

DS1 (4 heures - 19/09/2026)

Si, au cours de l'épreuve, un étudiant repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Problème. Dans ce problème, on se propose de montrer qu'en notant $\zeta(2n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}}$ pour tout $n \geq 1$, on a

$$(2n+1)\zeta(2n) = 2 \sum_{k=1}^{n-1} \zeta(2k)\zeta(2n-2k) \quad \text{pour tout } n \geq 2.$$

Dans la partie **I**, on étudie quelques propriétés des séries doubles, qu'on utilisera dans les parties **II** et **III**. Dans la partie **II**, assez technique, on montre qu'une fonction définie comme la somme d'une série satisfait une équation différentielle. Dans la partie **III**, largement indépendante de la précédente, on donne une seconde expression de cette fonction et on calcule des développements limités pour montrer le résultat évoqué ci-dessus.

Partie I - Convergence et somme de séries doubles

Dans toute cette partie, on se donne une suite double $(u_{ij})_{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

- (i) pour tout $j \geq 1$, la série $\sum_{i \geq 1} u_{ij}$ converge absolument ;
 - (ii) la série $\sum_{j \geq 1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |u_{ij}| \right)$ converge.
- 1) Justifier que la série $\sum_{j \geq 1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} u_{ij} \right)$ converge absolument. Ainsi, $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} u_{ij}$ est bien définie.
- 2) a) Soit $i \geq 1$. Justifier que, pour tout $j \geq 1$, $|u_{ij}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |u_{kj}|$ et en déduire que $\sum_{j \geq 1} u_{ij}$ converge absolument.
- b) Justifier que, pour tout $m \geq 1$, $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\infty} |u_{ij}| = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^m |u_{ij}|$ et en déduire que $\sum_{i \geq 1} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |u_{ij}| \right)$ converge.
- Ainsi, les hypothèses (i) et (ii) sont satisfaites en échangeant les rôles de i et j , et $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} u_{ij}$ est donc bien définie.

3) Soit $n \geq 1$ un entier.

- a) Justifier que, pour tout $m \geq 1$, $\sum_{i=1}^m \sum_{j=n+1}^{\infty} |u_{ij}| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{i=1}^m |u_{ij}|$ puis que $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} |u_{ij}| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |u_{ij}|$.
 - b) En déduire que $\left| \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} u_{ij} - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{\infty} u_{ij} \right| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |u_{ij}|$ et conclure que $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} u_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} u_{ij}$.
- 4) a) Montrer que les séries $\sum_{k \geq 1} u_{kk}$, $\sum_{j \geq 1} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\infty} u_{ij} \right)$ et $\sum_{i \geq 1} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} u_{ij} \right)$ convergent absolument.
- b) Montrer que $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} u_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} u_{kk} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\infty} u_{ij} \right)$ et en déduire que $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\infty} u_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\infty} u_{ij} \right)$.

Partie II - Etude de la fonction Z définie comme somme d'une série

Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $\frac{x}{k^2 - x} \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x}{k^2}$ et on peut poser $Z(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k^2 - x}$.

Le but de cette partie est de montrer que la fonction $Z :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $] -1, 1[$ et satisfait l'équation différentielle $2xZ'(x) - 2Z(x)^2 + Z(x) = 3\zeta(2)x$, où $\zeta(2) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$. On fixe $x \in]-1, 1[$.

5) Soit $h \in]-1, 1[$ non-nul tel que $|x| + |h| < 1$.

a) Montrer que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{k^2}{(k^2 - x)^2}$ est absolument convergente et que

$$\left| \frac{Z(x+h) - Z(x)}{h} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2 - x)^2} \right| \leq |h| \left[\frac{1}{(1-x)^2(1-x-h)} + \frac{1}{3} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2 - x)^2} \right].$$

b) En déduire que Z est dérivable sur $] -1, 1[$ et que $Z'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2 - x)^2}$.

6) Dans cette question, on considère la suite double $\left(\frac{x^2}{(i^2 - x)(j^2 - x)} \right)_{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Montrer que cette suite double satisfait les hypothèses (i) et (ii) de la partie I et en déduire que

$$Z(x)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{(k^2 - x)^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \frac{x^2}{i^2 - j^2} \left[\frac{1}{j^2 - x} - \frac{1}{i^2 - x} \right] \right).$$

7) Soient $1 \leq j < n$ deux entiers.

a) Montrer que $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{1}{i^2 - j^2} = \frac{1}{2j} \left[-\sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{j-i} + \sum_{i=j+1}^n \frac{1}{i-j} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i+j} \right] + \frac{1}{4j^2}$.

b) En déduire que $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \frac{1}{i^2 - j^2} = \frac{1}{2j} \left[\sum_{i=1}^{n-j} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n+j} \frac{1}{i} \right] + \frac{3}{4j^2}$ et conclure que $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \frac{1}{i^2 - j^2} = \frac{3}{4j^2}$.

