

Feuille d'exercices 3 : Intégration sur un intervalle quelconque

Intégration sur un segment - Sommes de Riemann

Exercice 1 : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. On suppose que $\left| \int_a^b f \right| = \int_a^b |f|$.

Montrer que f garde un signe constant sur $[a, b]$.

Exercice 2 : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue vérifiant $f(a + b - x) = f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

a) Interpréter géométriquement cette propriété et montrer que $\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$.

b) **Application :** Calculer $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ et $\int_0^\pi \frac{x dx}{1 + \sin x}$.

Exercice 3 : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue sur $[a, b]$.

a) Montrer qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = \|f\|_\infty$.

b) Soit $0 < \varepsilon < 1$ un réel. Montrer qu'il existe un réel $0 < \alpha < (b - a)$ tel que, pour tout $x \in [a, b]$, $|x - x_0| \leq \alpha$ implique $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon \|f\|_\infty$.

c) En déduire que, pour tout $n \geq 0$, on a $\alpha [(1 - \varepsilon) \|f\|_\infty]^n \leq \int_a^b (f(t))^n dt \leq (b - a) \|f\|_\infty^n$.

d) Conclure que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b (f(t))^n dt \right)^{\frac{1}{n}} = \|f\|_\infty$.

Exercice 4 : a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x - \sin x| \leq \left| \frac{x^2}{2} \right|$.

b) En déduire que pour tout $n \geq 1$, $\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \sin \left(\frac{k}{n} \right) - \sum_{k=1}^n \sin \left(\frac{k}{n} \right) \sin \left(\frac{k}{n^2} \right) \right| \leq \frac{1}{2n}$.

c) Conclure que $\sum_{k=1}^n \sin \left(\frac{k}{n} \right) \sin \left(\frac{k}{n^2} \right)$ converge et calculer la valeur de sa limite.

Exercice 5 : Soient $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions avec f continue sur $[0, 1]$ et g lipschitzienne sur $[0, 1]$.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \left(\frac{k}{n} \right) g \left(\frac{k+1}{n} \right) = \int_0^1 f g$.

Exercice 6 (Inégalité de Jensen) : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et convexe sur $\mathbb{R}$. Avec des sommes de Riemann, montrer que $g \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f \right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b g \circ f$.

Exercice 7 (Lemme de Riemann-Lebesgue) : a) Soient $c < d$ deux réels. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^d e^{int} dt = 0$.

b) Soit $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction en escalier sur $[a, b]$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(t) e^{int} dt = 0$.

c) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) e^{int} dt = 0$.

Remarque. On en déduit, dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \cos(nt) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt = 0$.

Intégrales fonctions des bornes - Calcul de primitives

Exercice 8 : Calculer les primitives des fonctions suivantes (en précisant l'intervalle de définition) :

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & t \mapsto \frac{\ln(t)}{(t+2)^2}; & \text{b)} & t \mapsto (t^2+1)e^{-t}\sin(t); & \text{c)} & t \mapsto \frac{1}{t(1+\ln^2(t))}; \\ \text{d)} & t \mapsto \frac{1}{t+\sqrt{t}}; & \text{e)} & t \mapsto \frac{2t+3}{t^2+9}; & \text{f)} & t \mapsto \frac{1}{t^3+1}; \\ \text{g)} & t \mapsto \frac{\sin(t)}{\cos(3t)}; & \text{h)} & t \mapsto \sqrt{e^t-1}; & \text{i)} & t \ln(1+\sqrt{t}). \end{array}$$

Exercice 9 : Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt$.

1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, à l'aide des formules d'addition, calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$ et donner l'ensemble de ses solutions.

Exercice 10 : Montrer que $t \mapsto \frac{1}{\text{Arctan}(t)} - \frac{1}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 et en déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{dt}{\text{Arctan}(t)}$.

Exercice 11 : Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, on pose $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$.

1) Justifier que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore $f : \mathbb{R}_+ \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ce prolongement.

2) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$. Préciser son signe et son sens de variation sur chacun des deux intervalles de son domaine de définition.

3) a) Montrer que $t \mapsto \frac{1}{t-1} - \frac{1}{\ln(t)}$ est prolongeable par continuité en 1 et en déduire un $\text{DL}_1(1)$ de f .

b) Conclure que f est prolongeable par continuité en 1, et que ce prolongement $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Que dire de l'intégrale $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt$?

4) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Convergence et calcul d'intégrales impropres.

Exercice 12 : Justifier la convergence puis calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \int_1^\infty \ln\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) dt; & \text{b)} & \int_1^\infty \frac{dt}{t(t+1)}; & \text{c)} & \int_0^\infty e^{-2t} \sin(t) dt; \\ \text{d)} & \int_0^\infty \frac{dt}{t^2+t+1}; & \text{e)} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\tan(t)) dt; & \text{f)} & \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t-1}} dt. \end{array}$$

Exercice 13 : Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Discuter la nature de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{dt}{t^\alpha (\ln(t))^\beta}$.

Exercice 14 : Déterminer les réels $\alpha > 0$ tels que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\ln(t+\sqrt{t}) - \ln(t)}{t^\alpha} dt$ existe.

