérent à $\mathcal{D}$.

On dit que f possède une limite (finie) en x_0 s'il existe $\ell \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $|x - x_0| \leq \alpha$ implique $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.

Dans ce cas, ℓ est unique et on note $\ell = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$. En outre, f est bornée au voisinage de x_0 .

Théorème II.2 (Caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction en un point) : Soient $\mathcal{D}$ un domaine, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction et $x_0 \in \mathbb{R}$ un point adhérent à $\mathcal{D}$. Alors f possède une limite finie en x_0 si et seulement si, pour toute suite $(u_n) \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ qui tend vers x_0 , $(f(u_n))$ converge. Dans ce cas, on a toujours $f(u_n) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

Remarque II.3 : Ce théorème fondamental permet d'adapter sans effort au cas des fonctions l'essentiel des résultats du chapitre I (notamment, la compatibilité du passage à la limite avec les opérations, le théorème d'encadrement et la compatibilité de la limite avec l'ordre dans le cas de fonctions à valeurs réelles).

Il permet également de démontrer la compatibilité du passage à la limite avec la composition des fonctions : si $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ et $g : \mathcal{D}' \rightarrow \mathbb{K}$ (resp. $g : \mathcal{D}' \rightarrow \mathbb{R}$) sont deux fonctions, si $x_0 \in \mathbb{R}$ est adhérent à $\mathcal{D}$, si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} y_0$ (y_0 est alors nécessairement adhérent à $\mathcal{D}'$) et si $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \ell$, alors $g \circ f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$.

Grâce à l'ordre sur $\mathbb{R}$, on peut étendre la notion de limite dans deux directions :

- Si $x_0 \in \mathbb{R}$ est adhérent à gauche (resp. à droite) de $\mathcal{D}$, f peut admettre une limite à droite (resp. à gauche) en x_0 .
On parle aussi de la limite en x_0^+ (resp. en x_0^-).
Si $+\infty$ (resp. $-\infty$) est adhérent à $\mathcal{D}$, f peut admettre une limite en $+\infty$ (resp. en $-\infty$).
- Si f est à valeurs réelles, et dans chacun des 5 cas précédents, f peut tendre vers $\ell \in \mathbb{R}$ par valeurs (strictement) inférieures (resp. supérieures). On dit dans ce cas que $f(x)$ tend vers ℓ^- (resp. vers ℓ^+).
La fonction f peut également admettre une limite infinie et tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Il faut, dans chacune de ces (25) situations, savoir écrire la phrase à quantificateurs correspondante.

Exemples II.4 : Soient $\mathcal{D}$ un domaine, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

- Cas où x_0 est adhérent à droite de $\mathcal{D}$. On a $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^-} +\infty$ si, pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $x \in [x_0 - \alpha, x_0[$ implique $f(x) \geq M$.
- Cas où $+\infty$ est adhérent à $\mathcal{D}$. On a $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell^+$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $x \geq A$ implique $f(x) \in]\ell, \ell + \varepsilon]$.
- Cas où $-\infty$ est adhérent à $\mathcal{D}$. On a $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \ell$ si,
- Cas où x_0 est adhérent à gauche de $\mathcal{D}$. On a $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^+} \ell^-$ si,

Remarques II.5 : 1) On notera que, la notion de voisinage entendant aussi les voisinages à gauche ou à droite, toutes ces phrases sont de la forme :

Pour tout voisinage V de ℓ , il existe un voisinage U de x_0 tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $x \in U$ implique $f(x) \in V$.

A chaque cas correspond bien sûr une caractérisation séquentielle qui permet d'adapter encore les résultats du chapitre I (attention aux formes indéterminées !)

2) Dans le cas où x_0 est adhérent à gauche et à droite de $\mathcal{D}$, f possède une limite en x_0 si seulement si f possède une limite à gauche et à droite en x_0 , et si celles-ci sont égales (et égale à $f(x_0)$ lorsque $x_0 \in \mathcal{D}$).

Théorème II.6 (de la limite monotone) : Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone sur $\mathcal{D}$.

- 1) Si $x_0 \in \mathbb{R}$ est adhérent à droite de $\mathcal{D}$ (resp. si $\mathcal{D}$ n'est pas majoré), alors f admet une limite à gauche en x_0 (resp. une limite en $+\infty$). En outre,
 - a) si f est croissante, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup\{f(x), x \in]-\infty, x_0[\cap \mathcal{D}\}$ (resp. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sup\{f(x), x \in \mathcal{D}\}$).
 - b) si f est décroissante, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \inf\{f(x), x \in]-\infty, x_0[\cap \mathcal{D}\}$ (resp. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \inf\{f(x), x \in \mathcal{D}\}$).
- 2) Si $x_0 \in \mathbb{R}$ est adhérent à gauche de $\mathcal{D}$ (resp. si $\mathcal{D}$ n'est pas minoré), alors f admet une limite à droite en x_0 (resp. une limite en $-\infty$). En outre,
 - a) si f est croissante, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf\{f(x), x \in \mathcal{D} \cap]x_0, +\infty[\}$ (resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \inf\{f(x), x \in \mathcal{D}\}$).
 - b) si f est décroissante, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \sup\{f(x), x \in \mathcal{D} \cap]x_0, +\infty[\}$ (resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \sup\{f(x), x \in \mathcal{D}\}$).

II.3 Continuité d'une fonction en un point

Proposition-Définition II.7 : Soient $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction et $x_0 \in \mathcal{D}$. Si f possède une limite lorsque x tend vers x_0 , on a nécessairement $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. On dit dans ce cas que f est continue en x_0 .

C'est le cas si et seulement si, pour toute suite $(u_n) \in \mathcal{D}$ qui tend vers x_0 , $(f(u_n))$ tend vers $f(x_0)$.

- Remarques II.8 : 1)** Si x_0 est adhérent à $\mathcal{D}$ mais n'appartient pas à $\mathcal{D}$, et si $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ admet une limite finie égale à ℓ en x_0 , on peut prolonger f par continuité en posant $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in \mathcal{D}$ et $\tilde{f}(x_0) = \ell$. La fonction $\tilde{f} : \mathcal{D} \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{K}$ ainsi définie est continue en x_0 par construction. Il est fréquent qu'on la note encore f .
- 2)** Si $f, g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ sont continues en $x_0 \in \mathcal{D}$ alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda f + g$ et fg sont continues en x_0 .
Si, de plus, $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$ sont (définies au voisinage de x_0 et) continues en x_0 .
Si $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ est continue en x_0 et si $g : \mathcal{D}' \rightarrow \mathbb{K}$ est continue en $y_0 = f(x_0)$ alors $g \circ f : \mathcal{D} \xrightarrow{f} \mathcal{D}' \xrightarrow{g} \mathbb{K}$ est continue en x_0 . Dans cette veine, si $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ est continue en x_0 , la composée $\mathcal{D} \xrightarrow{f} \mathbb{K} \xrightarrow{\exp} \mathbb{K}^*$ l'est aussi.
- 3)** Si $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ est une fonction stabilisant le domaine $\mathcal{D}$, si on fixe $u_0 \in \mathcal{D}$ et si on pose $u_{n+1} = f(u_n)$, on définit par récurrence une suite (u_n) à valeurs dans $\mathcal{D}$. Si cette suite converge vers une limite $\ell \in \mathcal{D}$ et si f est continue en ℓ , on a nécessairement $f(\ell) = \ell$. On dit que ℓ est un point fixe de f .

