

Leçon 3 : Intégration sur un intervalle quelconque

Table des matières

I	Rappels et compléments - Intégration sur un segment	1
I.1	Fonctions continues par morceaux, fonctions en escalier	1
I.2	Approximation uniforme d'une fonction continue par des fonctions en escalier	2
I.3	Construction de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment	3
I.4	Propriétés élémentaires de l'intégration sur un segment	4
I.5	Théorème fondamental de l'analyse et méthodes de calcul - Formules de Taylor	5
I.6	Calcul numérique d'intégrale - Sommes de Riemann	6
II	Intégrales généralisées (ou impropres)	7
II.1	Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$	7
II.1.a	Intégrales convergentes	7
II.1.b	Cas des fonctions positives	8
II.2	Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque	8
II.2.a	Cas d'un intervalle de la forme $[a, b[$	8
II.2.b	Cas d'un intervalle de la forme $]a, b]$	9
II.2.c	Cas d'un intervalle de la forme $]a, b[$	10
II.3	Propriétés élémentaires de l'intégrale	11
III	Fonctions intégrables	11
III.1	Définitions - Utilisation des relations de comparaison	11
III.2	Espaces de fonctions L^1 et de fonctions L^2	13
IV	Méthodes de calcul	13
IV.1	Intégration par parties	13
IV.2	Changement de variable	14

I Rappels et compléments - Intégration sur un segment

I.1 Fonctions continues par morceaux, fonctions en escalier

Soit $[a, b]$ un segment. Rappelons qu'une subdivision $\sigma = \{c_k, 0 \leq k \leq n\}$ du segment $[a, b]$ est la donnée d'un entier $n \geq 1$ et de points $a = c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_{n-1} < c_n = b$ de $[a, b]$. Le pas de la subdivision σ est le maximum $\delta(\sigma) := \max\{c_k - c_{k-1}, 1 \leq k \leq n\}$ de la distance entre deux points consécutifs de σ .

Une subdivision $\sigma' = \{c'_k, 0 \leq k \leq n'\}$ est plus fine que σ si $\sigma \subset \sigma'$, i.e., si, pour tout $1 \leq k \leq n$, il existe $0 \leq j_k \leq n'$ tel que $c_k = c'_{j_k}$. On a alors immédiatement $\delta(\sigma') \leq \delta(\sigma)$.

On notera que si σ, σ' sont deux subdivisions de $[a, b]$, $\sigma \cup \sigma'$ est une subdivision de $[a, b]$, plus fine que σ et σ' .

Définition I.1 : Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = \{c_k, 0 \leq k \leq n\}$ du segment $[a, b]$ telle que :

- (i) Pour tout $1 \leq k \leq n$, la restriction $f|_{]c_{k-1}, c_k[}$ est continue sur $]c_{k-1}, c_k[$;
- (ii) Pour tout $1 \leq k \leq n$, $\lim_{x \rightarrow c_{k-1}^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow c_k^-} f(x)$ existe.

On dit que σ est une subdivision adaptée à f , et toute subdivision plus fine que σ est également adaptée à f .

Remarques I.2 : 1) Il n'y a aucune condition sur les valeurs que f prend aux points d'une subdivision adaptée.

2) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux si et seulement si il existe une subdivision $\sigma = \{c_k, 0 \leq k \leq n\}$ telle que, pour tout $1 \leq k \leq n$, la restriction $f|_{]c_{k-1}, c_k[}$ est prolongeable en une fonction $\tilde{f}_k : [c_{k-1}, c_k] \rightarrow \mathbb{K}$ continue sur le segment $[c_{k-1}, c_k]$. En particulier, une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est bornée sur $[a, b]$ d'après le théorème des bornes atteintes. Elle peut cependant ne pas atteindre ses bornes.

3) Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ et si $[c, d] \subset [a, b]$ est un sous-segment de $[a, b]$, la restriction $f|_{[c, d]} : [c, d] \rightarrow \mathbb{K}$ est également continue par morceaux sur $[c, d]$.

4) Si $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ sont continues par morceaux sur $[a, b]$, il existe une subdivision adaptée à f et à g , ce qui permet de prouver que l'ensemble $\mathcal{C}_{pm}^0([a, b], \mathbb{K})$ des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ est stable par combinaison linéaire et par produit.

En outre, si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux sur $[a, b]$, la fonction (composée) $|f| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ l'est également (et une subdivision adaptée à f est également adaptée à $|f|$).

Définition I.3 : Une fonction $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est en escalier s'il existe une subdivision $\sigma = \{c_k, 0 \leq k \leq n\}$ du segment $[a, b]$ telle que, pour tout $1 \leq k \leq n$, la restriction $\varphi|_{]c_{k-1}, c_k[}$ est constante sur $]c_{k-1}, c_k[$.

On dit que σ est une subdivision adaptée à φ , et toute subdivision plus fine que σ est également adaptée à φ .

Remarque I.4 : La remarque I.2 est vraie en changeant partout "continue par morceaux" en "en escalier", au détail près qu'une fonction en escalier ne prend qu'un nombre fini de valeurs et atteint donc ses bornes !

I.2 Approximation uniforme d'une fonction continue par des fonctions en escalier

Soit I un intervalle et notons $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ l'algèbre des fonctions bornées sur I (elle est stable par CL et par produit, et contient les neutres de $+$ et $\times$). Pour tout $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K})$, on peut définir

$$\|f\|_\infty^I := \sup\{|f(t)|, t \in I\}.$$

L'application $\|\cdot\|_\infty^I : \mathcal{B}(I, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une norme (d'algèbre) car elle satisfait les 3 (+1) conditions suivantes :

- (i) (*Séparation*) Pour tout $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K})$, on a $\|f\|_\infty^I = 0$ si et seulement si $f = 0$ sur I ;
- (ii) (*Homogénéité*) Pour tout $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K})$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\|\lambda f\|_\infty^I = |\lambda| \|f\|_\infty^I$;
- (iii) (*Inégalité triangulaire*) Pour tous $f, g \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K})$, on a $\|f + g\|_\infty^I \leq \|f\|_\infty^I + \|g\|_\infty^I$;
- (iv) (*Sous-multiplicativité*) Pour tous $f, g \in \mathcal{B}(I, \mathbb{K})$, on a $\|fg\|_\infty^I \leq \|f\|_\infty^I \|g\|_\infty^I$.

