

Programme de colles - Semaine 1 (du 14/09 au 18/09)

Dans ce plan détaillé de cours, les points marqués du signe  pourront faire l'objet d'une question de cours.

Leçon 1 : Rappels et compléments d'analyse

I - Suites numériques

- 1) Convergence et limite - Définition. Unicité de la limite, compatibilité avec les opérations. Thm d'encadrement.
 Exo classique : Thm de Cesaro.
- 2) Cas des suites à valeurs réelles - Version réelle du théorème d'encadrement
 - a) Limites et ordre - Cas où $(u_n), (v_n)$ convergent avec $\lim(u_n) < \lim(v_n)$. Conservation des $\leq$ par lim.
 Exo classique : Cas où (u_n) est à valeurs strictement positives et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell < 1$.
 - b) Convergence monotone - Rappels sur la borne supérieure d'une partie majorée non-vide de $\mathbb{R}$.
 Thm de la convergence monotone. Thm des suites adjacentes
 - c) Limites infinies - Droite réelle achevée et voisinages - Définition des limites infinies. Définition des voisinages (de $\ell \in \mathbb{R}$) et unification des définitions. Extension des énoncés sur les limites finies (gare aux F.I. !)
 Définition des limites ℓ^- , ℓ^+ , des voisinages à gauche ou à droite de ℓ .
- 3) Suites extraites - Extractrice $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ (la croissance stricte assure que $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \geq 0$), suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ de (u_n) , cas d'extractions successives.
 Cas d'une suite convergente,  cas où (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite.

Remarque pour les colleurs. Le théorème de Bolzano-Weierstrass est (*officiellement*) hors-programme en PSI. Certains résultats classiques d'analyse (estampillés **BWHP**) devront donc (*officiellement*) être admis.

II - Limites et continuité d'une fonction de la variable réelle

- 1) Points adhérents à un intervalle - Définition d'un intervalle, classification des 9 types.
 Notion de réel x_0 adhérent à droite (resp. à gauche) d'un intervalle I , de réel adhérent à I (adhérence $\bar{I}$ de I), cas où $\pm\infty$ est adhérent à I . 5 caractérisations séquentielles. Notion de réel intérieur à I (intérieur $\overset{\circ}{I}$ de I).
 Un domaine $\mathcal{D}$ est une réunion d'intervalles d'intérieurs non-vides.
- 2) Litanie des définitions et caractérisations séquentielles de la limite - Limite monotone - Déf. de " $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ possède une limite (finie) en $x_0 \in \mathbb{R}$ adhérent à $\mathcal{D}$ ". Unicité de la limite.  Caractérisation séquentielle.
 On en déduit : compatibilité avec les CL, avec $\times, \circ$ (donc avec l'inversion), avec $\leq$, théorème d'encadrement.
 Extensions pour $x_0 (-\infty, x_0^-, x_0^+, +\infty)$ et mêmes extensions pour ℓ : En tout, 25 phrases à quantificateurs (unification avec les voisinages) et autant de caractérisations séquentielles. Thm de la limite monotone.
- 3) Continuité d'une fonction en un point - Définition de " $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ est continue en $x_0 \in \mathcal{D}$ ". Caractérisation séquentielle. Thm généraux sur la continuité en un point (CL, $\times, \circ$ (donc inverse, donc quotient)).
 Notion de prolongement par continuité en $x_0 \in \overline{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{D}$.
- 4) Aspects globaux de la continuité d'une fonctions à valeurs réelles sur un intervalle - Propriété de Cauchy.
 Thm des valeurs intermédiaires ("l'image continue d'un intervalle est un intervalle").
 Exo classique : Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est k -lipschitzienne avec $k < 1$, point fixe et convergence de $u_{n+1} = f(u_n)$.
 Prop : Pour f monotone sur I , f est $\mathcal{C}^0$ ssi $f(I)$ est un intervalle. Thm de la bijection monotone.
 Thm (BWHP) des bornes atteintes ("l'image continue d'un segment est un segment").
 Exo classique : Si $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et admet une limite finie en $+\infty$, f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

