

Corrigé du DM1

Exercice I - Limite inférieure d'une suite bornée

Soit (u_n) une suite à valeurs réelles bornée. Si $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une extractrice telle que la suite extraite correspondante $(u_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ_φ , on dit que ℓ_φ est une *valeur d'adhérence* de la suite (u_n) .

- 1) Puisque la suite (u_n) est bornée, il existe un réel $A \geq 0$ tel que, pour tout $n \geq 0$, $-A \leq u_n \leq A$. Pour tout $p \geq 0$, l'ensemble $\{u_n, n \geq p\}$ est donc inclus dans $[-A, A]$! Ainsi, cet ensemble est borné et on note $i_p = \inf\{u_n, n \geq p\}$.
- 2) a) Pour tout $p \geq 0$, on a $\{u_n, n \geq p+1\} \subset \{u_n, n \geq p\}$. Par définition, i_p minore l'ensemble $\{u_n, n \geq p\}$. Il minore donc également le sous-ensemble $\{u_n, n \geq p+1\}$ et, puisque la borne inférieure d'un ensemble est son plus grand minorant, on a $i_p \leq i_{p+1}$. Ainsi la suite (i_p) est bien croissante.
Avec les notations de la question précédente, pour tous entiers $p \leq n$, on a $i_p \leq u_n \leq A$ donc la suite (i_p) est majorée par A .
D'après le théorème de la convergence monotone, elle converge et on note $\ell_{\inf}$ sa limite.
- b) Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une extractrice. On montre par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, $n \leq \varphi(n)$. On a donc $u_{\varphi(n)} \in \{u_k, k \geq n\}$ et, par définition de la borne inférieure, on en déduit que $i_n \leq u_{\varphi(n)}$.
Si cette suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ_φ , on a $\ell_{\inf} \leq \ell_\varphi$ par conservation des inégalités larges par passage à la limite. Ainsi, toute valeur d'adhérence de (u_n) est bien supérieure ou égale à $\ell_{\inf}$.
- 3) Dans cette question, on montre que $\ell_{\inf}$ est elle-même une valeur d'adhérence de la suite (u_n) .
 - a) Soit $p \geq 0$. Par définition de la borne inférieure, i_p minore l'ensemble $\{u_n, n \geq p\}$ mais ce n'est pas le cas de $i_p + \frac{1}{p+1}$. On peut donc bien choisir un entier $n_p \geq p$ tel que $i_p \leq u_{n_p} < i_p + \frac{1}{p+1}$.
On note $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ l'application définie par $f(p) = n_p$ pour tout $p \geq 0$.
 - b) Soient $M, N \geq 0$ deux entiers. Pour tout $p \geq \max\{M, N\}$ (un tel p existe bien !), on a $p \geq N$ et, par définition de f et de n_p , $f(p) = n_p \geq p \geq M$. Par conséquent, l'ensemble $\{p \in \mathbb{N} \text{ t.q. } p \geq N \text{ et } f(p) \geq M\}$ est non-vide.
 - c) On définit une application $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ par récurrence en posant $\psi(0) = 0$ et, pour tout $k \geq 0$,

$$\psi(k+1) = \min\{p \in \mathbb{N} \text{ t.q. } p \geq \psi(k) + 1 \text{ et } f(p) \geq (f \circ \psi)(k) + 1\}.$$

D'après la question précédente, cette construction est possible puisque tout sous-ensemble non-vide de $\mathbb{N}$ possède un minimum ! Par construction, pour tout $k \geq 0$, on a

$$\psi(k+1) \geq \psi(k) + 1 \quad (\text{i.e., } \psi(k+1) > \psi(k))$$

et

$$f(\psi(k+1)) \geq (f \circ \psi)(k) + 1 \quad (\text{i.e., } (f \circ \psi)(k+1) > (f \circ \psi)(k)).$$

Ainsi, les applications $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et $f \circ \psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sont bien strictement croissantes.

- d) Pour tout $k \geq 0$, on a, par définition, $u_{f \circ \psi(k)} = u_{n_{\psi(k)}}$ et donc $i_{\psi(k)} \leq u_{n_{\psi(k)}} < i_{\psi(k)} + \frac{1}{\psi(k)+1}$.
Puisque $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante, la suite $(i_{\psi(k)})$, extraite de (i_p) , converge vers $\ell_{\inf}$.
De même, la suite $\left(\frac{1}{\psi(k)+1}\right)$, extraite de $\left(\frac{1}{p+1}\right)$, tend vers 0.
Par encadrement, la suite $(u_{f \circ \psi(k)})$ tend donc bien vers $\ell_{\inf}$.