C'est la norme infinie (ou norme de la convergence uniforme) sur l'algèbre $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ des fonctions bornées sur I .

Remarquons que si $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est bornée et si $J \subset I$, alors f est bornée sur J et $\|f\|_\infty^J \leq \|f\|_\infty^I$.

Notons aussi que I.2.2 assure que l'ensemble $\mathcal{C}_{pm}^0([a, b], \mathbb{K})$ est inclus dans $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{K})$.

Soit maintenant une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ continue sur $[a, b]$. Le théorème de Heine (BWHP) assure que f est uniformément continue sur $[a, b]$ au sens où la phrase suivante est vraie :

($\star$) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tous x, x' dans $[a, b]$, $|x' - x| \leq \alpha$ implique $|f(x') - f(x)| \leq \varepsilon$.

Exercice I.5 : Avec les notations précédentes, on suppose que la phrase ($\star$) est fausse.

a) Justifier qu'il existe $\varepsilon > 0$ et des suites $(x_n), (x'_n)$ à valeurs dans $[a, b]$ telles que, pour tout $n \geq 1$, $|x'_n - x_n| \leq \frac{1}{n}$ et $|f(x'_n) - f(x_n)| > \varepsilon$.

b) Justifier qu'il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et un point $\ell \in [a, b]$ tel que $(x_{\varphi(n)})$ et $(x'_{\varphi(n)})$ convergent vers ℓ et en déduire une contradiction.

Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ comme dans la phrase $(\star)$ et on choisit un entier $n \geq 1$ tel que $\frac{b-a}{n} \leq \alpha$.

On construit la subdivision régulière à n pas de $[a, b]$, notée σ_n^{reg} et de pas $\delta(\sigma_n^{\text{reg}}) = \frac{b-a}{n} \leq \alpha$, en posant, pour tout $0 \leq k \leq n$, $c_k = a + k \frac{b-a}{n}$. Pour tout $1 \leq k \leq n$, on choisit de plus $x_k \in [c_{k-1}, c_k]$ et on définit une fonction $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ en escalier sur $[a, b]$ en posant, pour tout $x \in [a, b]$,

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x_k) & \text{si } x \in]c_{k-1}, c_k[\quad (\text{pour } 1 \leq k \leq n); \\ f(c_k) & \text{si } x = c_k \quad (\text{pour } 0 \leq k \leq n). \end{cases}$$

Alors, pour tout $x \in [a, b]$, on a $|f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$, i.e., $\|f - \varphi\|_{\infty}^{[a,b]} \leq \varepsilon$. Résumons et développons :

Théorème I.6 : Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et $\varepsilon > 0$.

- 1) Il existe $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ en escalier telle que $\|f - \varphi\|_{\infty}^{[a,b]} \leq \varepsilon$.
- 2) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il existe $\varphi_+, \varphi_- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en escalier telles que $\varphi_- \leq f \leq \varphi_+$ et $\|\varphi_+ - \varphi_-\|_{\infty}^{[a,b]} \leq \varepsilon$.
- 3) Il existe une suite $(\varphi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{K})_{n \geq 0}$ de fonctions en escalier telle que la suite numérique $(\|f - \varphi_n\|_{\infty}^{[a,b]})_{n \geq 0}$ tend vers 0.

Remarque I.7 : Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ et $\sigma = \{c_k, 0 \leq k \leq n\}$ une subdivision adaptée à f . Pour tout $1 \leq k \leq n$, on note $\tilde{f}_k : [c_{k-1}, c_k] \rightarrow \mathbb{K}$ le prolongement de $f|_{]c_{k-1}, c_k[}$, continu sur $[c_{k-1}, c_k]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut approximer $\tilde{f}_k$ à ε -près par une fonction en escalier $\varphi_k : [c_{k-1}, c_k] \rightarrow \mathbb{K}$ et on définit $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ en escalier sur $[a, b]$ en posant, pour tout $x \in [a, b]$,

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_k(x) & \text{si } x \in]c_{k-1}, c_k[\quad (1 \leq k \leq n); \\ f(c_k) & \text{si } x = c_k \quad (0 \leq k \leq n). \end{cases}$$

On a alors $\|f - \varphi\|_{\infty}^{[a,b]} \leq \varepsilon$ et le théorème est encore vrai pour les fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

I.3 Construction de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Cas d'une fonction en escalier. Soient $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction en escalier en escalier, $\sigma = \{c_k, 0 \leq k \leq n\}$ une subdivision adaptée à φ et, pour tout $1 \leq k \leq n$, notons $\varphi|_{]c_{k-1}, c_k[} = \xi_k$. Alors le scalaire $\sum_{k=1}^n (c_k - c_{k-1}) \xi_k$ ne dépend que de φ et pas du choix de la subdivision adaptée σ . On pose

$$\int_a^b \varphi := \sum_{k=1}^n (c_k - c_{k-1}) \xi_k$$

et on montre, si $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est une seconde fonction en escalier, que $\left| \int_a^b \varphi - \int_a^b \psi \right| \leq (b-a) \|\varphi - \psi\|_{\infty}^{[a,b]}$.