Exercice 15 : Soient $0 < a < b$ des réels. Montrer que $\int_0^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$ existe et calculer sa valeur.

Exercice 16 : 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$.

2) Justifier que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin^3(t)}{t^2} dt$ existe et calculer sa valeur (on pourra linéariser $\sin^3(t)$).

Exercice 17 : On note $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(0) = 1$ et $f(t) = 1 - t \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{t} \right)$ pour tout $t > 0$.
 En intégrant par partie, montrer que, pour tout $x > 0$, on a $\int_0^x f(t)dt = \frac{x^2}{2} \left[\frac{1}{x} - \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{x} \right) \right] + \operatorname{Arctan}(x)$ et en déduire que $\int_0^\infty \left(1 - t \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{t} \right) \right) dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 18 : 1) Montrer que les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))dt$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))dt$ existent et que $I = J$.
 2) En considérant $I + J$, calculer la valeur de I .

Exercice 19 (Intégrale de Dirichlet) : On a montré que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt$ existait. On calcule sa valeur.

1) Pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on pose $f(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)}$.

Montrer que f est prolongeable en une fonction $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

2) Soit $n \geq 1$ un entier.

a) Justifier que les fonctions $t \mapsto \frac{\sin(nt)}{t}$ et $t \mapsto \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}$ sont continues sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et prolongeables en 0.

b) On pose $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{t} dt$ et $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} dt$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} (J_n - K_n) = 0$.

3) Montrer que, pour tout $p \geq 1$, $K_{2p-1} = K_{2p+1}$ et conclure quant à la valeur de l'intégrale de Dirichlet.

Exercice 20 (Intégrale de Gauss) : On a montré que l'intégrale $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$ existait. On calcule sa valeur.

1) a) Montrer que, pour tout $t \in]-1, +\infty[$, $1 - t \leq e^{-t} \leq \frac{1}{1+t}$.

b) En déduire que, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $t \in [0, 1]$, $(1 - t^2)^n \leq e^{-nt^2} \leq \left(\frac{1}{1+t^2} \right)^n$.

c) Conclure que $\int_0^1 (1 - t^2)^n dt \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^n}$.

2) On utilise les intégrales de Wallis sous la forme $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$.

a) En faisant un changement de variable, montrer que, pour tout $n \geq 1$, $\int_0^1 (1 - t^2)^n dt = W_{2n+1}$.

b) En faisant un changement de variable, montrer que, pour tout $n \geq 1$, $\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^n} \leq W_{2n-2}$.

3) Conclure quant à la valeur de l'intégrale de Gauss.

Exercice 21 (Problème de Bâle) : Pour tout $n \geq 0$, on pose $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t) dt$.

On utilisera les intégrales de Wallis W_n définies, pour tout $n \geq 0$, comme dans l'exercice précédent.

1) Soit $n \geq 1$.

a) En intégrant deux fois par parties, montrer que $J_{n-1} - J_n = \frac{W_{2n}}{n(2n-1)} + \frac{J_n}{2n-1}$.

b) En déduire que $\frac{1}{n^2} = 2 \left[\frac{J_n}{W_{2n}} - \frac{J_{n-1}}{W_{2n-2}} \right]$.

2) En utilisant la concavité de $\sin$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, montrer que, pour tout $n \geq 1$, $0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2}{4} (W_{2n} - W_{2n+2})$.

3) En déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J_n}{W_{2n}} = 0$ et conclure quant à la valeur de $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$.

Autres exercices

Exercice 22 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} f(t) dt$.

Exercice 23 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ telle que f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Exercice 24 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\int_0^\infty f(t) dt$ existe.

1) (Théorème de Cesaro) Soit $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = \ell$.

Montrer que $\frac{1}{x} \int_0^x F(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$.

2) Montrer que $\frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et que $\frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

3) En déduire que $\int_0^\infty \left(\frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t) dt \right) dx$ existe et vaut $\int_0^\infty f(t) dt$.

Exercice 25 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. En commençant par étudier $t \mapsto t - \frac{1}{t}$, montrer que $t \mapsto f\left(t - \frac{1}{t}\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$, puis que $\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}_-} f\left(t - \frac{1}{t}\right) dt + \int_{\mathbb{R}_+} f\left(t - \frac{1}{t}\right) dt$.

Application : Calculer $\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)\right) dt := \int_{\mathbb{R}_-} \exp\left(-\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)\right) dt + \int_{\mathbb{R}_+} \exp\left(-\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right)\right) dt$.

Exercice 26 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f et f'' sont de carré intégrables sur $\mathbb{R}$.

1) a) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, on a $(ff')(x) = (ff')(0) + \int_0^x f'^2(t) dt + \int_0^x (ff'')(t) dt$.

b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ff')(x)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$.

c) Conclure que $\lim_{+\infty} (ff')(x) = 0$ (on utilisera le fait que f est de carré intégrable.)

2) Adapter sur $\mathbb{R}_-$ et conclure que f' est de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $\int_{\mathbb{R}} f'^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right) \left(\int_{\mathbb{R}} f''^2\right)$.