

Leçon 4 : Rappels et compléments de calcul algébrique

Table des matières

I	Calcul polynomial	1
I.1	Polynômes et évaluation dans une algèbre	1
I.2	Division euclidienne et dérivation	2
I.3	Racines et multiplicités	3
I.4	Polynômes scindés - Cas des interpolateurs de Lagrange	4
I.5	Théorème fondamental de l'algèbre et irréductibles de $\mathbb{C}[T]$ et de $\mathbb{R}[T]$	4
II	Calcul matriciel	5
II.1	Espaces vectoriels et sous-espaces remarquables de matrices	5
II.2	Produit matriciel - Algèbres de matrices carrées	6
II.3	Calcul matriciel par blocs	7
III	Systèmes linéaires et équations matricielles	8
III.1	Noyau et image d'une matrice - Cas des matrices échelonnées réduites	8
III.2	Equivalence par lignes et algorithme de Gauss-Jordan	10
III.3	Variante de l'algorithme de Gauss-Jordan - Calcul d'inverse	11
III.4	Matrices équivalentes	12
IV	Calcul de déterminant	13
IV.1	Généralités	13
IV.2	Calcul de déterminant par opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes	15
IV.3	Calcul de déterminants par développements suivant les lignes ou les colonnes	16

I Calcul polynomial

I.1 Polynômes et évaluation dans une algèbre

Si $(a_k) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est une suite nulle à partir d'un certain rang, on lui associe le polynôme $P = P(T) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T^k$ et

on identifie l'ensemble $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ nulles à partir d'un certain rang et l'ensemble $\mathbb{K}[T]$ des polynômes en l'indéterminée T à coefficients dans $\mathbb{K}$. Deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs suites de coefficients sont égales. En particulier, l'égalité $P(T) = 0$ signifie que $a_k = 0$ pour tout $k \geq 0$.

Si $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T^k \neq 0$, le degré de P est $\deg(P) = \max\{k \geq 0 \text{ t.q. } a_k \neq 0\}$ et le coefficient dominant de P est $cd(P) = a_{\deg(P)}$ (P est unitaire si $cd(P) = 1$). On convient que $\deg(0) = -\infty$ et $cd(0)$ n'est pas défini.

L'ensemble $\mathbb{K}[T]$ est muni d'une structure d'algèbre : si $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{\infty} b_k T^k$ sont deux éléments de $\mathbb{K}[T]$, si $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit leur combinaison linéaire et leur produit (on reconnaît le produit de Cauchy) en posant

$$\lambda \cdot P + Q = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k + b_k) T^k \quad \text{et} \quad PQ = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \right) T^k.$$

On a $\deg(P + Q) \leq \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$ avec égalité si $\deg(P) \neq \deg(Q)$, et $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.
 Les monômes $T^k = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_{ik} T^i$ (pour tout $k \geq 0$) forment la base canonique de $\mathbb{K}[T]$.

Exercice I.1 : Montrer que le produit des polynômes est associatif et commutatif.

Une $\mathbb{K}$ -algèbre $(\mathcal{A}, +, \times, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'une multiplication (associative, bilinéaire, et possédant un neutre noté $1_{\mathcal{A}}$). Le corps $\mathbb{K}$ lui-même et $\mathbb{K}[T]$ sont évidemment des $\mathbb{K}$ -algèbres mais on a aussi :

- pour tout $n \geq 1$, l'algèbre $(M_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ des matrices carrées de taille n (avec $1_{M_n(\mathbb{K})} = I_n$);
- pour tout $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E , l'algèbre $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$ des endomorphismes de E (avec $1_{\mathcal{L}(E)} = I_E$);
- l'algèbre $(\mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ des fonctions $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ (avec $1_{\mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})} : x \mapsto 1_{\mathbb{K}}$);
- pour tout intervalle I , l'algèbre $(\mathcal{C}^{\infty}(I, \mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ des fonctions $I \rightarrow \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur I ;
- enfin, $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$ -algèbre; $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des $\mathbb{Q}$ -algèbres.