Remarque. Ainsi, pour toute suite à valeurs réelles bornée, $\ell_{\inf}$ est une valeur d'adhérence de (u_n) et on a donné une seconde démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass !

On définit de la même façon la limite supérieure $\ell_{\sup} = \lim_{p \rightarrow \infty} \sup\{u_n, n \geq p\}$ de la suite (u_n) . Toute valeur d'adhérence de la suite (u_n) est donc incluse dans le segment $[\ell_{\inf}, \ell_{\sup}]$. En particulier, $\ell_{\inf} = \ell_{\sup}$ si et seulement si (u_n) possède une unique valeur d'adhérence si et seulement si (u_n) converge d'après l'exercice 9 de la feuille 1.

Exercice II - Inégalité de Carleman

Soient (u_n) une suite de réels strictement positifs. Pour tout $n \geq 1$, on pose $c_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}$.

Le but de cet exercice est de montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\sum_{k=1}^n \left(\prod_{j=1}^k u_j \right)^{\frac{1}{k}} \leq e \sum_{k=1}^n u_k$.

1) a) L'inégalité arithmético-géométrique assure que, pour tout entier $k \geq 1$ et pour tout k -uplet $y_1, \dots, y_k$ de réels strictement positifs, on a

$$\left(\prod_{j=1}^k y_j \right)^{\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k y_j :$$

la moyenne géométrique de $y_1, \dots, y_k$ est inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique. En passant au logarithme, il revient au même de montrer que

$$\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \ln(y_j) \leq \ln \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k y_j \right)$$

qui est l'inégalité de Jensen pour la fonction $\ln$, concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Pour tout $k \geq 1$, on a, par télescopage multiplicatif,

$$\prod_{j=1}^k c_j = \prod_{j=1}^k \frac{(j+1)^j}{j^{j-1}} = \frac{(k+1)^k}{1^0} = (k+1)^k.$$

L'inégalité arithmético-géométrique appliquée au k -uplet $c_1 u_1, \dots, c_k u_k$ donne donc

$$(k+1) \left(\prod_{j=1}^k u_j \right)^{\frac{1}{k}} = \left(\prod_{j=1}^k c_j \right)^{\frac{1}{k}} \left(\prod_{j=1}^k u_j \right)^{\frac{1}{k}} = \left(\prod_{j=1}^k c_j u_j \right)^{\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k c_j u_j$$

et on peut bien conclure que $\left(\prod_{j=1}^k u_j \right)^{\frac{1}{k}} \leq \frac{1}{k(k+1)} \sum_{j=1}^k c_j u_j$.

2) Soit $n \geq 1$ un entier.

a) Soit $1 \leq j \leq n$ un entier. En décomposant en éléments simples, on calcule, par télescopage additif,

$$\sum_{k=j}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=j}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{j} - \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{j}.$$

b) On identifie une somme triangulaire et en intervertissant les symboles $\sum$, on obtient

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \sum_{j=1}^k c_j u_j = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} \frac{c_j u_j}{k(k+1)} = \sum_{j=1}^n c_j u_j \sum_{k=j}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

Puisque $c_j u_j > 0$ pour tout $j \geq 1$, on peut utiliser la majoration de la question précédente pour obtenir

$c_j u_j \sum_{k=j}^n \frac{1}{k(k+1)} \leq \frac{c_j u_j}{j}$ pour tout $j \geq 1$. En sommant, on conclut que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \sum_{j=1}^k c_j u_j \leq \sum_{j=1}^n \frac{u_j c_j}{j}.$$

3) Soit $j \geq 1$ un entier. On a $\frac{c_j}{j} = \left(1 + \frac{1}{j}\right)^j = e^{j \ln\left(1 + \frac{1}{j}\right)}$. Puisque la fonction $\ln$ est concave, on a, pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$ et, par croissance de l'exponentielle, on en déduit que $\frac{c_j}{j} \leq e$.

Puisque (u_n) est à valeurs positives, on a donc $\frac{u_j c_j}{j} \leq e u_j$ pour tout $j \geq 1$ et, en sommant, on obtient l'inégalité de Carleman avec l'inégalité de la question précédente :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \sum_{j=1}^k c_j u_j \leq e \sum_{j=1}^n u_j.$$

4) Dans cette dernière question, on montre que la constante e de l'inégalité de Carleman est optimale.

