

DM1 (A rendre le 10/09/2026)

Exercice I - Limite inférieure d'une suite bornée

Soit (u_n) une suite à valeurs réelles bornée. Si $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une extractrice telle que la suite extraite correspondante $(u_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ_φ , on dit que ℓ_φ est une *valeur d'adhérence* de la suite (u_n) .

- 1) Justifier que, pour tout $p \geq 0$, l'ensemble $\{u_n, n \geq p\}$ est borné. On note $i_p = \inf\{u_n, n \geq p\}$.
- 2) a) Justifier que la suite (i_p) est croissante et majorée. On note $\ell_{\inf}$ sa limite.
 b) Montrer que, pour toute extractrice $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, pour tout $n \geq 0$, on a $i_n \leq u_{\varphi(n)}$ et en déduire que, pour toute valeur d'adhérence ℓ_φ de (u_n) , on a $\ell_{\inf} \leq \ell_\varphi$.
- 3) Dans cette question, on montre que $\ell_{\inf}$ est elle-même une valeur d'adhérence de la suite (u_n) .
 a) Justifier que, pour tout $p \geq 0$, on dispose d'un entier $n_p \geq p$ tel que $i_p \leq u_{n_p} < i_p + \frac{1}{p+1}$.
 On note $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ l'application définie par $f(p) = n_p$ pour tout $p \geq 0$.
 b) Justifier que, pour tous entiers $M, N \geq 0$, l'ensemble $\{p \in \mathbb{N} \text{ t.q. } p \geq N \text{ et } f(p) \geq M\}$ est non-vide.
 c) On définit une application $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ par récurrence en posant $\psi(0) = 0$ et, pour tout $k \geq 0$,

$$\psi(k+1) = \min\{p \in \mathbb{N} \text{ t.q. } p \geq \psi(k) + 1 \text{ et } f(p) \geq (f \circ \psi)(k) + 1\}.$$

Justifier que $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ainsi que la composée $f \circ \psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sont strictement croissantes.

- d) Montrer que la suite extraite $(u_{f \circ \psi(n)})$ tend vers $\ell_{\inf}$.

Remarque. Ainsi, pour toute suite à valeurs réelles bornée, $\ell_{\inf}$ est une valeur d'adhérence de (u_n) et on a donné une seconde démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass !

On définit de la même façon la limite supérieure $\ell_{\sup} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sup\{u_n, n \geq p\}$ de la suite (u_n) . Toute valeur d'adhérence de la suite (u_n) est donc incluse dans le segment $[\ell_{\inf}, \ell_{\sup}]$. En particulier, $\ell_{\inf} = \ell_{\sup}$ si et seulement si (u_n) possède une unique valeur d'adhérence si et seulement si (u_n) converge d'après l'exercice 9 de la feuille 1.

Exercice II - Inégalité de Carleman

Soient (u_n) une suite de réels strictement positifs. Pour tout $n \geq 1$, on pose $c_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$.

Le but de cet exercice est de montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\sum_{k=1}^n \left(\prod_{j=1}^k u_j \right)^{\frac{1}{k}} \leq e \sum_{k=1}^n u_k$.

- 1) a) Rappeler l'inégalité arithmético-géométrique et expliquer brièvement d'où elle provient.

$$\text{b) Pour tout } k \geq 1, \text{ calculer } \prod_{j=1}^k c_j \text{ et en déduire que } \left(\prod_{j=1}^k u_j \right)^{\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{k(k+1)} \sum_{j=1}^k c_j u_j.$$

- 2) Soit $n \geq 1$ un entier.

$$\text{a) Montrer que, pour tout } 1 \leq j \leq n, \text{ on a } \sum_{k=j}^n \frac{1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{j}.$$

$$\text{b) En déduire que } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \sum_{j=1}^k c_j u_j \leq \sum_{j=1}^n \frac{u_j c_j}{j}.$$

- 3) Montrer que, pour tout $j \geq 1$, on a $\frac{e^j}{j} \leq e$ et conclure quant à l'inégalité de Carleman.
- 4) Dans cette dernière question, on montre que la constante e de l'inégalité de Carleman est optimale.
- a) Montrer que, pour tout $k \geq 1$, on a $\int_1^k \ln(t) dt \leq \sum_{j=1}^k \ln(j) \leq \int_1^{k+1} \ln(t) dt$.
- b) En déduire que $\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \ln(j) \underset{k \rightarrow \infty}{=} \ln(k) - 1 + o(1)$ et conclure que $\left(\prod_{j=1}^k \frac{1}{j} \right)^{\frac{1}{k}} \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e}{k}$.
- c) Conclure enfin que $\sum_{k=1}^n \left(\prod_{j=1}^k u_j \right)^{\frac{1}{k}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} e \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Exercice III - Lemme de Riemann-Lebesgue et problème de Bâle

Le but de cet exercice est de montrer $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Pour tout $t \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right]$, on pose $\varphi(t) = \frac{t \cos(t)}{\sin(t)} = t \cotan(t)$.

1) Montrer que φ est prolongeable en une fonction (encore notée) $\varphi : \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$.

2) On fixe un entier $n \geq 1$ et on pose $T_n = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{1}{k^2}$.

a) Pour tout $k \geq 1$, calculer $\int_0^{\pi} t \cos(kt) dt$ et en déduire que $\int_0^{\pi} t \sum_{k=1}^{2n} \cos(kt) dt = -2T_n$.

b) Soit $t \in]0, \pi]$. En calculant $\sum_{k=-2n}^{2n} e^{ikt}$ de deux manières, montrer que

$$1 + 2 \sum_{k=1}^{2n} \cos(kt) = \sin(2nt) \cotan\left(\frac{t}{2}\right) + \cos(2nt).$$

c) En déduire que $\frac{\pi^2}{4} - 2T_n = \int_0^{\pi} \left[\varphi\left(\frac{t}{2}\right) \sin(2nt) + \frac{t}{2} \cos(2nt) \right] dt$. (Attention à $t = 0$!)

3) **Lemme de Riemann-Lebesgue.** Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) e^{int} dt = 0$ et en déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \cos(nt) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt = 0$.
(On pourra intégrer par parties, utiliser l'inégalité triangulaire puis le théorème fondamental de l'analyse.)

4) a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \frac{\pi^2}{8}$.

b) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} = T_n + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et conclure que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.