

Leçon 2 : Séries numériques

Table des matières

I	Convergence d'une série numérique	1
I.1	Suite des sommes partielles d'une série	1
I.2	Nature d'une série - Suite des restes d'une série convergente	2
II	Séries à termes positifs	3
II.1	Séries à termes positifs majorées	3
II.2	Comparaison avec une intégrale - Cas des séries de Riemann	4
II.3	Sommation des relations de comparaison	5
II.4	Deux applications à connaître	5
III	Autres séries convergentes	7
III.1	Critère spécial des séries alternées	7
III.2	Séries absolument convergentes	7
III.3	Application - Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes	8

I Convergence d'une série numérique

I.1 Suite des sommes partielles d'une série

Définition I.1 : Soit $(u_k) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On appelle série de terme général u_k , et on note $\sum u_k$, la suite de terme général $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Ses termes $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ sont les sommes partielles de la série $\sum u_n$.

Remarque I.2 : Il est fréquent qu'une suite ne soit définie qu'à partir d'un rang $k_0 \geq 1$ (généralement 1 ou 2).

Dans ce cas, la série associée $\sum u_k$ est la suite de terme général $\sum_{k=k_0}^n u_k$, définie à partir du rang $n = k_0$.

Tous les résultats généraux sont donnés dans le cas d'une suite définie à partir du rang $k = 0$ mais on les étend aisément à tous les cas.

Exemples I.3 : 1) La série de terme général $u_k = k$ admet les sommes partielles $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

2) Pour tout $\alpha > 0$, la série de Riemann de paramètre α est la série $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ qui admet les sommes partielles

$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ pour $n \geq 1$. En particulier, la série de Riemann de paramètre $\alpha = 1$ est la série harmonique.

Proposition I.4 : L'application $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ définie par $(u_k) \mapsto \sum u_k$ est $\mathbb{K}$ -linéaire et bijective, de réciproque définie par $(S_n) \mapsto (S_n - S_{n-1})$ (en convenant que $S_{-1} = 0$).

En effet, pour tout $n \geq 0$, on a $\sum_{k=0}^n u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_n$ (découpage) et $\sum_{k=0}^n (S_k - S_{k-1}) = S_n$ (téléscopage).

Remarque I.5 : Une façon d'interpréter ce résultat est que, s'il est en général difficile de donner une formule close (i.e., sans symbole $\sum$) pour les sommes partielles d'une série, c'est possible (et facile) lorsque (u_k) est de la forme $(v_k - v_{k-1})$.

Exemples I.6 : 1) En décomposant en éléments simples, on calcule $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \geq 1$.

2) Soit $q \in \mathbb{K}$. La série géométrique de raison q , de terme général q^k , admet les sommes partielles $\sum_{k=0}^n q^k$.

Si $q \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$, on a $q^k = \frac{q^k}{1-q} - \frac{q^{k+1}}{1-q}$ pour tout $k \geq 0$ donc $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ pour tout $n \geq 0$.

3) Dans cette veine, la transformation d'Abel est une méthode de calcul très fréquente, à rapprocher de l'intégration par parties : soient $(u_k), (v_k)$ deux suites et notons (S_k) la suite des sommes partielles de la série $\sum u_k$. Alors, pour tous $m \leq n$, on a, par linéarité et avec un décalage d'indice,

$$\sum_{k=m+1}^n u_k v_k = \sum_{k=m+1}^n (S_k - S_{k-1}) v_k = \sum_{k=m+1}^n S_k v_k - \sum_{k=m}^{n-1} S_k v_{k+1} = [S_n v_n - S_m v_{m+1}] - \sum_{k=m+1}^{n-1} S_k (v_{k+1} - v_k).$$

En convenant que $S_{-1} = 0$ (resp. que $S_0 = 0$ si (u_k) est définie à partir du rang 1), on obtient en particulier

$$\sum_{k=0}^n u_k v_k = S_n v_n - \sum_{k=0}^{n-1} S_k (v_{k+1} - v_k) \quad (\text{resp.} \quad \sum_{k=1}^n u_k v_k = S_n v_n - \sum_{k=1}^{n-1} S_k (v_{k+1} - v_k)).$$

I.2 Nature d'une série - Suite des restes d'une série convergente

Définition I.7 : Soit $(u_k) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite. On dit que la série $\sum u_k$ est convergente lorsque la suite $\left(\sum_{k=0}^n u_k\right)$

de ses sommes partielles converge. Dans ce cas, on note $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ sa limite : c'est la somme de la série $\sum u_k$

On dit que $\sum u_k$ est une série divergente dans le cas contraire. Une série divergente n'a pas de somme !

