

Feuille d'exercices 2 : Séries numériques

Nature d'une série à termes positifs.

Exercice 1 : Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme

$$\text{a) } \sum \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right), \quad \text{b) } \sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)},$$

$$\text{c) } \sum \frac{n}{n^4 + n^2 + 1}, \quad \text{d) } \sum \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} \right)$$

Exercice 2 : Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sum \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right), & \text{b) } \sum \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + n - 1} \right), & \text{c) } \sum \frac{\ln(n)}{\ln(e^n - 1)}, \\ \text{d) } \sum \left(\frac{1}{n} + \ln \left(\frac{n-1}{n} \right) \right), & \text{e) } \sum \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}, & \text{f) } \sum n(n-1)2^{-n}, \\ \text{g) } \sum \frac{1}{n \cos^2(n)}, & \text{h) } \sum e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n, & \text{i) } \sum \binom{3n}{2n}^{-1}, \\ \text{j) } \sum \frac{n!}{n^n}, & \text{k) } \sum \frac{(n!)^3}{(3n)!}, & \text{l) } \sum n e^{-\sqrt{n}}. \end{array}$$

Exercice 3 (Séries de Bertrand) : Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$.

a) Si $\alpha = 1$, calculer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$ et en déduire la nature de $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ selon $\beta \in \mathbb{R}^*$.

b) Si $\alpha \neq 1$, déterminer la nature de $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

Exercice 4 : 1) Déterminer un équivalent de $u_n = \sum_{k=2}^n \ln^2(k)$ et en déduire la nature de la série $\sum \frac{1}{u_n}$.

2) Déterminer un équivalent de $v_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$ et en déduire, selon $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de la série $\sum \frac{v_n}{n^\alpha}$.

Exercice 5 : Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \operatorname{Arctan}(k)$. Calculer un équivalent de S_n puis montrer qu'il existe un réel α tel que $S_n = \frac{n\pi}{2} - \ln(n) + \alpha + o(1)$.

Exercice 6 : Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}^*$ une application bijective. Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{\sigma(k)}{k^2 \ln(k)}$.

1) Justifier que, pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=2^{n+1}}^{2^{n+1}+1} \sigma(k) \geq \frac{2^n(2^n+1)}{2}$.

2) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n} = O(S_{2^{n+1}} - S_{2^n})$ et conclure que la série $\sum \frac{\sigma(k)}{k^2 \ln(k)}$ diverge.

Autres exercices sur les séries à termes positifs.

Exercice 7 : Soient $\sum u_n$ une série à termes positifs, convergente, et (R_n) la suite de ses restes.

- a) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $\sum_{k=0}^n R_k - \sum_{k=1}^n k u_k = (n+1)R_n$.
- b) Montrer que, si la série $\sum n u_n$ converge, alors $(n+1)R_n \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k u_k$ pour tout $n \geq 1$.
- c) En déduire que les séries $\sum R_n$ et $\sum n u_n$ ont même nature et, en cas de convergence, que $\sum_{k=0}^{\infty} R_k = \sum_{k=1}^{\infty} k u_k$.

Exercice 8 : Soient $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs, divergente. On note (S_n) la suite de ses sommes partielles.

- a) Soit $\alpha > 1$. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\sum_{k=1}^n \frac{u_k}{S_k^\alpha} \leq \int_{S_0}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha}$ et en déduire que $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge.
- b) Montrer que, pour tous $p \geq n \geq 1$, $\sum_{k=n+1}^p \frac{u_k}{S_k} \geq \frac{S_p - S_n}{S_p}$ et en déduire que $\sum \frac{u_k}{S_k}$ diverge.
- c) Que dire de $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ pour $0 < \alpha < 1$?

Exercice 9 : Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante telle que la série $\sum u_n$ converge. On fixe $\varepsilon > 0$.

- a) Montrer qu'il existe $p \geq 1$ tel que, pour tout $q \geq 1$, $\frac{\varepsilon}{2} \geq \sum_{k=p+1}^{p+q} u_k \geq q u_{p+q}$.
- b) En déduire qu'il existe $N \geq 1$ tel que, pour tout $n \geq N$, $n u_n \leq \varepsilon$ et conclure que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 10 (Critère de condensation de Riemann) : Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante.

