

Corrigé du DS1 (4 heures - 19/09/2026)

Problème. Dans ce problème, on se propose de montrer qu'en notant $\zeta(2n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}}$ pour tout $n \geq 1$, on a

$$(2n+1)\zeta(2n) = 2 \sum_{k=1}^{n-1} \zeta(2k)\zeta(2n-2k) \quad \text{pour tout } n \geq 2.$$

Dans la partie **I**, on étudie quelques propriétés des séries doubles, qu'on utilisera dans les parties **II** et **III** indépendantes entre elles. Dans la partie **II**, assez technique, on montre qu'une fonction définie comme la somme d'une série satisfait une équation différentielle. Dans la partie **III**, on donne une seconde expression de cette fonction et on calcule des développements limités pour montrer le résultat évoqué ci-dessus.

Partie I - Convergence et somme de séries doubles

Dans toute cette partie, on se donne une suite double $(u_{ij})_{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

(i) pour tout $j \geq 1$, la série $\sum_{i \geq 1} u_{ij}$ converge absolument ;

(ii) la série $\sum_{j \geq 1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |u_{ij}| \right)$ converge.

1) Pour tout $j \geq 1$, l'inégalité triangulaire assure que $\left| \sum_{i=1}^{\infty} u_{ij} \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |u_{ij}|$. D'après (ii), la série $\sum_{j \geq 1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |u_{ij}| \right)$ converge donc, par majoration, la série $\sum_{j \geq 1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} u_{ij} \right)$ converge absolument. Sa somme est $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} u_{ij}$.

2) a) Soit $i \geq 1$.

D'après (i), pour tout $j \geq 1$, la série $\sum_{k \geq 1} u_{kj}$ converge absolument et on peut écrire que $|u_{ij}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |u_{kj}|$.

D'après (ii), la série $\sum_{j \geq 1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |u_{kj}| \right)$ converge. Par majoration, la série $\sum_{j \geq 1} |u_{ij}|$ converge également, i.e., la série $\sum_{j \geq 1} u_{ij}$ converge absolument.

b) Soit $m \geq 1$. Par linéarité de la somme des séries convergentes, on a $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\infty} |u_{ij}| = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\infty} |u_{ij}|$.

Pour tout $j \geq 1$, l'hypothèse (i) permet d'écrire que $\sum_{i=1}^m |u_{ij}| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |u_{ij}|$. L'hypothèse (ii) permet d'écrire,

par majoration, que $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\infty} |u_{ij}| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |u_{ij}|$. Ainsi, la série (à termes positifs) $\sum_{i \geq 1} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |u_{ij}| \right)$ converge.

Ainsi, les hypothèses (i) et (ii) sont satisfaites en échangeant les rôles de i et j , et $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} u_{ij}$ est donc bien définie.

3) Soit $n \geq 1$ un entier.

a) Soit $m \geq 1$. Par linéarité de la formation des restes des séries convergentes, on a

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=n+1}^{\infty} |u_{ij}| = \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{i=1}^m |u_{ij}|.$$

Pour tout $j \geq n+1$, (i) permet d'écrire que $\sum_{i=1}^m |u_{ij}| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |u_{ij}|$ donc, avec (ii), on peut également écrire que

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=n+1}^{\infty} |u_{ij}| = \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{i=1}^m |u_{ij}| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |u_{ij}|.$$

Par majoration, la série (à termes positifs) $\sum_{i \geq 1} \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} |u_{ij}| \right)$ converge et $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} |u_{ij}| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |u_{ij}|$.

b) Par linéarité de la somme des séries convergentes, on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} u_{ij} - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{\infty} u_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} u_{ij} - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^n u_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} u_{ij}.$$

Par inégalité triangulaire et avec la question précédente, il vient donc

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} u_{ij} - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{\infty} u_{ij} \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} |u_{ij}| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |u_{ij}|.$$

Puisque la série $\sum_{j \geq 1} \sum_{i=1}^{\infty} |u_{ij}|$ converge d'après (ii), on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |u_{ij}| = 0$ et, par encadrement, on conclut que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} u_{ij} := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{\infty} u_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} u_{ij}.$$

4) a) D'après (i), pour tout $j \geq 1$, on peut écrire que $|u_{jj}| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |u_{ij}|$ et $\left| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\infty} u_{ij} \right| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\infty} |u_{ij}| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |u_{ij}|$.