Exemples I.8 : 1) La série $\sum \frac{1}{k(k+1)}$ est convergente. Sa somme est égale à 1.

2) La série harmonique $\sum \frac{1}{k}$ est divergente car, pour tout $n \geq 1$, on a $\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}$.

3) La série géométrique de raison $q \in \mathbb{K}$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$. Sa somme est alors $\frac{1}{1-q}$.

Remarques I.9 : 1) Les résultats généraux sur les suites assurent qu'une CL de séries convergentes est une série convergente et que, dans ce cas, la somme d'une CL est la CL des sommes.

2) La troncature des premiers termes d'une série ne change pas sa nature : pour toute suite (u_k) et pour tout $k_0 \geq 0$, la série $\sum u_k$ et la série $\left(\sum_{k=k_0}^n u_k\right)_{n \geq k_0}$ ont même nature (mais elles n'ont pas la même somme si elles convergent !)

3) Une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge !

Proposition-Définition I.10 : Soit $(u_k) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite. Si la série $\sum u_k$ converge, alors (u_k) tend vers 0.

Si (u_k) ne tend pas vers 0, on dit que $\sum u_k$ est grossièrement divergente.

Définition I.11 : Soit $\sum u_k$ une série convergente.

La suite des restes (à l'ordre n) de la série $\sum u_k$ est la suite de terme général $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k := \sum_{k=0}^{\infty} u_k - \sum_{k=0}^n u_k$.

Exemples I.12 : 1) Le reste à l'ordre n de la série $\sum \frac{1}{k(k+1)}$ est $\frac{1}{n+1}$.

2) Si $|q| < 1$, le reste à l'ordre n de la série géométrique de raison q est $\sum_{k=n+1}^{\infty} q^k = \frac{q^{n+1}}{1-q}$.

Remarques I.13 : 1) Par définition, la suite des restes d'une série $\sum u_n$ tend nécessairement vers 0 !

2) La suite des restes d'une CL de séries convergentes est la CL des restes de ces séries.

II Séries à termes positifs

L'intérêt pour les séries à termes positifs vient du théorème de la convergence monotone dont on rappelle qu'il ne permet pas de calculer une limite. Une série $\sum u_k$ est dite à termes positifs (resp. à termes strictement positifs) si la suite (u_k) est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (resp. dans $\mathbb{R}_+^*$). La suite des sommes partielles d'une série à termes positifs (ou SATP) est croissante et on notera

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sup \left\{ \sum_{k=0}^n u_k, n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{dans} \quad \overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

En particulier, elle converge si et seulement si elle est majorée et elle tend vers $+\infty$ dans le cas contraire.

On adapte pour les séries à termes négatifs (resp. à termes strictement négatifs).

II.1 Séries à termes positifs majorées

Proposition II.1 : Soient $\sum u_k$ et $\sum v_k$ deux séries à termes positifs.

On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geq N$, $u_k \leq v_k$. On a alors les deux implications :

1) Si $\sum v_k$ converge, alors $\sum u_k$ converge et, pour tout $n \geq N$, $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$.

2) Si $\sum u_k$ diverge, alors $\sum v_k$ diverge.

Exemples II.2 : 1) Pour tout $k \geq 2$, on a $0 < \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$. Pour tout $n \geq 2$, on a $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} \leq 1$ donc la

série $\sum \frac{1}{k(k-1)}$ converge et la série $\sum \frac{1}{k^2}$ converge également. Il faut savoir que sa somme est $\frac{\pi^2}{6}$.

En outre, pour tout $n \geq 1$, on a $0 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{n}$.

2) Puisque la série harmonique diverge et que, pour tout $k \geq 1$, on a $\frac{1}{k} \leq \frac{\ln(k)}{k}$, la série $\sum \frac{\ln(k)}{k}$ diverge également.

Proposition II.3 : Soit $\sum u_k$ et $\sum v_k$ deux séries à termes strictement positifs.

On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geq N$, $\frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \frac{v_{k+1}}{v_k}$. On a alors les deux implications :

1) Si $\sum v_k$ converge, alors $\sum u_k$ converge.

2) Si $\sum u_k$ diverge, alors $\sum v_k$ diverge.

Corollaire II.4 (Critère de d'Alembert) : Soit $\sum u_k$ une série à termes strictement positifs. On suppose que $\lim \frac{u_{k+1}}{u_k} = q$.

- 1) Si $q < 1$, alors $\sum u_k$ converge.
- 2) Si $q > 1$, alors $\sum u_k$ diverge grossièrement.