Cas d'une fonction continue par morceaux à valeurs réelles. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux, le théorème I.6 assure que les ensembles

$$E_-(f) = \left\{ \left(\int_a^b \varphi_- \right), \varphi_- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ en escalier telle que } \varphi_- \leq f \right\}$$

et

$$E_+(f) = \left\{ \left(\int_a^b \varphi_+ \right), \varphi_+ : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ en escalier telle que } f \leq \varphi_+ \right\}$$

sont non-vides, respectivement majoré et minoré, et que $\sup E_-(f) = \inf E_+(f)$.

On définit l'intégrale de f sur le segment $[a, b]$ en posant

$$\int_a^b f = \int_a^b f = \sup E_-(f) = \inf E_+(f).$$

Cas d'une fonction continue par morceaux à valeurs complexes. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est continue par morceaux, ses composantes $\operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ le sont aussi et on pose

$$\int_a^b f = \int_a^b \operatorname{Re}(f) + i \int_a^b \operatorname{Im}(f).$$

Dans tous les cas, on prouve le théorème fondamental suivant :

Théorème I.8 : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. Si $(\varphi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{K})_{n \geq 0}$ est une suite de fonctions en escalier sur $[a, b]$ telle que la suite numérique $(\|f - \varphi_n\|_\infty)_{n \geq 0}$ tend vers 0, alors

$$\int_a^b \varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f.$$

I.4 Propriétés élémentaires de l'intégration sur un segment

Dans le cas d'une fonction en escalier, une intégrale est une somme finie et les propriétés de l'intégration dans ce cas sont celles des sommes finies.

Le théorème précédent permet d'étendre ces propriétés à l'intégration des fonctions continues par morceaux sur un segment. Dans le cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, on retrouve :

- la relation de Chasles (qui conduit à poser $\int_b^a f = - \int_a^b f$ et $\int_c^c f = 0$).

En particulier, avec les notations de la remarque I.7, on a $\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=1}^n \int_{c_{k-1}}^{c_k} \tilde{f}_k(t)dt$;

- la linéarité de l'intégrale ;
- l'inégalité triangulaire intégrale $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$.

Dans le cas des fonctions à valeurs réelles, on retrouve :

- la positivité de l'intégrale : si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, on a $\int_a^b f \geq 0$;
- la croissance : si $f \leq g$ sur $[a, b]$, on a $\int_a^b f \leq \int_a^b g$;
- l'inégalité de Cauchy-Schwarz : on a $\left| \int_a^b fg \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2} \sqrt{\int_a^b g^2}$.

Dans le cas d'une fonction continue à valeurs positives sur $[a, b]$, le théorème suivant est fondamental :

Théorème I.9 (de positivité stricte) : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue sur $[a, b]$ et à valeurs positives.

Alors $\int_a^b f \geq 0$ avec égalité si et seulement si $f = 0$ sur $[a, b]$.

Exercice I.10 : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$.

1) On suppose que, pour toute fonction en escalier $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\int_a^b f\varphi = 0$. Montrer que $f = 0$ sur $[a, b]$.

2) On suppose que, pour tout $0 \leq k \leq n$, $\int_a^b t^k f(t)dt = 0$. Montrer que f s'annule en au moins $n + 1$ valeurs deux-à-deux distinctes de $[a, b]$.

I.5 Théorème fondamental de l'analyse et méthodes de calcul - Formules de Taylor

Théorème I.11 : Soient I un intervalle, x_0 un point de I et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue sur I . Alors la fonction définie sur I par $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I nulle en x_0 .

Corollaire I.12 : Avec les notations précédentes, pour tous a, b dans I , pour toute primitive F de f sur I , on a

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Remarque I.13 : Si I est un intervalle quelconque, on dit que $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux sur I si elle est continue par morceaux sur tout segment inclus dans I . Dans ce cas, pour tout $x_0 \in I$, la fonction $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)dt$ est définie (et continue) sur I mais elle n'est pas dérivable aux points de discontinuité de f et on ne peut pas parler de primitive ! On notera tout de même que la fonction $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)dt$ est nulle en x_0 et croissante sur I si f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

On exploite la linéarité de l'intégrale pour le calcul de primitive, entre autres, en linéarisant les fonctions trigonométriques et en décomposant en éléments simples les fractions rationnelles. Les formules de dérivation des produits et des composées donnent lieu aux deux autres méthodes de calcul de primitives :

Proposition I.14 (Intégration par parties) : Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Alors on a

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

Exercice I.15 : Soient $n \geq 0$ un entier et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$.

1) Montrer la formule de Taylor avec reste intégral, encore valable en échangeant a et b :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

2) En déduire l'inégalité de Taylor-Lagrange, encore valable en échangeant a et b :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty, [a, b]}.$$

3) **Application.** Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^k}{k!}$ converge et que sa somme est e^z .

Les deux énoncés ci-dessus sont des énoncés globaux. *A contrario*, la formule de Taylor-Young qu'on en déduit (et qui permet de déduire du calcul des polynômes de Taylor les développements limités des fonctions usuelles) est de nature locale :

Corollaire I.16 (Formule de Taylor-Young) : Soient I un intervalle, $t_0 \in I$, $n \geq 0$ un entier et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I . Alors $f(t) \underset{t \rightarrow t_0}{=} \sum_{k=0}^n f^{(k)}(t_0) \frac{(t-t_0)^k}{k!} + o((t-t_0)^n)$.

Proposition I.17 (Changement de variable) : Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ une fonction bijective de classe $\mathcal{C}^1$. Alors $\int_a^b f(t)dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u))\varphi'(u)du$.
On dit qu'on a fait le changement de variable $t = \varphi(u)$ (et on a calculé $dt = \varphi'(u)du$).

Exercice I.18 : 1) Calculer $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt$.