a) Soit $j \geq 1$. Puisque $\ln$ est croissante sur $[j, j+1]$, on a $\ln(j) \leq \ln(t) \leq \ln(j+1)$ pour tout $t \in [j, j+1]$. Par croissance de l'intégrale sur un segment, on a

$$\ln(j) \leq \int_j^{j+1} \ln(t) dt \leq \ln(j+1).$$

Pour tout $j \geq 2$, on a donc $\int_{j-1}^j \ln(t) dt \leq \ln(j) \leq \int_j^{j+1} \ln(t) dt$. En sommant de $j = 2$ à un entier $k \geq 2$ quelconque, il vient avec Chasles que

$$\int_1^k \ln(t) dt \leq \sum_{j=2}^k \ln(j) \leq \int_2^{p+1} \ln(t) dt, \quad \text{et donc que} \quad \int_1^k \ln(t) dt \leq \sum_{j=1}^k \ln(j) \leq \int_1^{p+1} \ln(t) dt$$

en sommant l'encadrement $0 \leq \ln(1) \leq \int_1^2 \ln(t) dt$ (valable à gauche car $\ln(1) = 0$!)

b) Par intégration par parties, on sait calculer $\int_1^x \ln(t) dt = [t \ln(t) - t]_1^x = x \ln(x) - x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. En divisant par $k \geq 1$, l'encadrement précédent donne donc

$$\ln(k) - 1 + \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \ln(j) \leq \frac{k+1}{k} \ln(k+1) - 1.$$

Ainsi, $-\frac{1}{k} \leq \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \ln(j) - (\ln(k) - 1) \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) + \frac{\ln(k+1)}{k}$, ce qui prouve, par croissances

comparées et par encadrement, que $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \ln(j) - (\ln(k) - 1) = 0$, i.e., que

$$\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \ln(j) \underset{k \rightarrow \infty}{=} \ln(k) - 1 + o(1).$$

On calcule alors que $\left(\prod_{j=1}^k \frac{1}{j}\right)^{\frac{1}{k}} = \exp\left(-\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \ln(j)\right) \underset{k \rightarrow \infty}{=} e^{1-\ln(k)+o(1)} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{e^{1+o(1)}}{k} \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e}{k}.$

c) Puisque la série à termes positifs $\sum \frac{1}{k}$ diverge, la question précédente assure que la série $\sum \left(\prod_{j=1}^k u_j\right)^{\frac{1}{k}}$ diverge également et les suites de sommes partielles de ces deux séries sont équivalentes : on a donc bien

$$\sum_{k=1}^n \left(\prod_{j=1}^k u_j\right)^{\frac{1}{k}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} e \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

La constante e est donc bien optimale puisque, pour tout $a < e$, on a $\sum_{k=1}^n \left(\prod_{j=1}^k u_j\right)^{\frac{1}{k}} > a \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ à partir d'un certain rang !

Exercice III - Lemme de Riemann-Lebesgue et problème de Bâle

Le but de cet exercice est de montrer $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on pose $\varphi(t) = \frac{t \cos(t)}{\sin(t)} = t \cotan(t)$.

1) La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ d'après les théorèmes généraux : elle est produit et quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.

Puisque $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin(t)}{t} = 1$, on a $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = 1$. Pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on calcule

$$\varphi'(t) = \frac{\cos(t) \sin(t) - t}{\sin^2(t)} \underset{t \rightarrow 0^+}{=} \frac{(1 + o(t))(t + o(t^2)) - t}{\sin^2(t)} \underset{t \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{t^2}{\sin^2(t)}\right) \underset{t \rightarrow 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, d'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, φ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et, en notant encore φ ce prolongement, on a $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 0$.

2) On fixe un entier $n \geq 1$ et on pose $T_n = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{1}{k^2}$.

a) Soit $k \geq 1$. En intégrant par parties, on calcule

$$\int_0^\pi t \cos(kt) dt = \left[\frac{t \sin(kt)}{k} \right]_0^\pi - \frac{1}{k} \int_0^\pi \frac{\sin(kt)}{k} dt = \left[\frac{\cos(kt)}{k^2} \right]_0^\pi = \frac{(-1)^k - 1}{k^2} = \begin{cases} -\frac{2}{k^2} & \text{si } k \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est pair} \end{cases}.$$

Par linéarité de l'intégrale, on a donc $\int_0^\pi t \sum_{k=1}^{2n} \cos(kt) dt = \sum_{k=1}^{2n} \int_0^\pi t \cos(kt) dt = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} -\frac{2}{k^2} = -2T_n$.

b) Soit $t \in]0, \pi]$.