Exemple II.5 : Pour tout $x > 0$, la série $\sum \frac{x^k}{k!}$ converge.

Remarque II.6 : On notera que le critère de d'Alembert revient à majorer (resp. minorer) le terme général d'une série avec une série géométrique convergente (resp. divergente). Dans le "cas frontière" où $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ tend vers 1, on ne peut rien dire avec cette méthode : si $u_k = \frac{1}{k}$, la série associée diverge tandis que si $u_k = \frac{1}{k^2}$, la série associée converge. Dans les deux cas pourtant, $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ tend vers 1.

On verra en exercice la règle de Raabe-Duhamel qui permet de préciser partiellement cette situation.

II.2 Comparaison avec une intégrale - Cas des séries de Riemann

Soient $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue et considérons la série de terme général $u_k = \int_k^{k+1} f(t)dt$. Grâce aux primitives, on calcule aisément la somme partielle $\sum_{k=1}^n u_k = \int_1^{n+1} f(t)dt$. Puisque f est à valeurs positive, la primitive $x \mapsto \int_1^x f(t)dt$ possède une limite en $+\infty$ si et seulement si la suite $n \mapsto \sum_{k=1}^n u_k = \int_1^{n+1} f(t)dt$ converge. On dit dans ce cas que l'intégrale $\int_1^\infty f(t)dt$ existe.

Plus généralement, on montre le théorème fondamental suivant :

Théorème II.7 : Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue et décroissante.

Alors la série $\sum f(k)$ converge si et seulement si $\int_1^\infty f(t)dt$ existe.

Remarque II.8 : Ce résultat est encore valable si la fonction f est définie sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 0$ ou si elle n'est décroissante que sur un intervalle de cette forme.

Exemple II.9 : Puisque $\int \frac{dt}{t \ln(t)} = \ln(\ln(t))$ sur $]1, +\infty[$, $\int_2^\infty \frac{dt}{t \ln(t)}$ n'existe pas et $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$ diverge.

On applique ce théorème (et on améliore son résultat) dans le cas des fonctions puissances négatives :

Théorème II.10 (Séries de Riemann) : Soit $\alpha > 0$ un réel.

- 1) Si $0 < \alpha < 1$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ est divergente et on a l'équivalence $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.
- 2) Si $\alpha = 1$, la série harmonique $\sum \frac{1}{k}$ est divergente et on a l'équivalence $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$.
- 3) Si $\alpha > 1$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ est convergente et on a l'équivalence $\sum_{k=n+1}^\infty \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

Exemple II.11 : La série $\sum \frac{1}{k\sqrt{k}}$ converge et on a $\sum_{k=n+1}^\infty \frac{1}{k\sqrt{k}} \sim \frac{2}{\sqrt{n}}$, i.e., $\sum_{k=n+1}^\infty \frac{1}{k\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Ainsi, en notant S la somme de la série, on a $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k\sqrt{k}} = S - \frac{2}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Remarque II.12 : Soit encore $\alpha > 0$. La série $\sum k^\alpha$ est grossièrement divergente et on montre l'équivalence

$\sum_{k=1}^n k^\alpha \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ en adaptant la preuve du théorème ou en faisant apparaître une somme de Riemann :

$$\sum_{k=1}^n k^\alpha = n^{\alpha+1} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^\alpha \right) \sim n^{\alpha+1} \int_0^1 t^\alpha dt = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

II.3 Sommation des relations de comparaison

Théorème II.13 : Soient $\sum u_k$ et $\sum v_k$ deux séries à termes positifs avec $u_k \sim v_k$.

1) Les séries $\sum u_k$ et $\sum v_k$ sont de même nature.

2) a) Si les séries convergent, alors les restes sont équivalents : $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$.

Mais les sommes $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ n'ont aucune raison d'être égales !

b) Si les séries divergent, alors les sommes partielles sont équivalentes : $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$.

Exemple II.14 : La suite $\left(\ln \left(\cos \left(\frac{1}{k} \right) \right) \right)$ est à termes négatifs et on a $\ln \left(\cos \left(\frac{1}{k} \right) \right) \sim -\frac{1}{2k^2}$. Le théorème précédent s'applique donc et, d'après Riemann, ces séries convergent. En outre, $\sum_{k=n+1}^{\infty} \ln \left(\cos \left(\frac{1}{k} \right) \right) \sim$

$$-\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sim -\frac{1}{2n} \text{ donc } \sum_{k=n+1}^{\infty} \ln \left(\cos \left(\frac{1}{k} \right) \right) = -\frac{1}{2n} + o \left(\frac{1}{n} \right).$$

En notant S la somme de la série, on a comme précédemment $\sum_{k=1}^n \ln \left(\cos \left(\frac{1}{k} \right) \right) = S + \frac{1}{2n} + o \left(\frac{1}{n} \right)$.