D'après (ii), $\sum_{j \geq 1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |u_{ij}| \right)$ converge donc les séries $\sum_{j \geq 1} u_{jj}$ et $\sum_{j \geq 1} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\infty} u_{ij} \right)$ sont absolument convergentes par majoration (puisque les indices sont muets, c'est aussi le cas de $\sum_{k \geq 1} u_{kk}$!).

D'après **2.a**, pour tout $i \geq 1$, on peut écrire que $\left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} u_{ij} \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} |u_{ij}| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |u_{ij}|$.

D'après **2.b**, $\sum_{i \geq 1} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |u_{ij}| \right)$ converge donc $\sum_{j \geq 1} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\infty} u_{ij} \right)$ est absolument convergente par majoration.

b) Il est bien clair que, pour tout $j \geq 1$, on a $\sum_{i=1}^{\infty} u_{ij} = u_{jj} + \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\infty} u_{ij} \right)$. En sommant sur j , on obtient, comme les indices sont muets,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} u_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} u_{jj} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\infty} u_{ij} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{kk} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\infty} u_{ij} \right).$$

On peut pareillement écrire que $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} u_{ij} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{kk} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} u_{ij} \right)$ et l'égalité de la question 3.b

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} u_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} u_{ij} \right) \text{ assure que } \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} u_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\infty} u_{ij} \right).$$

Partie II - Etude de la fonction Z définie comme somme d'une série

Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $\frac{x}{k^2 - x} \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x}{k^2}$ et on peut poser $Z(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k^2 - x}$.

Le but de cette partie est de montrer que la fonction $Z :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $] -1, 1[$ et satisfait l'équation différentielle $2xZ'(x) - 2Z(x)^2 + Z(x) = 3\zeta(2)x$, où $\zeta(2) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$. On fixe $x \in]-1, 1[$.

5) Soit $h \in]-1, 1[$ non-nul tel que $|x| + |h| < 1$.

a) Puisque $\frac{k^2}{(k^2 - x)^2} \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$, la série $\sum_{k \geq 1} \frac{k^2}{(k^2 - x)^2}$ est absolument convergente.

Par linéarité de la somme des séries convergentes, on a

$$\begin{aligned} \frac{Z(x+h) - Z(x)}{h} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2 - x)^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{h} \left[\frac{x+h}{k^2 - x - h} - \frac{x}{k^2 - x} \right] - \frac{k^2}{(k^2 - x)^2} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2 - x)(k^2 - x - h)} - \frac{k^2}{(k^2 - x)^2} \\ &= h \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2 - x)^2(k^2 - x - h)}. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité triangulaire, en sortant le terme d'indice 1 de la somme et en remarquant que, pour tout $k \geq 2$, $k^2 - x - h > 3$, on obtient bien que

$$\left| \frac{Z(x+h) - Z(x)}{h} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2 - x)^2} \right| \leq |h| \left[\frac{1}{(1-x)^2(1-x-h)} + \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2 - x)^2} \right].$$

b) Il est clair que le majorant trouvé ci-dessus tend vers 0 lorsque h tend vers 0. Par encadrement, on a ainsi

$$\frac{Z(x+h) - Z(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2 - x)^2},$$

donc Z est dérivable en x (quelconque dans $] -1, 1[$) et $Z'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2 - x)^2}$.

6) Dans cette question, on considère la suite double $\left(\frac{x^2}{(i^2 - x)(j^2 - x)} \right)_{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Montrons que cette suite double satisfait les hypothèses (i) et (ii) de la partie I :

(i) Pour tout $j \geq 1$, la série $\sum_{i \geq 1} \frac{x^2}{(i^2 - x)(j^2 - x)} = \frac{x}{j^2 - x} \sum_{i \geq 1} \frac{x}{i^2 - x}$ converge (absolument) vers $\boxed{\frac{xZ(x)}{j^2 - x}}$.

(ii) Pareillement, la série $\sum_{j \geq 1} \left(\sum_{i \geq 1} \frac{x^2}{(i^2 - x)(j^2 - x)} \right) = Z(x) \sum_{j \geq 1} \frac{x}{j^2 - x}$ converge vers $\boxed{Z(x)^2}$.