2) Exprimer $\sin(u)$ en fonction de $t = \tan\left(\frac{u}{2}\right)$ (formules de l'arc-moitié) puis calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1+\sin(u)}$.

I.6 Calcul numérique d'intégrale - Sommes de Riemann

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux. Pour toute subdivision $\sigma = \{c_k, 0 \leq k \leq n\}$, pour toute famille $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ avec, pour tout $1 \leq k \leq n$, $x_k \in [c_{k-1}, c_k]$, la somme $\mathcal{R}_f(\sigma, (x_k)) = \sum_{k=1}^n (c_k - c_{k-1}) f(x_k)$ est une somme de Riemann pour f (qu'on peut voir comme l'intégrale d'une fonction en escalier).

Dans le cas d'une fonction continue, la relation de Chasles et le théorème de Heine assurent que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour toute subdivision σ de pas $\delta(\sigma) \leq \alpha$, pour toute famille (x_k) comme ci-dessus,

$$\left| \int_a^b f - \mathcal{R}_f(\sigma, (x_k)) \right| \leq \varepsilon.$$

Plus précisément, si f est M -lipschitzienne (et, si f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, elle est $\|f'\|_{\infty}^{[a,b]}$ -lipschitzienne), on a, pour toute subdivision σ et pour toute famille (x_k) comme ci-dessus, $\left| \int_a^b f - \mathcal{R}_f(\sigma, (x_k)) \right| \leq M \frac{b-a}{2} \delta(\sigma)$.

Dans le cas de la subdivision régulière à n pas, on obtient $\left| \int_a^b f - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \right| \leq M \frac{(b-a)^2}{2n}$.

Exemple I.19 : Pour tout $n \geq 1$, on note $u_n = \left[\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right]^{\frac{1}{n}}$. En calculant $\ln(u_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right)$, on reconnaît une somme de Riemann pour la fonction continue $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \ln(1+x)$ en choisissant la subdivision régulière à n pas et, pour tout $1 \leq k \leq n$, $x_k = \frac{k}{n}$ (on parle de la méthode des rectangles à droite). Ainsi, $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(u_n) = \int_0^1 \ln(1+x) dx = 2 \ln(2) - 1$ et, par continuité de la fonction exponentielle, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{4}{e}$.

Exercice I.20 (Accélération de la convergence) : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$.

Pour tout $n \geq 1$, on note $\sigma_n^{\text{reg}} = \{c_k, 0 \leq k \leq n\}$ la subdivision régulière à n pas de $[a, b]$.

1) Méthode du point milieu.

a) Justifier que, pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$\left| f(x) - \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] \right| \leq \frac{1}{2} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \|f''\|_{\infty}^{[a,b]}.$$

b) En déduire que $\left| \int_a^b f - (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{24} \|f''\|_{\infty}^{[a,b]}.$

c) Conclure que, pour tout $n \geq 1$, $\left| \int_a^b f - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{c_{k-1} + c_k}{2}\right) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \|f''\|_{\infty}^{[a,b]}.$

2) Méthode des trapèzes.

a) Montrer que $\int_a^b \frac{(t-a)(t-b)}{2} f''(t) dt = \int_a^b f(t) dt - (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}.$

b) En déduire que $\left| \int_a^b f - (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \|f''\|_{\infty}^{[a,b]}.$

c) Conclure que, pour tout $n \geq 1$, on a $\left| \int_a^b f - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(c_{k-1}) + f(c_k)}{2} \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \|f''\|_{\infty}^{[a,b]}.$

II Intégrales généralisées (ou impropres)

II.1 Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Dans tout ce paragraphe, a est un réel et $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ est une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$. Pour tout $x \in \mathbb{I}$, le segment $[a, x]$ est inclus dans $[a, +\infty[$ et la restriction $f|_{[a, x]}$ est continue par morceaux. La fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est donc définie sur $[a, +\infty[$. On rappelle que, dans le cas où f est continue sur $[a, +\infty[$, cette fonction est l'unique primitive de f sur $[a, +\infty[$ qui est nulle en a .

II.1.a Intégrales convergentes

Définition II.1 : Soient a un réel et $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$. On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge (ou existe) si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ possède une limite (finie) lorsque x tend vers $+\infty$. On note alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt := \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt$.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge (et elle n'a pas de valeur).

Remarques II.2 : 1) Si $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ est continue sur $[a, +\infty[$ et si $F : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ est une primitive de f sur $[a, +\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si F possède une limite (finie) lorsque x tend vers $+\infty$. On a alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(a)$ et on pourra aussi noter $[F(t)]_a^{+\infty}$ cette limite.

2) La convergence d'une intégrale est une limite de fonction et montrer pour une suite (u_n) qui tend vers $+\infty$ que la suite d'intégrales $\left(\int_a^{u_n} f(t)dt \right)_{n \geq 0}$ possède une limite peut permettre de calculer sa valeur si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ existe mais ne suffit pas pour montrer son existence.

Par exemple, $\int_0^{2n\pi} \cos(t)dt = 0$ pour tout $n \geq 0$ mais $x \mapsto \int_0^x \cos(t)dt = \sin(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$.

Exemples II.3 : 1) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt$ converge (et vaut $\frac{1}{\alpha}$) si et seulement si $\alpha > 0$.

2) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge (et vaut $\frac{1}{\alpha-1}$) si et seulement si $\alpha > 1$.

3) La fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = (-1)^{n-1}$ si $t \in \left[n, n + \frac{1}{n} \right[$ (pour tout $n \geq 1$) et par $f(t) = 0$ sinon est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $x \geq 1$, on a $\left| \int_0^x f(t)dt - \sum_{k=1}^{[x]-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| \leq \frac{1}{[x]}$ donc, par encadrement, l'intégrale $\int_0^{\infty} f(t)dt$ existe et vaut $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$.