Proposition II.15 : Soient $\sum u_k$ et $\sum v_k$ deux séries à termes positifs avec $u_k = O(v_k)$.

a) Si $\sum v_k$ converge, alors $\sum u_k$ converge et $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = O \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k \right)$.

b) Si $\sum u_k$ diverge, alors $\sum v_k$ diverge et $\sum_{k=0}^n u_k = O \left(\sum_{k=0}^n v_k \right)$.

On a un résultat analogue si $u_k = o(v_k)$ (en remplaçant O par o partout !)

II.4 Deux applications à connaître

Développement asymptotique de la série harmonique. Montrons que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o \left(\frac{1}{n} \right)$.

Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = \frac{1}{n} - \ln \left(\frac{n+1}{n} \right)$. On a $u_n \sim \frac{1}{2n^2}$ donc la série $\sum u_n$ (à termes positifs) converge. En notant $\gamma > 0$ sa somme (c'est la constante d'Euler-Mascheroni), on a en outre

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1) = \gamma - \frac{1}{2n} + o \left(\frac{1}{n} \right).$$

Puisque $\ln(n+1) = \ln(n) + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, on peut conclure.

La formule de Stirling. Montrons qu'on a $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$. La démonstration se fait en deux temps.

Etape 1. Pour tout $n \geq 1$, notons $u_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$. La formule est vraie si et seulement si $\frac{u_n}{n!} \rightarrow 1$ si et seulement si $\left(\ln(u_n) - \sum_{k=2}^n \ln(k)\right) \rightarrow 0$. On commence par montrer que cette suite converge, *i.e.*, par télescopage et avec un décalage d'indice, que la série $\sum \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) - \ln(k+1)$ converge. Pour tout $k \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) - \ln(k+1) &= \ln\left[\frac{k+1}{e} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+\frac{1}{2}}\right] - \ln(k+1) \\ &\underset{k \rightarrow \infty}{=} \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right)\right) - 1 \\ &\underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{12k^2} \end{aligned}$$

Ainsi, la série $\sum \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) - \ln(k+1)$ (à termes positifs à partir d'un certain rang) converge. On note S sa somme et $A = \frac{e^{-S}}{u_1}$ de sorte que, par continuité de exp,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) - \ln(k+1) = \ln\left(\frac{u_n}{u_1 n!}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S \quad \text{et} \quad n! \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} A u_n.$$

Etape 2 : Intégrales de Wallis. Pour tout $n \geq 0$, on pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$.

Par positivité et croissance de l'intégrale, la suite (W_n) est décroissante et à valeurs (strictement) positive. Avec une intégration par parties, on a, pour tout $n \geq 0$,

$$W_n - W_{n+2} = \frac{W_{n+2}}{n+1} \quad \text{donc} \quad \frac{W_{n+2}}{W_n} = \frac{n+1}{n+2}.$$

On en déduit d'une part que $W_n \sim W_{n+1}$ et d'autre part que, pour tout $n \geq 0$, $W_n W_{n+1} = \frac{W_1 W_0}{n+1}$. Ainsi, on peut conclure que

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

On calcule en outre que, pour tout $k \geq 0$, $W_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \frac{\pi}{2}$ et $W_{2k+1} = \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}$.

Conclusion de la preuve. Rappelons qu'on a montré à l'étape 1 que $n! \sim A \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$. On a donc aussi

$$W_{2k} \sim \frac{A \left(\frac{2k}{e}\right)^{2k} \sqrt{4\pi k}}{2^{2k} A^2 \left(\frac{k}{e}\right)^{2k} 2\pi k} \frac{\pi}{2} \sim \frac{1}{A} \sqrt{\frac{\pi}{4k}}$$

et, par transitivité de l'équivalence, on conclut que $1 \sim A$, et donc que $A = 1$, ce qu'il fallait démontrer pour conclure quant à la formule de Stirling.

III Autres séries convergentes

III.1 Critère spécial des séries alternées

On rappelle qu'une conséquence du théorème de la convergence monotone est la convergence des suites adjacentes vers une même limite. On applique ici ce résultat aux séries :

Théorème III.1 : Soit (u_k) une suite à valeurs réelles telle que

- (i) Pour tout $k \geq 0$, $u_k u_{k+1} \leq 0$ (i.e., deux termes consécutifs de la suite (u_k) sont de signe contraire);
- (ii) La suite $(|u_k|)$ est décroissante et tend vers 0.