La question 4 s'applique donc, et les séries $\sum_{k \geq 1} \frac{x^2}{(k^2 - x)^2}$ et $\sum_{j \geq 1} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \frac{x^2}{(i^2 - x)(j^2 - x)} \right)$ sont absolument

convergentes. On a en outre $Z(x)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{(k^2 - x)^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \frac{x^2}{(i^2 - x)(j^2 - x)} \right)$.

Maintenant, pour tout $i \neq j$ dans $\mathbb{N}^*$, on décompose en éléments simples et on obtient

$$\frac{x^2}{(i^2 - x)(j^2 - x)} = \frac{x^2}{i^2 - j^2} \left[\frac{1}{j^2 - x} - \frac{1}{i^2 - x} \right].$$

En remplaçant, il vient $Z(x)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{(k^2 - x)^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \frac{x^2}{i^2 - j^2} \left[\frac{1}{j^2 - x} - \frac{1}{i^2 - x} \right] \right)$.

7) Soit $j \geq 1$ un entier.

a) Soit $n > j$. Pour tout entier $i \neq j$ dans $\mathbb{N}^*$, on a la décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{i^2 - j^2} = \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{i - j} - \frac{1}{i + j} \right].$$

Par découpage de sommes, on calcule

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{1}{i^2 - j^2} = \frac{1}{2j} \left[\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{1}{i - j} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{1}{i + j} \right] = \frac{1}{2j} \left[\sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i - j} + \sum_{i=j+1}^n \frac{1}{i - j} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i + j} + \frac{1}{2j} \right]$$

et on peut conclure que $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{1}{i^2 - j^2} = \frac{1}{2j} \left[-\sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{j - i} + \sum_{i=j+1}^n \frac{1}{i - j} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i + j} \right] + \frac{1}{4j^2}$.

b) Avec des changements d'indices, on obtient donc

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{1}{i^2 - j^2} &= \frac{1}{2j} \left[-\sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i} + \sum_{i=1}^{n-j} \frac{1}{i} - \sum_{i=j+1}^{n+j} \frac{1}{i} \right] + \frac{1}{4j^2} \\ &= \frac{1}{2j} \left[\sum_{i=1}^{n-j} \frac{1}{i} + \frac{1}{j} - \sum_{i=1}^j \frac{1}{i} - \sum_{i=j+1}^{n+j} \frac{1}{i} \right] + \frac{1}{4j^2} \\ &= \frac{1}{2j} \left[\sum_{i=1}^{n-j} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n+j} \frac{1}{i} \right] + \frac{3}{4j^2} \end{aligned}$$

Le développement asymptotique $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$ des sommes partielles de la série harmonique,

où γ est la constante d'Euler-Mascheroni, permet d'en déduire que $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \frac{1}{i^2 - j^2} = \frac{3}{4j^2}$ en écrivant que

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{1}{i^2 - j^2} = \frac{1}{2j} \left[\sum_{i=1}^{n-j} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n+j} \frac{1}{i} \right] + \frac{3}{4j^2} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{2j} \ln \left(\frac{n-j}{n+j} \right) + \frac{3}{4j^2} + o(1).$$

8) On a donc $\left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \frac{1}{i^2 - j^2} \right) \frac{x^2}{j^2 - x} = \frac{3x^2}{4j^2(j^2 - x)} \underset{j \rightarrow \infty}{\sim} \frac{3x^2}{4j^4}$ et la série $\sum_{j \geq 1} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \frac{x^2}{i^2 - j^2} \right) \frac{1}{j^2 - x}$ converge absolument. En décomposant à nouveau en éléments simples, il vient

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \frac{1}{i^2 - j^2} \right) \frac{x^2}{j^2 - x} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{3x^2}{4j^2(j^2 - x)} = \frac{3x}{4} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{1}{j^2 - x} - \frac{1}{j^2} \right] = \frac{3}{4} (Z(x) - \zeta(2)x).$$

9) Dans cette question, on note $u_{ij} = \frac{x^2}{(j^2 - i^2)(i^2 - x)}$ pour tout $i \neq j$ dans $\mathbb{N}^*$ et $u_{ii} = 0$ pour tout $i \geq 1$.