Proposition-Définition II.9 : Soient $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction et $x_0 \in \mathcal{D}$ un point adhérent à droite (resp. à gauche) de $\mathcal{D}$.

On dit que f est continue à gauche (resp. à droite) en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ (resp. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$) existe et vaut $f(x_0)$.

Si x_0 est intérieur à $\mathcal{D}$, f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à droite et à gauche en ce point.

Exercice II.10 : On considère la fonction partie entière, notée $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ et définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } n \leq x\}$.

- a)** Montrer que $\lfloor \cdot \rfloor$ est croissante et sur-additive (au sens où, pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, on a $\lfloor x_1 \rfloor + \lfloor x_2 \rfloor \leq \lfloor x_1 + x_2 \rfloor$) sur $\mathbb{R}$.
- b)** Montrer que $\lfloor \cdot \rfloor$ est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, continue à droite et discontinue à gauche en tout entier.

II.4 Aspects globaux de la continuité d'une fonction à valeurs réelles sur un intervalle

Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction. On dit que f est continue sur $\mathcal{D}$ si f est continue en tous points de $\mathcal{D}$. On rappelle que la continuité est une propriété locale : elle se teste en chaque point de $\mathcal{D}$. D'après ce qui précède,

- une combinaison linéaire et un produit des fonctions $f, g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ continues sur $\mathcal{D}$ sont continus sur $\mathcal{D}$;
- la composée $g \circ f : \mathcal{D} \xrightarrow{f} \mathcal{D}' \xrightarrow{g} \mathbb{K}$ de fonctions continues sur $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ respectivement est continue sur $\mathcal{D}$;
- le quotient $\frac{f}{g}$ d'une fonction $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ continue sur $\mathcal{D}$ et d'une fonction $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}^*$ continue et qui ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$ est continu sur $\mathcal{D}$.

Théorème II.11 (Propriété de Cauchy) : Soient I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles continue sur I . Si $a < b$ sont deux points de I et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, i.e., si $f(a)f(b) \leq 0$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = 0$.

Corollaire II.12 (Théorème des valeurs intermédiaires) : Soient I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I . Alors $f(I)$ est un intervalle : l'image continue d'un intervalle est un intervalle.

De manière équivalente, pour tous $a < b \in I^2$, on a :

- si $f(a) \leq f(b)$ alors, pour tout $y \in [f(a), f(b)]$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$;
- si $f(b) \leq f(a)$ alors, pour tout $y \in [f(b), f(a)]$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.

Remarque II.13 : Le théorème des valeurs intermédiaires est un énoncé de surjectivité qui justifie la caractérisation "naïve" de la continuité : on peut tracer le graphe d'une fonction continue sans lever son crayon.

Exercice II.14 : 1) Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue sur $[0, 1]$. Montrer que f possède un point fixe.

2) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction k -lipschitzienne avec $k < 1$. Montrer que f possède un unique point fixe ℓ et que, pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie en posant $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \geq 0$ converge vers ℓ .

Proposition II.15 : Soient I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone sur I .

Alors f est continue sur I si et seulement si $f(I)$ est un intervalle

Exercice II.16 : Soient I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I .

Montrer que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est injective si et seulement si elle est strictement monotone sur I .

Théorème II.17 (de la bijection monotone) : Soient I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone et continue sur I . Alors $f : I \rightarrow f(I)$ est bijective et sa réciproque $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ est strictement monotone (de même monotonie que f) et continue sur $f(I)$.

De plus, en notant $a = \inf(I)$ et $b = \sup(I)$, $\alpha = \inf(f(I))$ et $\beta = \sup(f(I))$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, on a

a) si f est croissante, $\alpha = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $\beta = \lim_{x \rightarrow b} f(x)$.

En outre, $\alpha \in f(I)$ (resp. $\beta \in f(I)$) si et seulement si $a \in I$ (resp. $b \in I$);

b) si f est décroissante, $\alpha = \lim_{x \rightarrow b} f(x)$ et $\beta = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

En outre, $\alpha \in f(I)$ (resp. $\beta \in f(I)$) si et seulement si $b \in I$ (resp. $a \in I$);

Ainsi, les "bornes" qui se correspondent sont de même nature (*i.e.*, fermées ou ouvertes, soit encore, atteintes ou non). En particulier, $f(I)$ est un segment si et seulement si I est un segment.

Théorème II.18 (des bornes atteintes) : Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$. Alors f est bornée et atteint ses bornes. En d'autres termes, il existe α, β dans $[a, b]$ tels que $f([a, b]) = [f(\alpha), f(\beta)]$: l'image continue d'un segment est un segment. (Preuve BWHP)

Exercice II.19 : Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue admettant une limite finie en $+\infty$ est bornée.

III Dérivation d'une fonction de la variable réelle

III.1 Dérivabilité et dérivée en un point

Proposition-Définition III.1 : Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction.

1) Pour tous $x_1 \neq x_2$ dans $\mathcal{D}$, la droite passant par les points d'abscisses x_1 et x_2 du graphe de f est une corde (ou sécante) du graphe de f . Elle admet les équations

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \text{et} \quad y = f(x_2) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_2)$$

et son coefficient directeur est le taux de variation de f entre x_1 et x_2 .

2) Pour tout x_0 dans $\mathcal{D}$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) La fonction $\tau_{x_0} : \mathcal{D} \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ possède une limite finie en x_0 ;

(ii) La fonction f possède un développement limité à l'ordre 1 en x_0 , *i.e.*, il existe de scalaires α_0, α_1 tels que

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + o(x - x_0).$$

Si elles sont satisfaites, f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est le nombre dérivé de f en x_0 .

On a alors $\alpha_0 = f(x_0)$ et $\alpha_1 = f'(x_0)$, et la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_0 est la droite d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Remarques III.2 : 1) La dérivabilité d'une fonction en un point de son domaine de définition est donc, comme la continuité, une propriété locale de la fonction.