Alors la série $\sum u_k$ est convergente.

En outre, pour tout $n \geq 0$, $\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right| \leq |u_{n+1}|$ et $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ et u_{n+1} sont de même signe.

Exemple III.2 : La série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge. L'identité de Catalan

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$$

permet de calculer sa somme $\ln(2)$ en reconnaissant une somme de Riemann.

En outre, pour tout $n \geq 1$, $\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| \leq \frac{1}{n+1}$.

Remarques III.3 : 1) Considérons les suites de termes généraux $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$.

Il est clair que $u_n \sim v_n$ mais les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de nature différente : il faudra bien vérifier que deux séries sont à termes positifs avant d'appliquer le théorème II.13 !

2) Puisque, pour tout $n \geq 2$, $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$, la série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ diverge et l'étude du sens de variation de la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n}\right)$ assure que la première partie de l'hypothèse (ii) du critère spécial des séries alternées est cruciale.

III.2 Séries absolument convergentes

Théorème III.4 : Soient (u_k) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $\sum u_k$ la série associée.

On dit que $\sum u_k$ est absolument convergente si la série à termes positifs $\sum |u_k|$ est convergente.

Dans ce cas, $\sum u_k$ converge et, pour tout $n \geq 0$, on a $\left| \sum_{k=0}^{\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|$ et $\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k|$

Exemple III.5 : Considérons la série de terme général $u_k = \frac{(-1)^{k-1} z^k}{k}$. On a $\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \frac{k|z|}{k+1} \rightarrow |z|$.

Si $|z| < 1$, la série de terme général $|u_k|$ est convergente donc la série $\sum \frac{(-1)^{k-1} z^k}{k}$ est convergente.

Si $|z| > 1$, la série de terme général $|u_k|$ est grossièrement divergente donc la série $\sum \frac{(-1)^{k-1} z^k}{k}$ l'est également.

Si $|z| = 1$, la série $\sum |u_k| = \sum \frac{1}{k}$ est divergente mais on ne peut rien dire a priori de la série $\sum \frac{(-1)^{k-1} z^k}{k}$ qui converge pour $z = 1$ et qui diverge pour $z = -1$.

Proposition III.6 : Toute CL de séries absolument convergentes est absolument convergente.

Proposition III.7 : Soient $\sum u_k$ une série et $\sum v_k$ une série à termes positifs convergente.

Si $u_k = O(v_k)$ alors $\sum u_k$ est absolument convergente, donc convergente, et $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k\right)$.

On a un résultat analogue en remplaçant partout O par o .

Exemple III.8 : On montre que la série $\sum \left(\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n}} - 1\right)$ converge avec un $DL_2(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+x}$.

III.3 Application - Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes

Théorème III.9 : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries absolument convergentes. Alors en posant, pour tout $n \geq 0$,

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{\substack{0 \leq k, l \leq n \\ k+l=n}} u_k v_l,$$

la série $\sum w_n$ est absolument convergente et $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right)$.

Exemples III.10 : 1) Soient $x, y \in \mathbb{C}$ et considérons les séries de Taylor (absolument convergentes) $\sum \frac{x^n}{n!}$ et $\sum \frac{y^n}{n!}$. Alors leur produit de Cauchy est absolument convergent et on a

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Ces sommes de séries sont bien connues : on retrouve la propriété fondamentale $e^x e^y = e^{x+y}$.

2) Montrons la formule du binôme négatif : pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, pour tout $p \geq 0$, la série $\sum_{n \geq 0} \binom{n+p}{p} z^n$ est absolument convergente et sa somme est $\frac{1}{(1-z)^{p+1}}$.

Pour $p = 0$, on a $\binom{n}{0} = 1$ pour tout $n \geq 0$ et on reconnaît une série géométrique de raison z : elle est absolument convergente et sa somme est bien $\frac{1}{1-z}$.

Soit $p \geq 0$ et supposons que le résultat est vrai. On peut donc faire le produit de Cauchy de cette série et de la série géométrique de raison z : la série $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n \binom{k+p}{p}\right) z^n$ est absolument convergente et sa somme est

$\frac{1}{(1-z)^{p+2}}$. Or, d'après la formule de Pascal,

$$\sum_{k=0}^n \binom{k+p}{p} = \sum_{k=0}^n \binom{k+p+1}{p+1} - \binom{k+p}{p+1} = \binom{n+p+1}{p+1}$$

et on peut conclure selon le principe de récurrence.