D'une part, par découpage de la somme, avec un changement d'indice et les formules d'Euler, on a

$$\sum_{k=-2n}^{2n} e^{ikt} = \sum_{k=-2n}^{-1} e^{ikt} + 1 + \sum_{k=1}^{2n} e^{ikt} = 1 + \sum_{k=1}^{2n} (e^{-ikt} + e^{ikt}) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{2n} \cos(kt).$$

D'autre part, puisque $e^{it} \neq 1$, on peut écrire que

$$\sum_{k=-2n}^{2n} e^{ikt} = \frac{e^{-2int} - e^{i(2n+1)t}}{1 - e^{it}} = \frac{e^{-i(2n+\frac{1}{2})t} - e^{i(2n+\frac{1}{2})t}}{e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}}} = \frac{\sin\left(\left(2n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Avec la formule d'addition pour sin, on conclut donc que

$$1 + 2 \sum_{k=1}^{2n} \cos(kt) = \sum_{k=-2n}^{2n} e^{ikt} = \sin(2nt) \cotan\left(\frac{t}{2}\right) + \cos(2nt).$$

c) En multipliant par $\frac{t}{2}$, on a donc, pour tout $t \in]0, \pi]$,

$$\frac{t}{2} + t \sum_{k=1}^{2n} \cos(kt) = \sin(2nt) \frac{t}{2} \cotan\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{t}{2} \cos(2nt) = \varphi\left(\frac{t}{2}\right) \sin(2nt) + \frac{t}{2} \cos(2nt).$$

En $t = 0$, cette égalité est encore vraie car on a prolongé φ en 0 par continuité en posant $\varphi(0) = 1$. On peut donc intégrer sur $[0, \pi]$ et, puisque $\int_0^\pi \frac{t dt}{2} = \frac{\pi^2}{4}$, on trouve bien, par linéarité de l'intégrale et avec **2.a**,

$$\frac{\pi^2}{4} - 2T_n = \int_0^\pi \left[\varphi\left(\frac{t}{2}\right) \sin(2nt) + \frac{t}{2} \cos(2nt) \right] dt.$$

3) Lemme de Riemann-Lebesgue. Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et $n \geq 1$ un entier. En intégrant par parties, on obtient

$$\int_a^b f(t) e^{int} dt = \left[\frac{f(t) e^{int}}{in} \right]_a^b - \int_a^b \frac{f'(t) e^{int}}{in} dt = \frac{f(b) e^{inb} - f(a) e^{ina}}{in} + \frac{i}{n} \int_a^b f'(t) e^{int} dt.$$

On a bien sûr $\left| \frac{f(b) e^{inb} - f(a) e^{ina}}{in} \right| \leq \frac{|f(b)| + |f(a)|}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, f' est continue sur le segment $[a, b]$. Par conséquent, f' est bornée et atteint ses bornes sur ce segment. On peut donc poser $\|f'\|_\infty^{[a,b]} = \max_{t \in [a,b]} |f'(t)|$ et, par inégalité triangulaire, on a

$$\left| \frac{i}{n} \int_a^b f'(t) e^{int} dt \right| \leq \frac{(b-a) \|f'\|_\infty^{[a,b]}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par inégalité triangulaire encore, on conclut que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) e^{int} dt = 0$. Puisque f est à valeurs réelles, on a donc

$$\int_a^b f(t) \cos(nt) dt = \int_a^b f(t) \operatorname{Re}(e^{int}) dt = \operatorname{Re} \left(\int_a^b f(t) e^{int} dt \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

et

$$\int_a^b f(t) \sin(nt) dt = \int_a^b f(t) \operatorname{Im}(e^{int}) dt = \operatorname{Im} \left(\int_a^b f(t) e^{int} dt \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- 4) a) D'après la question 1, les fonctions $t \mapsto \frac{t}{2}$ et $t \mapsto \varphi\left(\frac{t}{2}\right)$ sont de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Le lemme de Riemann-Lebesgue assure donc que

$$\int_0^\pi \left[\varphi\left(\frac{t}{2}\right) \sin(2nt) + \frac{t}{2} \cos(2nt) \right] dt = \int_0^\pi \varphi\left(\frac{t}{2}\right) \sin(2nt) dt + \int_0^\pi \frac{t}{2} \cos(2nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

D'après 2.c, on en déduit donc que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \frac{\pi^2}{8}$.

- b) Soit $n \geq 1$. En séparant les termes d'indices pairs et impairs, et en faisant le changement d'indice $k = 2j$ dans la somme des termes d'indices pairs, on trouve

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{1}{k^2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{1}{k^2} = T_n + \sum_{j=1}^n \frac{1}{(2j)^2} = T_n + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

Puisque la série $\sum \frac{1}{k^2}$ est convergente (d'après Riemann), en notant S sa somme et en passant à la limite, la question précédente assure que

$$S = \frac{\pi^2}{8} + \frac{S}{4}, \quad i.e., \quad S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$