Si α est un élément de $\mathcal{A}$, on peut évaluer en α le polynôme $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T^k \in \mathbb{K}[T]$ en posant $P(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \alpha^k$ (où, en particulier, $\alpha^0 = 1_{\mathcal{A}}$). Il revient alors au même de calculer dans $\mathbb{K}[T]$ avant d'évaluer en α ou de calculer dans $\mathcal{A}$ après avoir évalué en α , et le sous-ensemble $\mathbb{K}[\alpha] \subset \mathcal{A}$ des polynômes en α est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{A}$: pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[T]$, on a

$$(\lambda P + Q)(\alpha) = \lambda P(\alpha) + Q(\alpha) \quad \text{et} \quad (PQ)(\alpha) = P(\alpha)Q(\alpha) = Q(\alpha)P(\alpha) \quad \text{dans } \mathbb{K}[\alpha] \subset \mathcal{A}.$$

Un exemple important est celui où on évalue un polynôme $P \in \mathbb{K}[T]$ en la fonction $I_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$. La fonction obtenue est la fonction polynomiale $P : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ définie, pour tout $t \in \mathbb{K}$, par $t \mapsto P(t)$.

- Exercice I.2 : 1)** Montrer que, pour tout $n \geq 0$, il existe un polynôme T_n à coefficients entiers relatifs tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on ait $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$. Calculer son degré et son coefficient dominant.
- 2)** Montrer que, pour tout $n \geq 0$, il existe un polynôme P_n à coefficients entiers naturels tel que, pour tout $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, $\tan^{(n)}(\theta) = P_n(\tan(\theta))$. Calculer son degré et son coefficient dominant.

I.2 Division euclidienne et dérivation

Proposition-Définition I.3 : Soient A et B deux polynômes.

- 1)** On dit que B divise A (et que A est un multiple de B) s'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[T]$ tel que $A = BQ$.
 Si $A \neq 0$, alors $B \neq 0$ et on a $\deg(B) \leq \deg(A)$.
- 2)** On dit que A et B sont associés si A divise B et B divise A .
 Si $A \neq 0$, c'est le cas si et seulement si B divise A et $\deg(A) = \deg(B)$ si et seulement si $\frac{A}{cd(A)} = \frac{B}{cd(B)}$.
 En particulier, deux polynômes associés unitaires sont égaux.
- 3)** Si $B \neq 0$, il existe un unique couple (Q, R) de polynômes dans $\mathbb{K}[T]$ avec $\deg(R) < \deg(B)$ tel que

$$A = BQ + R.$$

Cette égalité est la division euclidienne (DE) de A par B , Q est son quotient et R est son reste.

Exercice I.4 : 1) Pour tous $n > m \geq 1$, calculer la DE de $T^n - 1$ par $T^m - 1$.

2) Pour tous $\alpha \neq \beta$ dans $\mathbb{K}$, exprimer le reste de la DE de P par $(T - \alpha)(T - \beta)$ à l'aide de $P(\alpha)$ et $P(\beta)$.

On définit (de manière purement algébrique) une dérivation des polynômes en posant, pour tout $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T^k$,

$$P' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k T^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} T^k.$$

Il est immédiat que $P' = 0$ si et seulement si $\deg(P) \leq 0$ (on dit alors que P est constant) et que, dans le cas contraire, on a $\deg(P') = \deg(P) - 1$. La dérivation est une application linéaire surjective $D : \mathbb{K}[T] \rightarrow \mathbb{K}[T]$ qu'on peut itérer (*i.e.*, composer avec elle-même) et, pour tout $k \geq 0$, on note aussi $P^{(k)} = D^k(P)$. En particulier, pour tout $n \geq 0$, $\ker(D^{n+1})$ est le sous-espace

$$\mathbb{K}_n[T] := \left\{ \sum_{k=0}^n a_k T^k, (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \right\}$$

des polynômes dans $\mathbb{K}[T]$ de degré inférieur ou égal à n .