Remarque II.4 : Comme pour les séries, la condition $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ ne garantit pas l'existence de $\int_a^{+\infty} f(t)dt$. Par contre, l'exemple précédent assure que la notion de divergence grossière n'est pas pertinente dans ce contexte.

Proposition II.5 : Soient a un réel et $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$. Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si et seulement si, pour tout $c \in [a, +\infty[$, l'intégrale $\int_c^{+\infty} f(t)dt$ converge. On a dans ce cas $\int_a^{+\infty} f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^{+\infty} f(t)dt$ et $\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_c^{+\infty} f(t)dt = 0$.

Remarque II.6 : La signification de cette proposition est que la convergence d'une intégrale impropre sur $[a, +\infty[$ est une question locale au voisinage de $+\infty$. On notera encore la similarité avec les séries !

II.1.b Cas des fonctions positives

Si $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ est continue par morceaux et à valeurs positives sur $[a, +\infty[$, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est croissante sur $[a, +\infty[$, et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ existe si et seulement si cette fonction est majorée.

Proposition II.7 : Soient $f, g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues par morceaux et à valeurs positives sur $[a, +\infty[$. On suppose que $f \leq g$ au voisinage de $+\infty$. On a alors les deux implications :

- 1) Si $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.
- 2) Si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge alors $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ diverge.

Exemples II.8 : 1) Pour tout $t \geq 0$, on a $0 \leq \frac{1}{e^t + 1} \leq e^{-t}$ et $\int_0^\infty e^{-t}dt$ existe donc $\int_0^\infty \frac{dt}{e^t + 1}$ existe.

2) La fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $t \mapsto \frac{3t+1}{t^2+t+1}$ est continue et à valeurs positives sur $\mathbb{R}_+$. En calculant la limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t(3t+1)}{t^2+t+1} = 3 > 1$, on prouve que $\frac{1}{t} \leq \frac{3t+1}{t^2+t+1}$ au voisinage de $+\infty$ et, puisque $\int_1^\infty \frac{dt}{t}$ diverge, $\int_0^\infty \frac{3t+1}{t^2+t+1}dt$ diverge également.

Remarque II.9 : Dans le cas d'une fonction positive, la croissance de la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ sur $[a, +\infty[$ assure que si (u_n) est une suite à valeurs dans $[a, +\infty[$ qui tend vers $+\infty$ et si la suite d'intégrales $\left(\int_a^{u_n} f(t)dt\right)_{n \geq 0}$ converge, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge ! Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(t) = n$ si $t \in \left[n, n + \frac{1}{n^3}\right]$ (pour tout $n \geq 1$) et par $f(t) = 0$ sinon est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $n \geq 1$, $\int_0^{n+1} f(t)dt = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ donc $\int_0^\infty f(t)dt$ existe et vaut $\frac{\pi^2}{6}$.

II.2 Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Dans tout ce paragraphe, I est un intervalle (non-vide et non-réduit à un point) qui n'est pas un segment. En notant $a = \inf(I) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b = \sup(I) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on dit que I est un intervalle de bornes a et b . On peut alors avoir $I =]a, b[$ ou $I = [a, b[$ ou $I =]a, b]$.

II.2.a Cas d'un intervalle de la forme $[a, b[$

On vient d'étudier le cas où $b = +\infty$ et la définition suivante contient la définition II.1.

Définition II.10 : Soient $(a, b) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$ et $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge (ou existe) si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ possède une limite (finie) lorsque x tend vers b . On note alors $\int_a^b f(t)dt := \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t)dt$.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ diverge (et elle n'a pas de valeur).

- Remarques II.11 : 1)** Si b est fini et si $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ est prolongeable en une fonction $\tilde{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ continue (par morceaux) sur $[a, b]$ alors, pour tout $x \in [a, b[$, on a $\int_a^x f(t)dt = \int_a^x \tilde{f}(t)dt$. D'après le chapitre I, $\int_a^x \tilde{f}(t)dt \xrightarrow{x \rightarrow b} \int_a^b \tilde{f}(t)dt$ donc l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ existe. On dit qu'elle est faussement impropre en b .
- 2)** On étend II.2. En particulier, dans le cas d'une fonction $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ continue sur $[a, b[$, la convergence de $\int_a^b f(t)dt$ se ramène à l'existence, pour une primitive F quelconque de f , d'une limite (finie) en b (et on pourra noter $[F(t)]_a^b = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - F(a)$.)
- 3)** On étend II.5 et la convergence de $\int_a^b f(t)dt$ est un problème local au voisinage de b . En particulier, si $\int_a^b f(t)dt$ existe, $\lim_{c \rightarrow b^-} \int_c^b f(t)dt = 0$.
- 4)** On étend II.7 au cas de fonctions $f, g : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}_+$ avec $f \leq g$ au voisinage de b . En particulier, si b est fini et si $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}_+$ est continue par morceaux et majorée sur $[a, b[$, alors $\int_a^b f(t)dt$ existe.

- Exemples II.12 : 1)** La fonction $t \mapsto \frac{\cos(t)}{\pi - 2t}$ est définie et continue sur $[0, -\frac{\pi}{2}[$, et prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{2}$. Par conséquent, l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\pi - 2t} dt$ est faussement impropre en $\frac{\pi}{2}$, et elle existe.
- 2)** L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$, impropre en 1, existe et vaut 2.
Puisque $0 \leq \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ pour tout $t \in [0, 1[$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ existe également.
- 3)** L'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(t)dt$, impropre en $\frac{\pi}{2}$, diverge.
- 4)** La fonction définie sur $[-\frac{\pi}{2}, 0[$ par $t \mapsto 1 + \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ est à valeurs positives et majorée par 2 sur l'intervalle borné $[-\frac{\pi}{2}, 0[$. Par conséquent, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left(1 + \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt$ existe.