2) Une fonction $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable en x_0 si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont.

- 3) On écrit souvent le nombre dérivé de $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ dérivable en x_0 comme la limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.
La tangente est la "droite limite" des cordes entre les points d'abscisses x_0 et $x_0 + h$ lorsque h tend vers 0.
- 4) Une fonction $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ dérivable en x_0 est continue en ce point. On sait bien que la réciproque est fautive et on retiendra le cas de la valeur absolue et de la racine carrée en 0.

Chacune des deux caractérisations de la dérivabilité en un point permet de montrer les "théorèmes généraux" :

- Une combinaison linéaire et un produit de fonctions $f, g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ dérivables en $x_0 \in \mathcal{D}$ le sont également, la dérivation est linéaire et on a la formule de Leibniz dans le cas des produits.
- Si $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}^*$ est dérivable en x_0 , son inverse $\frac{1}{g}$ l'est également et $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.
Si, de plus, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ est dérivable en x_0 , on en déduit la dérivabilité et la dérivée de $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$ en x_0 .
- La composée $\mathcal{D} \xrightarrow{f} \mathcal{D}' \xrightarrow{g} \mathbb{K}$ de f dérivable en $x_0 \in \mathcal{D}'$ par g dérivable en $y_0 = f(x_0) \in \mathcal{D}'$ est dérivable en x_0 , et on a $(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0) = f'(x_0)(g' \circ f)(x_0)$.
- Si $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ est bijective et dérivable en $x_0 \in \mathcal{D}$, si $f^{-1} : \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}$ est continue en $y_0 = f(x_0)$ et si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en y_0 et $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)}$.

Exercice III.3 : 1) Soient $n \geq 1$ et $f_1, \dots, f_n : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ des fonctions dérivables en $x_0 \in \mathcal{D}$. On pose $f = \prod_{k=1}^n f_k$.
Justifier que f est dérivable en x_0 et calculer $f'(x_0)$. En déduire, dans le cas où f ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, la dérivée logarithmique $\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$ de f en x_0 .

- 2) Soit $f = f_1 + if_2 : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable en $x_0 \in \mathcal{D}$. Déterminer la forme algébrique de la composée $e^f : \mathcal{D} \xrightarrow{f} \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^*$ et en déduire que cette fonction est dérivable en x_0 . Calculer sa dérivée en ce point.
- 3) Soient $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ et $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ deux fonctions dérivables en x_0 et $\alpha > 0$ un réel. Justifier que $\frac{f}{g^\alpha} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ est dérivable en x_0 et calculer $\left(\frac{f}{g^\alpha}\right)'(x_0)$.

III.2 Aspects globaux de la dérivabilité d'une fonction à valeurs réelles sur un intervalle

Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction. On dit que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ si f est dérivable en tous points de $\mathcal{D}$. On rappelle que la dérivabilité est une propriété locale : elle se teste en chaque point de $\mathcal{D}$. On note alors $f' : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ la fonction dérivée de f qui associe à tout $x \in \mathcal{D}$ le nombre $f'(x)$ dérivé de f en x . D'après ce qui précède,

- une combinaison linéaire et un produit des fonctions $f, g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ dérivables sur $\mathcal{D}$ sont dérivables sur $\mathcal{D}$;
- le quotient $\frac{f}{g}$ d'une fonction $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ dérivable sur $\mathcal{D}$ et d'une fonction $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}^*$ dérivable et qui ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$ est dérivable sur $\mathcal{D}$;
- la composée $g \circ f : \mathcal{D} \xrightarrow{f} \mathcal{D}' \xrightarrow{g} \mathbb{K}$ de fonctions dérivables sur $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ respectivement est dérivable sur $\mathcal{D}$;
- si $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ est une fonction bijective, dérivable sur $\mathcal{D}$ et dont la dérivée ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, et si sa réciproque $f^{-1} : \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}$ est continue sur $\mathcal{D}'$, alors $f^{-1} : \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}$ est dérivable sur $\mathcal{D}'$.

En général, on considèrera dans ce contexte une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur un intervalle I dont on montrera la monotonie stricte par un calcul de dérivée pour conclure avec le théorème de la bijection monotone que $f : I \rightarrow f(I)$ est bijective et que $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ est continue sur $f(I)$.

Rappelons qu'une fonction $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$ si elle est dérivable sur $\mathcal{D}$ et si $f' : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ est continue sur $\mathcal{D}$. Les théorèmes généraux pour la continuité rappelés au début du paragraphe §II.4 assurent qu'on peut partout remplacer dérivable par $\mathcal{C}^1$ ci-dessus.

III.2.a Accroissements finis

Théorème III.4 (Rolle) : Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, continue sur le segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice III.5 : 1) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[a, b]$ telle que $f'(a)f'(b) \leq 0$.

Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f'(c) = 0$.

2) Soit $P = \prod_{k=1}^d (X - \alpha_k)$ avec $d \geq 2$ et $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_d$ un polynôme scindé à racines réelles simples.

Montrer que son polynôme dérivé P' est également scindé à racines réelles simples.

Corollaire III.6 (Egalité des accroissements finis - EAF) : Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Corollaire III.7 (Inégalité des accroissements finis - IAF) : Soient $a < b$ deux réels et $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, continues sur le segment $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$, telles que, pour tout $x \in]a, b[$, $|f'(x)| \leq g'(x)$. Alors on a $|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$.

Remarque III.8 : Si f' est bornée sur $]a, b[$ par une constante M (c'est toujours le cas si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ d'après le théorème des bornes atteintes), alors f est M -lipschitzienne et on a $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$.

Théorème III.9 (de la limite de la dérivée) : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ existe et vaut $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$ (et résultat analogue en b^- !)

Remarque III.10 : En d'autres termes, si la fonction dérivée de f admet une limite finie au bord d'un intervalle ouvert, alors f est dérivable en ce point. C'est un résultat d'interversion de passages à la limite : on a

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

et le théorème affirme que si la première limite existe, alors la seconde existe et a la même valeur. Le cas du prolongement en 0 de $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ montre que la réciproque est fautive.

III.2.b Variations et convexité

Le lien classique entre sens de variation et signe de la dérivée découle de l'égalité des accroissements finis :

Théorème III.11 : Soient I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I , dérivable sur l'intérieur $\overset{\circ}{I}$ de I .

- 1) Montrer que f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur $\overset{\circ}{I}$;
- 2) Montrer que f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur $\overset{\circ}{I}$;
- 3) Montrer que f est décroissante sur I si et seulement si $f' \leq 0$ sur $\overset{\circ}{I}$.

Exercice III.12 : 1) Soient I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur I , dérivable sur l'intérieur de I . Montrer que f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur $\overset{\circ}{I}$.