a) Soit $i \geq 1$. On a $u_{ij} \underset{j \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{j^2}\right)$ donc la série $\sum_{j \geq 1} u_{ij}$ est absolument convergente. Pour tout $n > i$, en découpant la somme pour calculer la valeur absolue puis en décomposant deux fois en éléments simples, on calcule, comme dans 7,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{|j^2 - i^2|} &= \frac{1}{2i} \left[\sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{1}{i-j} + \frac{1}{i+j} \right) + \sum_{j=i+1}^n \left(\frac{1}{j-i} - \frac{1}{j+i} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2i} \left[\sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{j} + \sum_{j=i+1}^{2i-1} \frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{n-i} \frac{1}{j} - \sum_{j=2i+1}^{n+i} \frac{1}{j} \right] \\ &= \frac{1}{2i} \left[2 \sum_{j=1}^{2i} \frac{1}{j} - \frac{3}{2i} + \sum_{j=1}^{n-i} \frac{1}{j} - \sum_{j=1}^{n+i} \frac{1}{j} \right] \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{2i} \frac{1}{j} - \frac{3}{4i^2} + \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{n-i}{n+i} \right) + o(1) \end{aligned}$$

On en déduit donc que $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} \frac{1}{|j^2 - i^2|} = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{2i} \frac{1}{j} - \frac{3}{4i^2}$ et on conclut en utilisant encore un équivalent des

sommes partielles de la série harmonique que $\sum_{j=1}^{\infty} |u_{ij}| = \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} \frac{1}{|j^2 - i^2|} \right) \frac{x^2}{i^2 - x} \underset{i \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x^2 \ln(i)}{i^3}$.

b) Puisque $\frac{x^2 \ln(i)}{i^3} = o\left(\frac{1}{i^2}\right)$ par croissances comparées, on en déduit que la série $\sum_{i \geq 1} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |u_{ij}| \right)$ converge.

A l'échange près des indices i et j , on a donc prouvé que les hypothèses (i) et (ii) de la partie I étaient satisfaites et on en déduit que la série $\sum_{i \geq 1} u_{ij}$ est absolument convergente, que la série $\sum_{j \geq 1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} u_{ij} \right)$ l'est

également et que $\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} u_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} u_{ij} \right)$. En d'autres termes, on a

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \frac{x^2}{(j^2 - i^2)(i^2 - x)} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} \frac{1}{j^2 - i^2} \right) \frac{x^2}{i^2 - x}.$$

En échangeant les indices (muets) dans la seconde expression, il vient, avec la question 8,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \frac{x^2}{(j^2 - i^2)(i^2 - x)} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \frac{1}{i^2 - j^2} \right) \frac{x^2}{j^2 - x} = \frac{3}{4}(Z(x) - \zeta(2)x).$$

10) Avec ce qui précède, on a finalement $Z(x)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{(k^2 - x)^2} + \frac{3}{2}(Z(x) - \zeta(2)x)$. En rappelant l'expression (prouvée à la question 5.b) $Z'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2 - x)^2}$, on en déduit que

$$\begin{aligned} 2xZ'(x) - 2Z(x)^2 + Z(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2xk^2 - 2x^2}{(k^2 - x)^2} \right] - 2Z(x) + 3\zeta(2)x \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{k^2 - x} - 2Z(x) + 3\zeta(2)x = 3\zeta(2)x, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Partie III - Une autre expression de la fonction Z et calculs de développements limités

Pour tout entier $n \geq 1$, la série de Riemann $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{2n}}$ converge (absolument) et on note $\zeta(2n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}}$.

On fixe encore $x \in]-1, 1[$.

11) a) Soit $n \geq 1$. Pour tout $k \geq 1$, on a $\frac{1}{k^{2n+2}} \leq \frac{1}{k^{2n}}$ donc, en sommant, on a $\zeta(2n+2) \leq \zeta(2n)$ et la suite $(\zeta(2n))$ est bien décroissante.

b) Pour tout $n \geq 1$, on a $1 \leq 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k^n)^2}$. On a l'inclusion $\{k^n, k \geq 2\} \subset \llbracket 2^n, +\infty \rrbracket$ de

sous-ensembles de $\mathbb{N}^*$ et on en déduit que $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} \leq \sum_{i=2^n}^{\infty} \frac{1}{i^2}$. Ainsi, on a bien $1 \leq \zeta(2n) \leq 1 + \sum_{i=2^n}^{\infty} \frac{1}{i^2}$.