II.2.b Cas d'un intervalle de la forme $]a, b]$

Définition II.13 : Soient $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $]a, b]$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge (ou existe) si la fonction $x \mapsto \int_x^b f(t)dt$ possède une limite (finie) lorsque x tend vers a . On note alors $\int_a^b f(t)dt := \lim_{x \rightarrow a} \int_x^b f(t)dt$.
Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ diverge (et elle n'a pas de valeur).

- Remarques II.14 : 1)** Si a est fini et si $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est prolongeable en une fonction $\tilde{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ continue (par morceaux) sur $[a, b]$ alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ existe. On dit qu'elle est faussement impropre en a .
- 2)** On adapte II.2. En particulier, dans le cas d'une fonction $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ continue sur $]a, b]$, la convergence de $\int_a^b f(t)dt$ se ramène à l'existence, pour une primitive F quelconque de f , d'une limite (finie) en a (et on pourra noter $[F(t)]_a^b = F(b) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$.)

- 3) On adapte **II.5** et la convergence de $\int_a^b f(t)dt$ est un problème local au voisinage de a . En particulier, si $\int_a^b f(t)dt$ existe, $\lim_{c \rightarrow a^+} \int_a^c f(t)dt = 0$.
- 4) On adapte **II.7** au cas de fonctions $f, g :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ avec $f \leq g$ au voisinage de a . En particulier, si a est fini et si $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ est continue par morceaux et majorée sur $]a, b]$, alors $\int_a^b f(t)dt$ existe.

Exemples II.15 : 1) L'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt$, faussement impropre en 0, converge.

2) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^0 e^{-\alpha t} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 0$.

3) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

4) L'intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge.

5) Pour tout $t \in]0, 1]$, on a $0 < \frac{1}{\sqrt{t}+t} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ existe donc $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}+t}$ existe.

II.2.c Cas d'un intervalle de la forme $]a, b[$

Proposition-Définition II.16 : Soient $a < b$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $]a, b[$. S'il existe $c_0 \in]a, b[$ telle que les intégrales $\int_a^{c_0} f(t)dt$ et $\int_{c_0}^b f(t)dt$ convergent alors, pour tout $c \in]a, b[$, les intégrales $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent et leur somme $\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$ ne dépend pas de c .

On dit alors que l'intégrale (doublement) impropre $\int_a^b f(t)dt$ converge (ou existe) et sa valeur est la somme précédente. Dans le cas contraire, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ diverge et elle n'a pas de valeur.

Remarques II.17 : 1) Ce dernier cas est le plus général et il contient tous les autres.

Par exemple, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$, si $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux sur $[a, b[$, alors sa restriction $f|_{]a, b[} :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ est prolongeable en une fonction continue par morceaux au voisinage de a (la fonction $f!$) et l'intégrale $\int_a^b f|_{]a, b[}(t)dt$ est faussement impropre en a . Par conséquent, elle converge si et seulement si $\int_a^b f(t)dt$ converge et, dans ce cas, ces intégrales ont évidemment la même valeur !

2) Dans le cas d'une fonction $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue sur $]a, b[$, la convergence de $\int_a^b f(t)dt$ se ramène à l'existence, pour une primitive F quelconque de f , d'une limite (finie) en a et en b (et on pourra noter $[F(t)]_a^b = \lim_{y \rightarrow b} F(y) - \lim_{x \rightarrow a} F(x)$).

Exemples II.18 : 1) La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ est continue et à valeurs positives sur $]0, 1[$.

Pour tout $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$, on a $\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \leq \sqrt{\frac{2}{1-t}}$ donc $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$ existe d'après **II.11.4**.

Pour tout $t \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, on a $\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \leq \sqrt{\frac{2}{t}}$ donc $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$ existe d'après **II.14.4**.

Ainsi, $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$ existe.

- 2) On montre en coupant en 1 que l'intégrale doublement impropre $\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ converge.
- 3) Etudions le cas plus difficile de l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$. La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongeable par continuité en 0 donc l'intégrale est faussement impropre en 0. Pour tout $x \geq 0$, Chasles assure que

$$\int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt + \int_{\lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor \pi}^x \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

Pour tout $k \geq 1$, on a $\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt = (-1)^{k-1} \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t + (k-1)\pi} dt$ et, par croissance de l'intégrale, la série $\sum \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt$ satisfait le critère spécial des séries alternées.

Pour tout $x > 0$, on a par ailleurs $\left| \int_{\lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor \pi}^x \frac{\sin(t)}{t} dt \right| \leq \frac{1}{\lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc l'intégrale de Dirichlet existe.

II.3 Propriétés élémentaires de l'intégrale

Si I est un intervalle de bornes $a < b$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ et si $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur I , on trouve indifféremment dans la littérature les notations

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f = \int_I f(t) dt = \int_I f.$$

On a déjà vu que la relation de Chasles était compatible avec les intégrales généralisées. On montre en outre facilement :

- Linéarité. Soient I un intervalle quelconque et $f, g : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions continues par morceaux sur I telles que $\int_I f$ et $\int_I g$ existent. Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\int_I (\lambda f + g)$ existe et on a $\int_I (\lambda f + g) = \lambda \int_I f + \int_I g$.
- Positivité. Soient I un intervalle quelconque et $f : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue par morceaux et à valeurs positives sur I telle que $\int_I f$ existe. Alors on a $\int_I f \geq 0$.
- Croissance. Soient I un intervalle quelconque et $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux et à valeurs réelles sur I telles que $\int_I f$ et $\int_I g$ existent. Alors, si $f \leq g$ sur I , on a $\int_I f \leq \int_I g$.

