

Programme de colles - Semaine 2 (du 21/09 au 25/09)

Dans ce plan détaillé de cours, les points marqués du signe  pourront faire l'objet d'une question de cours.

Reprise du programme précédent - Leçon 1 : Rappels et compléments d'analyse

 On conservera uniquement les questions de cours relatives aux calculs de DL.

Leçon 2 : Séries numériques

I - Convergence d'une série numérique

1) Suite des sommes partielles d'une série - Série $\sum u_k$ (suite des sommes partielles).

Linéarité et bijectivité de $(u_k) \mapsto \sum u_k$, réciproque $(S_n) \mapsto (S_n - S_{n-1})$ (convention $S_{-1} = 0$).

Séries télescopiques. Exs : Utilisation de décompositions en éléments simples, séries géométriques.

2) Nature d'une série - Suite des restes d'une série convergente - Série convergente, somme.

Rqs : Stabilité par CL, linéarité de la somme ; nature indépendante des premiers termes ; une suite (u_n) converge ssi $\sum (u_{k+1} - u_k)$ converge.

Le terme général d'une série convergente tend vers 0, notion de divergence grossière.

Reste d'ordre n d'une série convergente. La suite de restes tend vers 0. Rq : linéarité de la formation des restes.

II - Séries à termes positifs

Rappel sur le thm de cv monotone. Une SATP (i.e., avec $(u_k) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$) converge ssi elle est majorée.

1) Séries à termes positifs majorées - Prop : Soient $(u_k), (v_k)$ dans $(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ telles que $u_k \leq v_k$ à pdc.

Si $\sum v_k$ cv alors $\sum u_k$ cv (et contraposée), et $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$ à pdc.

Prop : Soient $(u_k), (v_k)$ dans $(\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telles que $\frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \frac{v_{k+1}}{v_k}$ à pdc. Si $\sum v_k$ cv alors $\sum u_k$ cv (et contraposée).

 Cor (Critère de d'Alembert) : Soit (u_k) dans $(\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $\frac{u_{k+1}}{u_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \ell$.

Si $\ell < 1$, $\sum u_k$ converge. Si $\ell > 1$, $\sum u_k$ diverge grossièrement.

2) Comparaison avec une intégrale - Cas des séries de Riemann - Thm : Si $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ est C^0 et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (ou $[a, +\infty[$), et si $F : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive (qcq) de f alors la série $\sum f(k)$ cv ssi $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) < \infty$.

 Thm : Série de Riemann $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ de paramètre $\alpha > 0$ (dont série harmonique bien connue ($\alpha = 1$)) :

Si $0 < \alpha < 1$, divergence et $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$; Si $\alpha > 1$, convergence et $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

(les étudiants donneront le résultat complet et prouveront un des deux cas au choix du colleur.)

3) Sommation des relations de comparaison

Rappel : Caractérisation de l'équivalence en ε dans le cas de suites à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

 Thm : Soient $(u_k), (v_k)$ dans $(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ telles que $u_k \sim v_k$. Les séries $\sum u_k$ et $\sum v_k$ ont même nature. (les étudiants donneront en outre un contre-exemple dans le cas de suites de signe variable.)

(HP) De plus, si les séries convergent, $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$; si elles divergent, $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$.

Thm : Soient $(u_k), (v_k)$ dans $(\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ telles que $u_k = O(v_k)$. Si $\sum v_k$ cv alors $\sum u_k$ cv.

4) Deux applications à connaître - Dév. asymptotique des sommes partielles de la série harmonique : équi-

valent de $\frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$ dont on déduit $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Formule de Stirling : $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$. On pose $u_n = \left(\frac{n}{e}\right)^e \sqrt{2\pi n}$ pour tout $n \geq 1$.

 (Etape 1) Equivalent de $\ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) - \ln(k+1)$ dont on déduit l'existence de $A > 0$ tel que $n! \sim Au_n$.

 (Etape 2) Etude des intégrales de Wallis $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$ pour $n \geq 0$: décroissance et positivité stricte de (W_n) . Expression de $\frac{W_{n+2}}{W_n}$ par IPP dont on tire $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ et $W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}$.

III - Autres séries convergentes

1) Critère spécial des séries alternées

 Soit $(u_k) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que (i) $u_k u_{k+1} \leq 0$ pour tout $k \geq 0$; (ii) $(|u_k|)$ est décroissante et tend vers 0.

Alors $\sum u_k$ converge et, pour tout $n \geq 1$, $\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right| \leq |u_{n+1}|$. Ex : Série harmonique alternée.

2) Séries absolument convergentes - Thm : Si (u_k) est à valeurs dans $\mathbb{K}$, $\sum u_k$ est acv si $\sum |u_k|$ est convergente.

Alors $\sum u_k$ est convergente et on a $\left| \sum_{k=0}^{\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|$ et $\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k|$ pour tout $n \geq 0$.

Prop : L'ensemble des séries acv est stable par CL. Rq : Cas de la série harmonique alternée, cv mais non-acv.

Prop : Si $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, si $\sum v_n$ est une SATP convergente et si $u_n = O(v_n)$, $\sum u_n$ est absolument convergente.

3) Application - Produit de Cauchy de deux séries absolument convergente - Thm : Si $\sum u_k$ et $\sum v_k$ sont acv,

la série $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} \right)$ est acv et $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} v_k \right)$.

Exs :  1) Pour $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, produit de Cauchy des séries $\sum \frac{x^k}{k!}$ et $\sum \frac{y^k}{k!}$;

 2) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, pour tout $p \geq 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+p}{p} z^n = \frac{1}{(1-z)^{p+1}}$.