8) Justifier que $\sum_{j \geq 1} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \frac{1}{i^2 - j^2} \right) \frac{x^2}{j^2 - x}$ converge et montrer que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \frac{1}{i^2 - j^2} \right) \frac{x^2}{j^2 - x} = \frac{3}{4} (Z(x) - \zeta(2)x).$$

9) Dans cette question, on note $u_{ij} = \frac{x^2}{(j^2 - i^2)(i^2 - x)}$ pour tout $i \neq j$ dans $\mathbb{N}^*$ et $u_{ii} = 0$ pour tout $i \geq 1$.

a) Justifier que, pour tout $i \geq 1$, la série $\sum_{j \geq 1} u_{ij}$ est absolument convergente et, en s'inspirant de la question 7,

montrer que $\sum_{j=1}^{\infty} |u_{ij}| \underset{i \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x^2 \ln(i)}{i^3}$.

b) Conclure que $\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \frac{x^2}{(j^2 - i^2)(i^2 - x)} \right)$ existe et vaut $\frac{3}{4} (Z(x) - \zeta(2)x)$.

10) Conclure enfin que $2xZ'(x) - 2Z(x)^2 + Z(x) = 3\zeta(2)x$.

Partie III - Une autre expression de la fonction Z et calculs de développements limités

Pour tout entier $n \geq 1$, la série de Riemann $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{2n}}$ converge (absolument) et on note $\zeta(2n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}}$.

On fixe encore $x \in]-1, 1[$.

11) a) Montrer que la suite $(\zeta(2n))$ est décroissante.

b) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $1 \leq \zeta(2n) \leq 1 + \sum_{i=2^n}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ et en déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta(2n) = 1$.

12) Montrer avec la partie I que $\sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n)x^n = Z(x)$ (on utilisera le critère de d'Alembert pour prouver (ii).)

13) Soit $h \neq 0$ tel que $|h| \leq \frac{1-|x|}{2}$. On a donc $|x| + |h| \leq \frac{1+|x|}{2}$.

a) Montrer que les séries $\sum_{n \geq 1} n\zeta(2n)x^{n-1}$ et $\sum_{n \geq 2} n(n-1)\zeta(2n) \left(\frac{1+|x|}{2}\right)^{n-2}$ convergent absolument.

b) Montrer que $\frac{Z(x+h) - Z(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n\zeta(2n)x^{n-1} = h \sum_{n=2}^{\infty} \zeta(2n) \left(\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-2} \right)$.

c) Justifier que, pour tous $2 \leq k \leq n$, on a $\binom{n}{k} \leq \frac{n(n-1)}{2} \binom{n-2}{k-2}$ et conclure que $Z'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\zeta(2n)x^{n-1}$.

14) Soit $d \geq 1$. On note (a_i) la suite définie par $a_0 = d+1$ et $a_i = 1$ pour tout $i \geq 1$.

a) Justifier que les séries $\sum a_i |x|^i$ et $\sum |x|^j$ convergent et calculer leurs sommes.

b) En déduire que $\sum (n+d+1)|x|^n$ converge et que $\sum_{n=0}^{\infty} (n+d+1)|x|^n \leq \frac{d+1}{(1-|x|)^2}$.

c) Conclure que $\left| \sum_{n=d+1}^{\infty} n\zeta(2n)x^{n-1} \right| \leq \frac{(d+1)\zeta(2d+2)|x|^d}{(1-|x|)^2}$ et en déduire le $DL_{d-1}(0)$ de $x \mapsto Z'(x)$.

15) A l'aide de l'équation différentielle de la question **10**, montrer que, pour tout $n \geq 2$,

$$(2n+1)\zeta(2n) = 2 \sum_{k=1}^{n-1} \zeta(2k)\zeta(2n-2k).$$

(on pourra poser $\zeta(0) = 0$ pour faciliter les calculs).

A titre d'application, rappeler la valeur de $\zeta(2)$ et calculer $\zeta(4)$ et $\zeta(6)$.