Puisque $\sum_{i \geq 1} \frac{1}{i^2}$ converge, la suite de ses reste tend vers 0 et, par encadrement, $\zeta(2n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

12) Par définition, on a $\sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^n}{k^{2n}}$. Vérifions les hypothèses de la partie I pour appliquer le théorème de Fubini :

(i) Pour tout $n \geq 1$, la série $\sum_{k \geq 1} \frac{x^n}{k^{2n}} = x^n \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{2n}}$ est absolument convergente d'après Riemann.

(ii) Pour tout $n \geq 1$, on a $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{x^n}{k^{2n}} \right| = \zeta(2n)|x|^n$. Le rapport $\frac{\zeta(2n+2)|x|^{n+1}}{\zeta(2n)|x|^n} = \frac{\zeta(2n+2)}{\zeta(2n)}|x|$ tend vers

$|x| < 1$ d'après la question précédente donc, d'après le critère de d'Alembert, $\sum_{n \geq 1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{x^n}{k^{2n}} \right| \right)$ converge.

Par conséquent, d'après la question 3, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n)x^n = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{k^{2n}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{x}{k^2}}{1 - \frac{x}{k^2}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k^2 - x} = Z(x).$$

13) Soit $h \neq 0$ tel que $|h| \leq \frac{1-|x|}{2}$. On a donc $|x| + |h| \leq \frac{1+|x|}{2}$

a) On applique encore le critère de d'Alembert : le rapport $\frac{(n+1)\zeta(2n+2)|x|^n}{n\zeta(2n)|x|^{n-1}} = \frac{n+1}{n} \frac{\zeta(2n+2)}{\zeta(2n)} |x|$ tend vers $|x| < 1$ lorsque n tend vers l'infini donc la série $\sum_{n \geq 1} n\zeta(2n)x^{n-1}$ converge absolument.

Le rapport $\frac{(n+1)n\zeta(2n+2)\left(\frac{1+|x|}{2}\right)^{n-1}}{n(n-1)\zeta(2n)\left(\frac{1+|x|}{2}\right)^{n-2}} = \frac{n+1}{n-1} \frac{\zeta(2n+2)}{\zeta(2n)} \frac{1+|x|}{2}$ tend vers $\frac{1+|x|}{2} < 1$ lorsque n tend vers l'infini donc la série $\sum_{n \geq 2} n(n-1)\zeta(2n)\left(\frac{1+|x|}{2}\right)^{n-2}$ converge absolument.

b) Par linéarité de la somme des séries convergentes, on a, avec la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} \frac{Z(x+h) - Z(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n\zeta(2n)x^{n-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n) \left[\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - nx^{n-1} \right] \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \zeta(2n) \left(\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-2} \right) \end{aligned}$$

car le terme d'indice $n = 1$ est nul.

c) Pour tous $2 \leq k \leq n$, on a $k(k-1) \geq 2$ donc

$$\left| \binom{n}{k} \right| = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)}{k(k-1)} \frac{(n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!} \leq \frac{n(n-1)}{2} \binom{n-2}{k-2}.$$

Par inégalité triangulaire et avec un décalage d'indice, la formule du binôme donne donc

$$\left| \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-2} \right| \leq \frac{n(n-1)}{2} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} |x|^{n-2-k} |h|^k = \frac{n(n-1)}{2} (|x| + |h|)^{n-2}.$$

Puisque $|x| + |h| \leq \frac{1+|x|}{2}$, on déduit de la question précédente que

$$\left| \frac{Z(x+h) - Z(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n\zeta(2n)x^{n-1} \right| \leq \frac{|h|}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\zeta(2n) \left(\frac{1+|x|}{2} \right)^{n-2}.$$

Il est clair que le terme de droite dans l'inégalité ci-dessus tend vers 0 lorsque h tend vers 0. Par encadrement,

on en déduit que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Z(x+h) - Z(x)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} n\zeta(2n)x^{n-1}$, ce qui prouve que $Z'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\zeta(2n)x^{n-1}$.