- a) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $2^n u_{2^{n+1}} \leq \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} u_k \leq 2^n u_{2^n}$.
- b) En déduire que les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ ont même nature.
- c) **Application.** Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$. Retrouver la nature de la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

Autres séries convergentes.

Exercice 11 : Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \sum \ln(n) \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right), \quad \text{b)} & \sum \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right), \\ \text{c)} & \sum \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n - \sqrt{n} + 1}, \quad \text{d)} & \sum \frac{(-1)^n (2n+1)}{n(n+1)}. \end{array}$$

Exercice 12 : Montrer que, pour tout $n \geq 0$, $\cos(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}) = (-1)^{n+1} \frac{3\pi}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et en déduire que $\sum \cos(\pi\sqrt{n^2 + n + 1})$ est une série convergente.

Exercice 13 : Montrer que, pour tout $n \geq 0$, $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ est un entier, et en déduire que la série $\sum \sin((2 + \sqrt{3})^n \pi)$ converge.

Exercice 14 : Déterminer la nature de la série $\sum (-1)^n \left[\operatorname{Arccos} \left(\frac{1}{n} \right) - \operatorname{Arccos} \left(\frac{1}{n^2} \right) \right]$.

Exercice 15 : Montrer que la série $\sum \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{n-k} k^2} \right)$ converge et calculer sa somme.

Exercice 16 : a) Justifier que, pour tous $a, b > 0$, on a $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ et en déduire que, pour tout $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geq \frac{2(n+1)}{n+2}.$$

b) En posant $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ et $w_n = \sum_{k=0}^n u_k u_{n-k}$ pour tout $n \geq 0$, montrer que $\sum u_n$ converge et que $\sum w_n$ diverge. Quelle morale tirer de cet exemple ?

Exercice 17 : On considère la série $\sum \frac{\sin k}{k}$ et, pour tout $n \geq 0$, on pose $S_n := \sum_{k=1}^n \sin k$ (donc $S_0 = 0$)

a) Pour tout $n \geq 0$, calculer S_n et montrer que la suite (S_n) est bornée.

b) Pour tout $n \geq 0$, montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{k} = \frac{S_n}{n} + \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{k(k+1)}$ et conclure que $\sum \frac{\sin k}{k}$ est une série convergente.

Exercice 18 (Règle de Raabe-Duhamel) : Soient $\lambda > 0$ un réel et (u_n) une suite à termes strictement positifs tels que, pour tout $n \geq 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + v_n$, où v_n est le terme général d'une série absolument convergente.

a) Montrer qu'il existe $S \in \mathbb{R}$ tel que $\ln(u_n) = -\lambda \ln n + S + o(1)$ et conclure que $u_n \sim \frac{e^S}{n^\lambda}$.

b) **Applications.** Déterminer la nature des séries $\sum \frac{n^n}{n! e^n}$ et $\sum \frac{a(a+1)\dots(a+n)}{b(b+1)\dots(b+n)}$ pour $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

Exercice 19 : Pour tout $t > 0$, on pose $f(t) = \frac{\ln(t)}{t}$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = f(n)$.

Pour tout $n \geq 1$, on pose également $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ et $A_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k u_k$.

1) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, pour tout $t \in [n, n+1]$, $|f(t) - u_n| \leq \frac{1 + \ln(n+1)}{n^2}$ et en déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $S_n = \frac{\ln^2(n)}{2} + \alpha + o(1)$.

2) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $A_{2n} + S_{2n} = S_n + \ln(2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Justifier que (A_n) converge et calculer sa limite.

Exercice 20 : Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante qui tend vers 0. Pour tout $n \geq 0$, on pose $u_n = (-1)^n a_n$ et on note (S_n) (resp. (R_n)) la suite des sommes partielles (resp. des restes) de la série alternée $\sum u_n$.

1) On suppose que $\sum a_n^2$ converge. Montrer que $\sum a_n R_n$ converge et en déduire que $\sum u_n S_n$ converge.

2) On suppose réciproquement que $\sum u_n S_n$ converge. Calculer $a_n^2 + (u_n - u_{n-1})S_n$ pour tout $n \geq 1$ et en déduire que $\sum a_n^2$ converge.