2) Justifier que la fonction définie par $x \mapsto \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, calculer sa dérivée et sa valeur en tout point de ce domaine. Quelle morale tirer de cet exemple ?

3) Justifier que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \sin(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Quelle morale tirer de cet exemple ?

L'équivalence des caractérisations de la notion plus subtile de convexité en découle également :

Définition III.13 : Soient I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est convexe sur I si

$$\text{pour tous } a, b \in I, \text{ pour tout } t \in [0, 1], \text{ on a } f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b).$$

Ca signifie graphiquement que Γ_f est en-dessous de toutes ses cordes !

On dit que f est concave sur I si $-f$ est convexe sur I (et toutes les inégalités précédentes sont "retournées").

Exercice III.14 : Soient I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe sur I . Montrer l'inégalité de Jensen :

$$\text{pour tout } n \geq 1, \text{ pour tous points } x_1, \dots, x_n \text{ dans } I, \text{ on a } f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(a_k).$$

Adapter dans le cas concave et en déduire l'inégalité arithmético-géométrique : pour tout $n \geq 1$, pour tous

$$a_1, \dots, a_n \text{ dans } \mathbb{R}_+^*, \text{ on a } \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Théorème III.15 : Soient I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I . On a l'équivalence de :

- (i) f est convexe sur I ;
- (ii) Pour tout $x_0 \in I$, la fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$ par $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est croissante sur $I \setminus \{x_0\}$;
- (iii) La fonction f' est croissante sur I ;
- (iv) Pour tout $x_0 \in I$, pour tout $x \in I$, $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \leq f(x)$.

Ca signifie graphiquement que Γ_f est au-dessus de toutes ses tangentes.

Exercice III.16 : 1) Montrer que $e^x \geq 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x \in]-1, +\infty[$.

2) Montrer que $\frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x$ pour tout $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et en déduire que $\sin(x) \leq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

3) Montrer que $\text{Arctan}(x) \leq x$ pour tout $x \in [0, +\infty[$ et que $\tan(x) \geq x$ pour tout $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

III.3 Dérivabilité d'ordre supérieur - Polynômes de Taylor

Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction dérivable sur $\mathcal{D}$. Si sa fonction dérivée $f^{(1)} := f' : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ est encore dérivable sur $\mathcal{D}$, on dit que f est deux fois dérivable sur $\mathcal{D}$ et on note $f^{(2)} := (f')' : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$. On note aussi $f'' := f^{(2)}$ (et la dérivée seconde mesure (localement) la convexité d'une fonction à valeurs réelles).

On généralise par récurrence : pour tout $n \geq 2$, on dit que f est n -fois dérivable sur $\mathcal{D}$ (ou de classe $\mathcal{D}^n$ sur $\mathcal{D}$) si f est $n-1$ fois dérivable sur $\mathcal{D}$ et si $f^{(n-1)} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ est dérivable sur $\mathcal{D}$.

On définit alors la dérivée n -ième $f^{(n)} = (f^{(n-1)})' : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ de f sur $\mathcal{D}$ et on montre que, pour tout $0 \leq k \leq n$, on a $f^{(n)} = (f^{(k)})^{(n-k)}$. Enfin, f est de classe $\mathcal{D}^n$ si et seulement si f est dérivable et f' est de classe $\mathcal{D}^{n-1}$.

On dit que f est n -fois continûment dérivable sur $\mathcal{D}$ (ou de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathcal{D}$) si, de plus, $f^{(n)}$ est continue sur $\mathcal{D}$.

On dit que f est infiniment continûment dérivable sur $\mathcal{D}$ (ou de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$) si $f^{(n)}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathcal{D}$ pour tout $n \geq 0$.

Les théorèmes généraux tels qu'énoncés en début de paragraphe III.2 sont encore valables en remplaçant partout "dérivable" par "de classe $\mathcal{D}^n$ ", "de classe $\mathcal{C}^n$ " ou "de classe $\mathcal{C}^\infty$ " sur $\mathcal{D}$. En particulier, on a la formule de Leibniz généralisée pour la dérivée n -ième d'un produit de fonctions n -fois dérivables :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Exercice III.17 (Prolongement C^n et application.) : 1) Soient I un intervalle et $x_0 \in I$, et $f : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $n \geq 1$ et supposons que f est de classe C^n sur $I \setminus \{x_0\}$ et que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f^{(k)}(x)$ existe (dans $\mathbb{R}$). Montrer que f est prolongeable (par continuité) en une fonction de classe C^n sur I .

2) Application. On pose $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Si $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une fonction n -fois dérivable sur I et si $x_0 \in \mathcal{D}$, son polynôme de Taylor à l'ordre n en x_0 est

$$T_{f,x_0,n} = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x_0) \frac{(X - x_0)^k}{k!} \in \mathbb{K}_n[X].$$

Avec les notations attendues, la formation du polynôme de Taylor est :

- compatible avec la dérivation au sens où $(T_{f,x_0,n})' = T_{f',x_0,n-1}$;
- compatible avec la primitivation au sens où, si $F : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une primitive de f sur I , on a, pour tout $x \in I$,

$$T_{F,x_0,n+1}(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^x T_{f,x_0,n}(t) dt;$$

- compatible avec les combinaisons linéaires et le produit au sens où $T_{\lambda f+g,x_0,n} = \lambda T_{f,x_0,n} + T_{g,x_0,n}$, et où il existe un polynôme Q tel qu'on a

$$T_{fg,x_0,n} = T_{f,x_0,n} \times T_{g,x_0,n} - (X - x_0)^{n+1} Q(X).$$

(En d'autres termes, $T_{fg,x_0,n}$ est le reste de la division euclidienne de $T_{f,x_0,n} \times T_{g,x_0,n}$ par $(X - x_0)^{n+1}$.)

Il faut absolument connaître les polynômes de Taylor en 0 des fonctions (de classe C^∞) définies au voisinage de 0 par $x \mapsto \frac{1}{1+ax}$ et $x \mapsto e^{ax}$ (avec $a \in \mathbb{C}^*$) : pour tout $n \geq 0$, on a

$$T_{\frac{1}{1+ax},0,n} = \sum_{k=0}^n (-a)^k X^k \quad \text{et} \quad T_{e^{ax},0,n} = \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} X^k.$$

On retiendra en particulier le cas de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ (et on retrouve la série géométrique).

Exercice III.18 : 1) Calculer $T_{\cos,0,2n}$, $T_{\sin,0,2n+1}$, $T_{\text{ch},0,2n}$ et $T_{\text{sh},0,2n+1}$ pour tout $n \geq 0$.

2) On fixe $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et, pour tout $k \geq 1$, on pose $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$ (et $\binom{\alpha}{0} = 1$).