14) Soit $d \geq 1$. On note (a_i) la suite définie par $a_0 = d+1$ et $a_i = 1$ pour tout $i \geq 1$.

a) Les séries $\sum a_i |x|^i$ et $\sum |x|^j$ sont les mêmes à l'exception de leur premier terme (ce qui ne change pas leur nature). La seconde est géométrique de raison $|x| < 1$ donc elles convergent et on a immédiatement

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i |x|^i = (d+1) + \frac{|x|}{1-|x|} \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^{\infty} |x|^j = \frac{1}{1-|x|}.$$

b) Pour tout $n \geq 0$, on a $\sum_{i=0}^n a_i |x|^i |x|^{n-i} = (d+1)|x|^n + \sum_{i=1}^n |x|^n = (d+n+1)|x|^n$ et la série $\sum (n+d+1)|x|^n$ converge (absolument) comme produit de Cauchy de séries absolument convergentes. D'après a,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (n+d+1)|x|^n = \left((d+1) + \frac{|x|}{1-|x|} \right) \left(\frac{1}{1-|x|} \right) = \frac{(d+1) - d|x|}{(1-|x|)^2} \leq \frac{d+1}{(1-|x|)^2}.}$$

c) Puisque $(\zeta(2n))$ est décroissante et à valeurs positives, on a, avec un décalage d'indice et d'après la question précédente,

$$\left| \sum_{n=d+1}^{\infty} n\zeta(2n)x^{n-1} \right| \leq \sum_{n=d+1}^{\infty} n\zeta(2n)|x|^{n-1} \leq \zeta(2d+2)|x|^d \sum_{n=0}^{\infty} (n+d+1)|x|^n \leq \frac{(d+1)\zeta(2d+2)|x|^d}{(1-|x|)^2}.$$

Puisque $Z'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\zeta(2n)x^{n-1}$, on a donc

$$\left| Z'(x) - \sum_{n=1}^d n\zeta(2n)x^{n-1} \right| = \left| \sum_{n=d+1}^{\infty} n\zeta(2n)x^{n-1} \right| \leq \frac{(d+1)\zeta(2d+2)|x|^d}{(1-|x|)^2}.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(d+1)\zeta(2d+2)|x|}{(1-|x|)^2} = 0$, on peut conclure que $Z'(x) = \sum_{n=1}^d n\zeta(2n)x^{n-1} + o(x^{d-1})$.

15) Puisque le calcul de développement limité est compatible avec la primitivation, on a donc aussi, pour tout $d \geq 1$,

$$Z(x) = \sum_{n=1}^d \zeta(2n)x^n + o(x^d).$$

En posant $\zeta(0) = 0$, on a donc

$$Z(x)^2 = \left(\sum_{n=0}^d \zeta(2n)x^n \right)^2 + o(x^d) = \sum_{n=0}^d \left(\sum_{k=0}^n \zeta(2k)\zeta(2n-2k) \right) x^n + o(x^d)$$

$$\text{et } 2xZ'(x) - 2Z(x)^2 + Z(x) = \sum_{n=1}^d \left((2n+1)\zeta(2n) - 2 \sum_{k=0}^n \zeta(2k)\zeta(2n-2k) \right) x^n + o(x^d).$$

Puisque $\zeta(0) = 0$, on a $\sum_{k=0}^1 \zeta(2k)\zeta(2n-2k) = 0$ et le terme d'indice $n = 1$ est $3\zeta(2)x$. L'équation différentielle

de la partie **II** assure que $\sum_{n=2}^d \left((2n+1)\zeta(2n) - 2 \sum_{k=0}^n \zeta(2k)\zeta(2n-2k) \right) x^n + o(x^d) = 0$ et on conclut par unicité de la partie régulière d'un développement limité que, pour tout $n \geq 2$ (car d est quelconque !),

$$(2n+1)\zeta(2n) = 2 \sum_{k=0}^n \zeta(2k)\zeta(2n-2k) = 2 \sum_{k=1}^{n-1} \zeta(2k)\zeta(2n-2k).$$

Puisque $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, on calcule $\boxed{\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}}$ et $\boxed{\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}}$.