L'inégalité triangulaire et l'inégalité de Cauchy-Schwarz sont également valables (*cf infra*). On montre enfin :

Théorème II.19 (de positivité stricte) : Soient I un intervalle quelconque et $f : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue sur I telle que $\int_I f$ existe. Alors $\int_I f = 0$ si et seulement si $f = 0$ sur I .

III Fonctions intégrables

III.1 Définitions - Utilisation des relations de comparaison

Proposition-Définition III.1 : Soient I un intervalle quelconque et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur I . On dit que f est intégrable sur I (ou que l'intégrale $\int_I f$ converge absolument) si $\int_I |f|$ converge.

Dans ce cas, l'intégrale $\int_I f$ converge et on a l'inégalité triangulaire intégrale $\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|$.

Remarques III.2 : 1) L'intégrabilité est une question locale aux bornes $a < b$ de I et on pourra qualifier une fonction $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ d'intégrable en a ou en b .

2) Comme dans le cas des séries, il existe des fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ non-intégrables sur I dont l'intégrale sur I existe pourtant. On parle alors d'intégrale semi-convergente. C'est le cas de l'intégrale de Dirichlet par exemple

$$\text{puisque, pour tout } n \geq 1, \int_0^n \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t + (k-1)\pi} dt \geq \sum_{k=2}^n \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{(k-1)\pi} dt = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{k\pi}.$$

Exemple III.3 : Rappelons le cas des fonctions de référence que sont

- l'exponentielle $t \mapsto e^{-\alpha t}$ (avec $\alpha \in \mathbb{C}$), continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) si et seulement si $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ (resp. si $\operatorname{Re}(\alpha) < 0$);
- les fonctions puissances $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha} = t^{-\alpha}$ (avec $\alpha \in \mathbb{C}$), continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et intégrable en $+\infty$ (resp. en 0^+) si et seulement si $\operatorname{Re}(\alpha) > 1$ (resp. si $\operatorname{Re}(\alpha) < 1$);
- la fonction $t \mapsto \ln(t)$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$, intégrable en 0^+ et non-intégrable en $+\infty$.

Proposition III.4 (Invariance par translation et symétrie) : Soient $a < b$ deux réels et $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $]a, b[$.

On définit $g, h :]0, b-a[\rightarrow \mathbb{K}$ en posant, pour tout $t \in]0, b-a[$, $g(t) = f(t+a)$ et $h(t) = f(b-t)$. Alors :

- 1) f est intégrable en a^+ si et seulement si g est intégrable en 0^+ ;
- 2) f est intégrable en b^- si et seulement si h est intégrable en 0^+ .

Exemple III.5 : Les fonctions de référence donne alors, pour tous réels $a < b$,

- la fonction $t \mapsto \frac{1}{(t-a)^\alpha}$ (avec $\alpha \in \mathbb{C}$) est intégrable en a^+ si et seulement si $\operatorname{Re}(\alpha) < 1$;
- la fonction $t \mapsto \frac{1}{(b-t)^\alpha}$ (avec $\alpha \in \mathbb{C}$) est intégrable en b^- si et seulement si $\operatorname{Re}(\alpha) < 1$;
- la fonction $t \mapsto \ln(t-a)$ est intégrable en a^+ , la fonction $t \mapsto \ln(b-t)$ est intégrable en b^- .

On déduit immédiatement de II.7 (et des remarques II.11.4 et II.14.4) le théorème suivant :

Théorème III.6 (de comparaison) : Soient $a < b$ deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$, et $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions continues par morceaux sur $]a, b[$.

- 1) Si $f = O_a(g)$ et si g est intégrable en a , alors f est intégrable en a ;
Si $f = O_b(g)$ et si g est intégrable en b , alors f est intégrable en b .
- 2) Si $f \sim_a g$, alors f est intégrable en a si et seulement si g l'est;
Si $f \sim_b g$, alors f est intégrable en b si et seulement si g l'est.

Exemples III.7 : 1) Montrons que la fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$: elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a $\frac{\ln(t)}{1+t^2} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \ln(t)$ et $\frac{\ln(t)}{1+t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} O\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$ donc $t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$ est intégrable en 0^+ et en $+\infty$.

2) Montrons que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left[1 - t \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) \right] dt$ existe.

La fonction $t \mapsto 1 - t \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongeable par continuité en 0.

En $+\infty$, on utilise le DL₃(0) de Arctan : on a $\operatorname{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ donc, par composition,

$1 - t \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3t^2}$ et la fonction $t \mapsto 1 - t \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)$ est intégrable en $+\infty$.

3) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) > 0$. Montrons que l'intégrale $\Gamma(z) := \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ existe.

La fonction $t \mapsto t^{z-1} e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a $|t^{z-1} e^{-t}| \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{1-\operatorname{Re}(z)}}$ avec $1 - \operatorname{Re}(z) < 1$ donc $t \mapsto t^{z-1} e^{-t}$ est intégrable en 0^+ .

On a $|t^{z-1} e^{-t}| \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(e^{-\frac{t}{2}}\right)$ par croissances comparées donc $t \mapsto t^{z-1} e^{-t}$ est intégrable en $+\infty$.

4) Soient α, β deux réels avec $\beta > 0$. On étudie l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{t^\alpha}{1+t^\beta}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

III.2 Espaces de fonctions L^1 et de fonctions L^2

Proposition-Définition III.8 : 1) L'ensemble $L^1(I, \mathbb{K})$ des fonctions continues par morceaux et intégrables sur I (on parle de fonctions L^1 sur I) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$.