En notant $f(x) = (1+x)^\alpha$ pour tout $x > -1$, calculer $T_{f,0,n}$ pour tout $n \geq 0$.

3) Applications.

a) ($\alpha = -1$). Expliciter $T_{\frac{1}{1+x},0,n}$ et en déduire $T_{\ln(1+x),0,n+1}$ pour tout $n \geq 0$. En remarquant que, pour tout

$x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-ix} + \frac{1}{1+ix} \right]$, calculer $T_{\frac{1}{1+x^2},0,2n}$ et en déduire $T_{\text{Arctan},0,2n+1}$ pour tout $n \geq 0$.

b) ($\alpha = -2$). Expliciter $T_{\frac{1}{(1+x)^2},0,n}$ pour tout $n \geq 0$ et retrouver ce résultat comme un produit puis comme une dérivée.

c) ($\alpha = -\frac{1}{2}$.) Justifier que, pour tout $k \geq 1$, $\prod_{i=1}^k \frac{2i-1}{2i} = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$ et en déduire une expression de $T_{\frac{1}{\sqrt{1+x}},0,n}$.

IV Analyse locale et asymptotique

IV.1 Relations de comparaison

IV.1.a Cas des suites

Définition IV.1 : Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- 1) (u_n) est dominée par (v_n) s'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ et une suite $(M_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ bornée tels que, pour tout $n \geq N$, $u_n = M_n v_n$. On note alors $u_n = O(v_n)$.
(De manière équivalente, il existe $N \in \mathbb{N}$ et un réel positif M tels que, pour tout $n \geq N$, $|u_n| \leq M|v_n|$.)
- 2) (u_n) est négligeable devant (v_n) s'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ et une suite $(\varepsilon_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 tels que, pour tout $n \geq N$, $u_n = \varepsilon_n v_n$. On note alors $u_n = o(v_n)$ (et on a alors aussi $u_n = O(v_n)$).
- 3) (u_n) est équivalente à (v_n) s'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ et une suite $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ qui tend vers 1 tels que, pour tout $n \geq N$, $u_n = a_n v_n$. On note alors $u_n \sim v_n$, et la relation $\sim$ ainsi définie est une relation d'équivalence.

Proposition IV.2 (Suites inversibles - Caractérisation fondamentale) : Soient (u_n) et (v_n) à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si (v_n) est à valeurs dans $\mathbb{K}^*$ à partir d'un certain rang, on a les équivalences suivantes :

- 1) $u_n = O(v_n)$ si et seulement si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée.
- 2) $u_n = o(v_n)$ si et seulement si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 0.
- 3) $u_n \sim v_n$ si et seulement si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers 1.

Remarques IV.3 : 1) Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

- a) On n'écrit jamais $u_n = o(0)$, $u_n = O(0)$ ou $u_n \sim 0$ qui signifient que (u_n) stationne à 0 !
- b) (u_n) est bornée si et seulement si $u_n = O(1)$ et (u_n) tend vers 0 $u_n = o(1)$ si et seulement si $u_n = o(1)$.
 (u_n) tend vers $\ell \in \mathbb{K}^*$ si et seulement si $u_n \sim \ell$.
- 2) Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :
 - (i) La suite $(u_n - v_n)$ est négligeable devant la suite (v_n) , i.e., $(u_n - v_n) = o(v_n)$;
 - (ii) La suite $(u_n - v_n)$ est négligeable devant la suite (u_n) , i.e., $(u_n - v_n) = o(u_n)$;
 - (iii) La suite (u_n) est équivalente à la suite (v_n) , i.e., $u_n \sim v_n$.
- 3) Les relations $\sim$, o et O possèdent de nombreuses propriétés de transitivité et de compatibilité avec le produit, qu'on retiendra en se souvenant qu'une suite convergente est bornée, que le produit de deux suites bornées est borné et que le produit d'une suite bornée et d'une suite qui tend vers 0 tend aussi vers 0.

	$v_n \sim w_n$	$v_n = O(w_n)$	$v_n = o(w_n)$	$u'_n \sim v'_n$	$u'_n = O(v'_n)$	$u'_n = o(v'_n)$
$u_n \sim v_n$						
$v_n = O(w_n)$						
$v_n = o(w_n)$						

- 4) Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ et supposons que $u_n \sim v_n$.

- a) Il résulte de ce qui précède que, pour tout $d \in \mathbb{N}$, on a $u_n^d \sim v_n^d$.

Attention toutefois au fait que l'exposant doit être constant ! Par exemple, $\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ donc $1 + \frac{1}{n} \sim 1$

mais, puisque $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e$, on a $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \not\sim 1^n = 1$.

- b) (u_n) est à valeurs dans $\mathbb{K}^*$ à partir d'un certain rang si et seulement si c'est le cas de (v_n) . On a alors $\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}$ pour n assez grand.

c) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, (u_n) et (v_n) sont de même signe à partir d'un certain rang. En particulier, si (u_n) et (v_n) sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ à partir d'un certain rang, on a $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.

5) Attention aux notations! On note $u_n = O(v_n)$ mais ce n'est pas une égalité (plutôt une appartenance!) puisqu'on a $\cos(n) = O(1)$ et $\sin(n) = O(1)$ mais $\cos(n) \neq \sin(n)$ pour tout $n \geq 0$!

Si $(v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites dominées par (v_n) est stable par combinaisons linéaires : si $u_n = O(v_n)$ et si $u'_n = O(v_n)$, alors $2u_n - 7u'_n = O(v_n)$ (d'où la "phrase" surprenante $2O(v_n) - 7O(v_n) = O(v_n)$!) Tout ceci est également vrai pour o .

A *contrario*, l'équivalence n'est généralement pas compatible avec l'addition. Par exemple, on a

$$(n^2 + 1) \sim n^2 \quad \text{et} \quad -n^2 \sim n - n^2 \quad \text{mais} \quad (n^2 + 1) - n^2 \not\sim n^2 + (n - n^2).$$

6) Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $(u_n) \leq (v_n) \leq (w_n)$ et si $u_n \sim w_n$, alors $u_n \sim v_n$.

7) Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ à partir d'un certain rang. Alors $u_n \sim v_n$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$ (on peut choisir $0 < \varepsilon < 1$), on a $(1 - \varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1 + \varepsilon)v_n$ à partir d'un certain rang.

On peut en particulier sommer les équivalents de suites à termes positifs.

Exemples IV.4 : 1) Si $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ est polynomiale de degré d , alors $P(n) = O(n^d)$, $P(n) = o(n^{d+1})$ et $P(n) \sim cd(P)n^d$.

2) Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ telles que $u_n \sim v_n$. Alors $u_n \rightarrow +\infty$ si et seulement si $v_n \rightarrow +\infty$ et, dans ce cas, $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$. Attention ! On n'a généralement pas $e^{u_n} \sim e^{v_n}$!

3) Les résultats de croissances comparées se reformulent en termes de négligeabilité : Pour tous réels $a > 1$ et $\alpha > 0$,

$$(\ln n) = o(n^\alpha), \quad n^\alpha = o(a^n), \quad a^n = o(n!), \quad n! = o(n^n).$$

4) On a $\frac{\ln(n^2 + n)}{n^2 + n} \sim \frac{2 \ln(n)}{n^2}$ (on ne peut pas simplifier davantage) et $\frac{2 \ln(n)}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.

5) On démontrera dans la prochaine leçon qu'il existe $\gamma > 0$ (la constante d'Euler-Mascheroni) telle qu'on a le développement asymptotique

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On démontrera également l'importante formule de Stirling qui donne l'équivalent $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

IV.1.b Cas des fonctions

Définition IV.5 : Soient $f, g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à $\mathcal{D}$.

1) f est dominée par g au voisinage de x_0 s'il existe un voisinage U de x_0 et une fonction $M : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ bornée sur U tels que, pour tout $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) = M(x)g(x)$. On note alors $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} O(g(x))$ ou $f \underset{x_0}{=} O(g)$.

(De manière équivalente, il existe un voisinage U de x_0 et un réel positif M tels que, pour tout $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $|f(x)| \leq M|g(x)|$.)

2) f est négligeable devant g au voisinage de x_0 s'il existe un voisinage U de x_0 et une fonction $\varepsilon : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ avec $\varepsilon(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\rightarrow} 0$ tels que, pour tout $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$. On note alors $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g(x))$ ou $f \underset{x_0}{=} o(g)$.

3) f est équivalente à g au voisinage de x_0 s'il existe un voisinage U de x_0 et une fonction $a : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ avec $a(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\rightarrow} 1$ tels que, pour tout $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) = a(x)g(x)$. On note alors $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$ ou $f \underset{x_0}{\sim} g$, et la relation $\underset{x_0}{\sim}$ ainsi définie est une relation d'équivalence.

Ces définitions sont calquées sur les définitions correspondantes pour les suites. La caractérisation fondamentale dans le cas où la fonction g ne s'annule pas sur un voisinage de x_0 (ou sur un voisinage épointé $U \setminus \{x_0\}$, où U est

un voisinage de $x_0 \in \mathcal{D}$ s'adapte pareillement, de même que les remarques **IV.3**. L'énoncé suivant met d'ailleurs en lien les deux définitions :

Proposition IV.6 (Composition en amont) : Soient $f, g : \mathcal{D}' \rightarrow \mathbb{K}$ des fonctions et $y_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à $\mathcal{D}'$.

1) (avec une suite) Soit $(u_n) \in \mathcal{D}'^{\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathcal{D}'$ qui tend vers y_0 .

a) Si $f = O(g)$ alors $f(u_n) = O(g(u_n))$;

b) Si $f = o(g)$ alors $f(u_n) = o(g(u_n))$;

c) Si $f \sim g$ alors $f(u_n) \sim g(u_n)$.

2) (avec une fonction) Soient $h : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$ une fonction et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à $\mathcal{D}$ tels que $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} y_0$.

a) Si $f = O(g)$ alors $(f \circ h)(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} O((g \circ h)(x))$;

b) Si $f = o(g)$ alors $(f \circ h)(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} o((g \circ h)(x))$;

c) Si $f \sim g$ alors $(f \circ h)(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} (g \circ h)(x)$.

Remarque IV.7 : Il est faux que l'équivalence soit compatible avec la composition en aval : si $f(x) \sim_{x_0} g(x)$, on n'a généralement pas $h \circ f(x) \sim_{x_0} h \circ g(x)$. Par exemple, $x^2 + x \sim_{+\infty} x^2$ mais $e^{x^2+x} \not\sim_{+\infty} e^{x^2}$.

Par conséquent, pour donner par exemple un équivalent de $\ln(1 + \sin(x))$ en 0, un seul des deux calculs ci-dessous est (formellement) correct :

$$\ln(1 + \sin(x)) \underset{0}{\sim} \sin(x) \underset{0}{\sim} x \quad \text{ou} \quad \ln(1 + \sin(x)) \underset{0}{\sim} \ln(1 + x) \underset{0}{\sim} x.$$

Exemples IV.8 : 1) On a $\frac{\ln(x^2 + x)}{x^2 + x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2 \ln(x)}{x^2}$ et $\frac{2 \ln(x)}{x^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$.

2) Les résultats de croissances comparées se reformulent en termes de négligeabilité : pour tout $\alpha > 0$, on a

$$\ln x \underset{+\infty}{=} o(x^\alpha), \quad x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(e^x), \quad |\ln x| \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), \quad e^x \underset{-\infty}{=} o\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right).$$

3) Les résultats sur les limites usuelles déduites de taux de variation se reformulent en termes d'équivalents : on a

$$\sin(x) \underset{0}{\sim} x; \quad \tan(x) \underset{0}{\sim} x; \quad \text{Arctan}(x) \underset{0}{\sim} x; \quad \ln(1 + x) \underset{0}{\sim} x; \quad e^x - 1 \underset{0}{\sim} x; \quad \text{sh}(x) \underset{0}{\sim} x; \quad \text{th}(x) \underset{0}{\sim} x;$$

$$\text{pour tout } \alpha \neq 0, \quad (1 + x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x; \quad \cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}; \quad \text{ch}(x) - 1 \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

4) On a $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ et $\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1 \sim -\frac{1}{2n}$, ce qui équivaut à $\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

5) Puisque $e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, on a $\text{Arctan}(e^{-x}) \underset{+\infty}{\sim} e^{-x}$.

IV.2 Développement limités

IV.2.a Définitions et propriétés élémentaires

Soient $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathcal{D}$ et $x_0 \in \mathcal{D}$. On a défini le polynôme de Taylor $T_{f,x_0,n}$ de f à l'ordre n en x_0 et on démontrera dans la leçon 3 la formule de Taylor-Young affirmant que le reste de Taylor $f - T_{f,x_0,n}$ est négligeable devant $(x - x_0)^n$ au voisinage de x_0 , ce qu'on note sous la forme

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!} + o((x - x_0)^n).$$

Les énoncés du paragraphe précédent (en particulier la composition en amont) sont donc encore valables.