III - Dérivation d'une fonction de la variable réelle

- 1) Dérivabilité et dérivée en un point - Def d'une corde du graphe de $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$, de la dérivabilité de f en x_0 (le taux de variation admet une limite ssi il existe un DL_1), dérivée $f'(x_0)$ et tangente au graphe de f en x_0 .
Thm généraux sur la dérivabilité (CL, $\times$, $\circ$ (donc inverse, donc quotient), réciproque (si f^{-1} est $\mathcal{C}^0$ en $f(x_0)$)).
- 2) Aspects globaux de la dérivabilité d'une fonction à valeurs réelles sur un intervalle
 - a) Accroissements finis - Thm de Rolle, EAF, IAF, Thm de la limite de la dérivée.
 Exo classique : Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, P' l'est aussi.
 - b) Variations et convexité - Variations et signe de f' .  Cas de $x \mapsto \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}^*$.
Quatre caractérisations équivalentes de la convexité, interprétations géométriques (cordes et tangentes).
Inégalité de Jensen (cas d'un isobarycentre) et inégalité arithmético-géométrique.
- 3) Dérivabilité d'ordre supérieur - Polynômes de Taylor - Définitions et thm généraux. Thm de prolongement $\mathcal{C}^n$.
Polynôme de Taylor à l'ordre n en $x_0 \in \mathcal{D}$ de $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{D}^n$. Cas à connaître : $\exp$, $\cos$ / $\sin$, ch / sh , $x \mapsto (1+x)^\alpha$ (ne pas hésiter pour $\alpha = -1$!), $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \text{Arctan}(x)$.

IV - Analyse locale et asymptotique

- 1) Relations de comparaison
 - a) Cas des suites - Définition de $u_n = O(v_n)$, de $u_n = o(v_n)$, de $u_n \sim v_n$ (c'est une relation d'équivalence).
Rqs : lien $\sim$ / o , transitivités et produits, puissances, cas de suites dans $\mathbb{R}$ (encadrement), dans $\mathbb{R}_+^*$.
Exs : Croissances comparées, DA de la série harmonique et formule de Stirling (admis cette semaine)
 - b) Cas des fonctions - Définition de $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} O(g(x)) \dots$ pour $f, g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à $\mathcal{D}$.
Composition en amont (avec une suite ou une fonction). Rq : Bon calcul de $\ln(1 + \sin(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.
Croissances comparées, limites usuelles en 0 (dédites de taux de variation + $\cos$ / ch)
- 2) Développements limités
 - a) Définitions et propriétés élémentaires - Rappel : Taylor-Young pour une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ (admis).
Obtention de DA par composition.  Exo classique : Etude et calcul d'un équivalent de $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$.
Définition du développement limité de $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{K}$ à l'ordre n en $x_0 \in \mathcal{D}$. Unicité de la partie régulière.
Définition de la valuation de f en x_0 et forme canonique du $DL_n(x_0)$ de f .
Rq : Troncature, interprétation graphique, changement de variable $x = x_0 + h$.
 - b) Exemples de calcul -  Chaque exemple ci-dessous peut faire l'objet d'une question de cours.
Primitivation de DL (Ex : $DL_7(0)$ de $x \mapsto \text{Arccos}(x)$).
Compatibilité avec le produit (Ex : $DL_5(0)$ de $x \mapsto \sin(x) \text{Arctan}(x)$).
Compatibilité avec la composition (Ex : $DL_5(0)$ de $x \mapsto \ln(\cos(x))$).
Compatibilité avec le calcul d'inverse (Ex : $DL_4(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{2 + \sin^2(x)}$).
Compatibilité (parfois) avec le quotient (Ex : $DL_3(0)$ de $x \mapsto \frac{x - \sin(x)}{x \sin(x)}$).
Ex : Calcul du $DL_7(0)$ de $\tan$ à l'aide de la relation $\text{Arctan} \circ \tan(x) = x$.
Ex : Calcul du $DL_7(0)$ de $\tan$ à l'aide de la relation $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$.