2) Sur le sous-espace $L_c^1(I, \mathbb{K})$ des fonctions continues de $L^1(I, \mathbb{K})$, l'application $\|\cdot\|_1 : L_c^1(I, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie, pour tout $f \in L_c^1(I, \mathbb{K})$, par $\|f\|_1 = \int_I |f|$ est la norme de la convergence en moyenne.

Remarque III.9 : La notion de norme $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel quelconque sera étudiée en toute généralité à la leçon 9. On se contentera ici de montrer que $\|\cdot\|_1 : L_c^1(I, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait les 3 propriétés :

(i) (*Séparation*) Pour tout $f \in L_c^1(I, \mathbb{K})$, on a $\|f\|_1 = 0$ si et seulement si $f = 0$ sur I ;

(ii) (*Homogénéité*) Pour tout $f \in L_c^1(I, \mathbb{K})$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \|f\|_1$;

(iii) (*Inégalité triangulaire*) Pour tous $f, g \in L_c^1(I, \mathbb{K})$, on a $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$.

On notera aussi que l'application $\|\cdot\|_1$ n'est pas une norme sur $L^1(I, \mathbb{K})$ car l'axiome de séparation fait défaut !

Proposition-Définition III.10 : 1) L'ensemble $L^2(I, \mathbb{K})$ des fonctions continues par morceaux et de carrés intégrables sur I , au sens où $\int_I |f|^2$ converge (on parle de fonctions L^2 sur I) est un sous-espace de $\mathbb{K}^I$.

2) Si f, g sont dans $L^2(I, \mathbb{K})$, leur produit fg est une fonction L^1 sur I et on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left| \int_I fg \right| \leq \sqrt{\int_I |f|^2} \sqrt{\int_I |g|^2}.$$

3) Sur le sous-espace $L_c^2(I, \mathbb{K})$ des fonctions continues de $L^2(I, \mathbb{K})$, l'application $\|\cdot\|_2 : L_c^2(I, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie, pour tout $f \in L_c^2(I, \mathbb{K})$, par $\|f\|_2 = \sqrt{\int_I |f|^2}$ est la norme de la convergence en moyenne quadratique. C'est

la norme euclidienne provenant du produit scalaire défini, pour tous $f, g \in L_c^2(I, \mathbb{K})$, par $(f|g) = \int_I fg$.

IV Méthodes de calcul

IV.1 Intégration par parties

Théorème IV.1 : Soient I un intervalle de bornes $a < b$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $f, g : I \rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

Si fg admet des limites (finies) en a et en b , les intégrales $\int_a^b f'g$ et $\int_a^b fg'$ sont de même nature.

De plus, en notant $[fg]_a^b = \lim_{t \rightarrow b} (fg)(t) - \lim_{t \rightarrow a} (fg)(t)$, on a $\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$.

Exemples IV.2 : 1) Pour tous $p, q \geq 1$, on montre que $\int_0^1 t^p \ln^q(t) dt$ existe et vaut $\frac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}$.

2) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) > 1$. Les fonctions $t \mapsto t^z$ et $t \mapsto e^{-t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a $[t^z e^{-t}]_0^{+\infty} = 0$. Par conséquent, avec les notations de **III.7.3**, on a

$$z\Gamma(z) = z \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = [t^z e^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt = \Gamma(z+1).$$

On notera que $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$ et qu'on en déduit par récurrence que $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \geq 1$.

3) Revenons au cas de l'intégrale de Dirichlet : puisque $t \mapsto 1 - \cos(t)$ est une primitive de $t \mapsto \sin(t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et puisque $t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t}$ possède des limites nulles en 0 et en $+\infty$, les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ sont de même nature. La seconde est faussement impropre en 0 et intégrable en $+\infty$ puisque $\frac{1 - \cos(t)}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Ainsi, une intégration par parties (avec un choix judicieux de primitive) prouve l'existence de l'intégrale (semi-convergente) de Dirichlet et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$.

IV.2 Changement de variable

Théorème IV.3 : Soient $\alpha < \beta$ et $a < b$ des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$, $\varphi :]\alpha, \beta[\xrightarrow{\sim}]a, b[$ une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] \alpha, \beta [$ et $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue sur $]a, b[$. Alors les intégrales $\int_\alpha^\beta \varphi'(u)(f \circ \varphi)(u) du$ et $\int_a^b f(t) dt$ sont de même nature. Dans le cas où elles convergent, on a $\int_\alpha^\beta \varphi'(u)(f \circ \varphi)(u) du = \int_a^b f(t) dt$.

Remarques IV.4 : 1) Ce théorème est vrai pour des intégrales sur des intervalles de type quelconque et "contient" les autres cas : c'est une adaptation de la remarque **II.17.1**

2) Si $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ est strictement décroissante, le théorème est encore vrai mais, dans le cas où les intégrales convergent, on a cette fois $\int_\alpha^\beta \varphi'(u)(f \circ \varphi)(u) du = - \int_a^b f(t) dt$.

Exemples IV.5 : 1) Puisque la fonction $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par $u \mapsto \sqrt{u}$ est bijective, strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et puisque la fonction $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{2\sqrt{u}} du$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ sont de même nature (donc elles convergent). On calcule sa valeur $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ en exercice.

2) (*Relire I.18.2*) L'intégrale $\int_0^\pi \frac{du}{1 + \sin(u)}$ est celle d'une fonction continue sur un segment. La fonction $[0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par $u \mapsto \tan\left(\frac{u}{2}\right)$ est bijective, strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi[$. Avec le changement de variable $t = \tan\left(\frac{u}{2}\right)$, on trouve $\int_0^\pi \frac{du}{1 + \sin(u)} = \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{(1+t)^2} = 2$.

3) On montre que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt$ existe. On montre alors qu'elle est nulle à l'aide du changement de variable $\mathbb{R}_+^* \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_+^*$ défini par $u \mapsto \frac{1}{u}$.