Exemples IV.9 : 1) La formule de Taylor-Young appliquée à la fonction $y \mapsto \sqrt{1+y}$ en $y_0 = 0$ à l'ordre $n = 3$ donne

$$\sqrt{1+y} \underset{y \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + \frac{y^3}{16} + o(y^3).$$

On a donc aussi $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{16n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ et puisque $x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ (resp. $-e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$),

$$\sqrt{1-x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} + o(x^6) \quad (\text{resp.} \quad \sqrt{1-e^x} \underset{x \rightarrow -\infty}{=} 1 - \frac{e^x}{2} - \frac{e^{2x}}{8} - \frac{e^{3x}}{16} + o(e^{3x})).$$

2) La suite (u_n) définie par récurrence en fixant $u_0 > 0$ et en posant, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ est décroissante et tend vers 0. Puisque $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, on a donc $u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2)$. En particulier, $u_n \sim u_{n+1}$ et on peut écrire

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n - u_{n+1}}{u_{n+1}u_n} \sim \frac{1}{u_n^2} \left[\frac{u_n^2}{2} + o(u_n^2) \right] = \frac{1}{2} + o(1) \rightarrow \frac{1}{2}$$

Le théorème de Cesaro assure alors que $\frac{1}{nu_n} \sim \frac{1}{n} \left[\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} \right] \rightarrow \frac{1}{2}$ et on en déduit que $u_n \sim \frac{2}{n}$.

La notion de développement limité généralise la formule de Taylor-Young. Dans la pratique, les fonctions étudiées sont très régulières et les méthodes de calcul qu'on reverra sur des exemples au paragraphe suivant permettent d'obtenir la formule de Taylor-Young sans calculer les dérivées successives de ces fonctions.

Proposition-Définition IV.10 : Soient $\mathcal{D}$ un domaine, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction et x_0 un point adhérent à $\mathcal{D}$.

1) Si $n \geq 0$ est un entier, on dit que f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 (ou $DL_n(x_0)$) s'il existe

une fonction polynomiale $x \mapsto \sum_{k=0}^n \alpha_k (x - x_0)^k$ telle que

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{k=0}^n \alpha_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

Si une telle fonction polynomiale existe, elle est unique : c'est la partie régulière du $DL_n(x_0)$ de f .

2) S'il existe un entier $v \geq 0$ et un scalaire $\alpha_v \neq 0$ tel que $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \alpha_v (x - x_0)^v$, il y a unicité et on dit que f a valuation v en x_0 . Si f admet un $DL_n(x_0)$ avec $n \geq v$, il est alors de la forme

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} \sum_{k=v}^n \alpha_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \underset{x \rightarrow x_0}{=} \alpha_v (x - x_0)^v \left[1 + \sum_{k=v+1}^n \frac{\alpha_k}{\alpha_v} (x - x_0)^{k-v} \right] + o((x - x_0)^n).$$

L'expression factorisée à droite est la forme canonique du DL. Le crochet est équivalent à 1 au voisinage de x_0 et on l'utilisera parfois sous la forme appauvrie $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} \alpha_v (x - x_0)^v (1 + \dots) + o((x - x_0)^n)$.

Remarques IV.11 : 1) Une fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si elle admet un $DL_1(x_0)$, dont la partie régulière donne l'équation de la tangente au graphe de f en x_0 : avec les notations de la définition ci-dessus, on a nécessairement $\alpha_0 = f(x_0)$ et $\alpha_1 = f'(x_0)$.

2) Si $0 \leq m \leq n$ sont deux entiers et si f admet un $DL_n(x_0)$, alors f admet un $DL_m(x_0)$, dont la partie régulière est la troncature de la partie régulière du $DL_n(x_0)$ de f à l'ordre m .

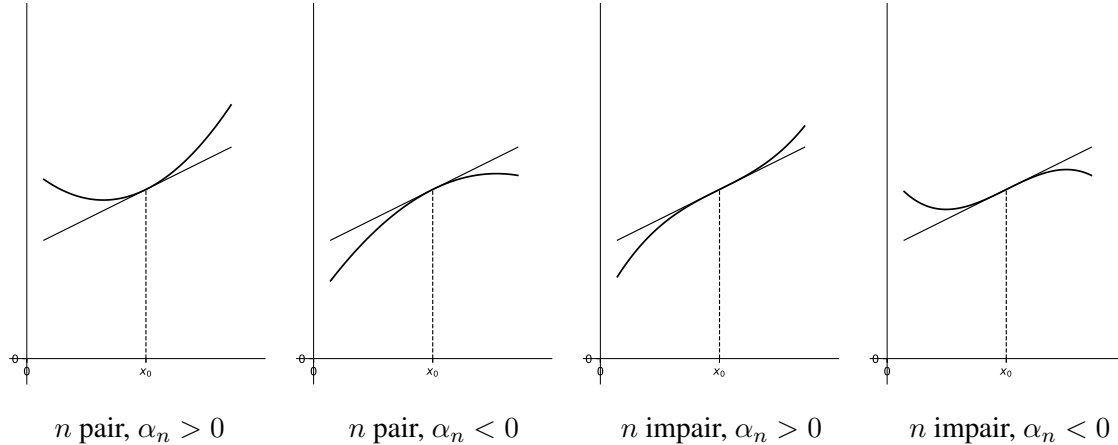
3) Dans la forme canonique d'un DL, le crochet est équivalent à 1 au voisinage de x_0 et on l'utilisera parfois sous la forme appauvrie $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} \alpha_v (x - x_0)^v (1 + \dots) + o((x - x_0)^n)$.

4) Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathcal{D}$ (avec $n \geq 0$), le théorème de Taylor-Young assure qu'elle admet un $\text{DL}_n(x_0)$.

Cette implication n'est pas une équivalence : la fonction $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ admet un $\text{DL}_2(0)$

(de partie régulière nulle) puisque $x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = o(x^2)$ mais elle n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ (ni même $\mathcal{D}^2$) sur $\mathbb{R}$.

5) Si $n \geq 2$ et si $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$ avec $\alpha_n \neq 0$, la parité de n et le signe de α_n indiquent la position relative de Γ_f par rapport à sa tangente en x_0 (lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).



En effet, $\alpha_0 = f(x_0)$ et que $\alpha_1 = f'(x_0)$, et on a $f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] \sim \alpha_n(x - x_0)^n$. Ces deux fonctions ont donc même signe au voisinage de x_0 . En particulier, si n est impair, Γ_f traverse sa tangente en x_0 . C'est un point d'inflexion de Γ_f .

6) Comme avec les polynômes de Taylor, on ne développera jamais les puissances $(x - x_0)^k$. Au contraire, on fera le changement de variable $x = x_0 + h$ qui permet de ramener tous les DL en 0. Les énoncés ci-dessous sont donc tous donnés en 0.

IV.2.b Exemples de calcul

Le calcul de DL est compatible avec la primitivation.

Exemple IV.12 : Montrer que le $\text{DL}_7(0)$ de Arccos est $\text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112} + o(x^7)$.

Remarque IV.13 : En général, on ne peut pas dériver un développement limité. Par exemple, la fonction de IV.11.3 admet un $\text{DL}_2(0)$ mais sa dérivée n'admet pas de $\text{DL}_1(0)$.

Cependant, lorsque f est de classe $\mathcal{C}^n$ (avec $n \geq 1$), on sait qu'un $\text{DL}_n(0)$ de f (resp. un $\text{DL}_{n-1}(0)$ de f') est donné par la formule de Taylor-Young et la compatibilité de la formation du polynôme de Taylor avec la dérivation assure qu'on peut, dans ce cas, dériver le $\text{DL}_n(0)$ de f pour obtenir le $\text{DL}_{n-1}(0)$ de f' .

Le calcul de DL est compatible avec les combinaisons linéaires. En particulier, on en déduit

- Si f est paire, la partie régulière de tout $\text{DL}(0)$ de f n'a que des termes de degrés pairs ;
- Si f est impaire, la partie régulière de tout $\text{DL}(0)$ de f n'a que des termes de degrés impairs.

Le calcul de DL est compatible avec le produit, avec des subtilités sur les ordres en tenant compte des valuations : le produit d'un $\text{DL}_{n_f}(0)$ de f (de valuation v_f) par un $\text{DL}_{n_g}(0)$ de g (de valuation v_g) s'écrit

$$(fg)(x) = (\alpha_{v_f} x^{v_f} (1 + \dots) + o(x^{n_f})) (\beta_{v_g} x^{v_g} (1 + \dots) + o(x^{n_g})) = \alpha_{v_f} \beta_{v_g} x^{v_f+v_g} (1 + \dots) + o(x^{\min\{n_f+v_g, n_g+v_f\}}).$$

Pour obtenir un $\text{DL}_n(0)$ de fg , les calculs sont minimaux lorsque $n_f = n - v_g$ et $n_g = n - v_f$.

Exemples IV.14 : 1) Montrer que le $DL_5(0)$ de $x \mapsto \sin(x) \operatorname{Arctan}(x)$ est $\sin(x) \operatorname{Arctan}(x) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^5)$.

2) Montrer que le $DL_4(0)$ de $x \mapsto \frac{1 - \cos(x)}{\sqrt{1+x}}$ est $\frac{1 - \cos(x)}{\sqrt{1+x}} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4} + \frac{7x^4}{48} + o(x^4)$.

3) Calculer les $DL_5(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)^3$ et de $x \mapsto \ln(1+x)^4$.

Le calcul de DL est compatible avec la composition sans oublier le caractère local de ce calcul. Dans le cas le plus fréquent de $DL(0)$, on ne peut composer un $DL(0)$ de f par un $DL(0)$ de g que lorsque $f(0) = 0$, c'est-à-dire, en réutilisant les notations du produit, lorsque $v_f \geq 1$. A nouveau, pour comprendre les subtilités sur les ordres, on utilise les formes canoniques et, en notant v'_g la valuation de $g - g(0)$, on calcule que

$$g \circ f(x) = g(0) + \beta_{v'_g} \alpha_{v_f}^{v'_g} x^{v_f v'_g} (1 + \dots) + o(x^{\min\{n_f + v_f(v'_g - 1), n_g v_f\}}).$$

Pour obtenir un $DL_n(0)$ de $g \circ f$, les calculs sont minimaux lorsque $n_f = n - v_f(v'_g - 1)$ et $n_g = \left\lceil \frac{n}{v_f} \right\rceil$.

Si on a prouvé que $DL_n(0)$ de $g \circ f$ existait, on calcule sa partie régulière avec le DL de g à l'ordre $\left\lceil \frac{n}{v_f} \right\rceil$.

Exemples IV.15 : 1) Montrer que le $DL_6(0)$ de $x \mapsto \ln(\cos(x))$ est $\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6)$.

2) Montrer que le $DL_9(0)$ de $\cos(\operatorname{ch}(x) - 1)$ est $1 - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + \frac{x^8}{960} + o(x^9)$.

3) Calculer un $DL_2(0)$ de $x \mapsto \ln(1 + \sqrt{1+x})$

L'inversion d'une fonction qui ne s'annule pas en 0 est une composée par $y \mapsto \frac{1}{y}$ (on aura donc $v'_g = 1$) et c'est la valuation de $f - f(0)$ qui détermine l'ordre du DL de $y \mapsto \frac{1}{1+y}$ qu'on va utiliser.

Exemple IV.16 : Montrer que le $DL_4(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{2 + \sin^2(x)}$ est $\frac{1}{2 + \sin^2(x)} = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)$.

Le calcul des DL est compatible avec le quotient $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$ lorsque $v_f \geq v_g$. On calcule alors le DL du prolongement par continuité en 0 avec, encore des subtilités sur les ordres : on a

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha_{v_f}}{\beta_{v_g}} x^{v_f - v_g} (1 + \dots + o(x^{n_f - v_f})) (1 - \dots + o(x^{n_g - v_g})) = \frac{\alpha_{v_f}}{\beta_{v_g}} x^{v_f - v_g} (1 + \dots) + o(x^{\min\{n_f - v_g, n_g + v_f - 2v_g\}}).$$

et, pour obtenir un $DL_n(0)$, les calculs sont minimaux si $n_f = n + v_g$ et $n_g = n - v_f + 2v_g$.

Exemple IV.17 : Montrer que le $DL_3(0)$ de $\frac{x - \sin(x)}{x \sin(x)}$ est $\frac{x - \sin(x)}{x \sin(x)} = \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} + o(x^3)$.

Exemple IV.18 : Trois façons de calculer le $DL_7(0)$ de la fonction $\tan$.

1) On a $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ et on peut calculer le $DL_7(0)$ comme un quotient. Les calculs sont pénibles !

Pour les deux autres méthodes, on va chercher ce DL sous forme indéterminée : on commence par justifier que $\tan$ possède un $DL_7(0)$ de la forme $\tan(x) = x + \alpha x^3 + \beta x^5 + \gamma x^7 + o(x^7)$.

2) Utilisation de la bijection réciproque. On a $\operatorname{Arctan} \circ \tan(x) = x$ pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ et on sait facilement calculer le $DL_7(0)$ de Arctan . On compose et on identifie par unicité de la partie régulière.

3) Utilisation d'une relation différentielle. On justifie qu'on peut dériver le $DL_7(0)$ de $\tan$ et on calcule le $DL_6(0)$ de $\tan' = 1 + \tan^2$ de deux manières pour, à nouveau, identifier par unicité de la partie régulière.