La formule de Leibniz (généralisée) de dérivation (itérée) d'un produit est encore valable dans ce cadre algébrique.

Exercice I.5 : On prouve la formule de Taylor : pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, pour tout P dans $\mathbb{K}[T]$, $P = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$.

- a) Pour $P = T^n$ (avec $n \geq 0$), calculer $P^{(k)}$ pour tout $k \geq 0$ et prouver la formule de Taylor (avec Newton).
- b) Montrer la formule de Taylor dans tous les cas.

I.3 Racines et multiplicités

Soit $P \neq 0$ dans $\mathbb{K}[T]$. On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine de P si $P(\alpha) = 0$, ce qui est le cas si et seulement si $T - \alpha$ divise P . Plus généralement, pour tout $k \geq 1$, on a $P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ si et seulement si $(T - \alpha)^k$ divise P et on montre que

$$\min\{v \in \mathbb{N} \text{ t.q. } P^{(v)}(\alpha) \neq 0\} = \max\{k \in \mathbb{N} \text{ t.q. } (T - \alpha)^k | P\}.$$

On note $v_\alpha(P)$ cet entier. C'est la multiplicité (ou valuation) de α en tant que racine de P et il existe $Q \in \mathbb{K}[T]$ tel que $Q(\alpha) \neq 0$ et $P = (T - \alpha)^{v_\alpha(P)} Q$. On convient enfin que $v_\alpha(0) = +\infty$.

On a $v_\alpha(P) = 0$. On dit que α est racine simple de P si $v_\alpha(P) = 1$, et racine multiple si $v_\alpha(P) \geq 2$.

Exercice I.6 : 1) Soient P, Q deux polynômes dans $\mathbb{K}[T]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

- a) Montrer que $v_\alpha(P + Q) \geq \min\{v_\alpha(P), v_\alpha(Q)\}$ avec égalité si $v_\alpha(P) \neq v_\alpha(Q)$.
 - b) Montrer que $v_\alpha(PQ) = v_\alpha(P) + v_\alpha(Q)$ lorsque P, Q sont non-nuls. Que dire si l'un des deux est nul ?
- 2) Soit $P \neq 0$ dans $\mathbb{K}[T]$.

- a) Montrer que, pour tout $r \geq 1$ et pour tout $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ deux-à-deux distincts, $\prod_{k=1}^r (T - \alpha_k)^{v_{\alpha_k}(P)}$ divise P .

- b) En déduire que $\sum_{k=1}^r v_{\alpha_k}(P) \leq \deg(P)$ puis que l'ensemble $\{\alpha \in \mathbb{K} \text{ t.q. } v_\alpha(P) \geq 1\}$ des racines de P est fini.

Ainsi, $\prod_{\alpha \in \mathbb{K}} (T - \alpha)^{v_\alpha(P)}$ est un produit fini. C'est donc un élément de $\mathbb{K}[T]$, qui divise P , dont le degré $\sum_{\alpha \in \mathbb{K}} v_\alpha(P)$ est un entier inférieur ou égal à $\deg(P)$: P possède au plus $\deg(P)$ racines comptées avec multiplicités.

En particulier, pour tout $n \geq 0$, un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[T]$ qui s'annule en au moins $n + 1$ valeurs est nul.

En outre, si P, Q sont deux polynômes et si les fonctions polynomiales $P, Q : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ coïncident sur une partie infinie quelconque de $\mathbb{K}$, alors $P = Q$ dans $\mathbb{K}[T]$. On pourra donc identifier polynômes et fonctions polynomiales.

I.4 Polynômes scindés - Cas des interpolateurs de Lagrange

On dit que $P \in \mathbb{K}[T]$ non-constant est scindé sur $\mathbb{K}$ lorsque $\sum_{\alpha \in \mathbb{K}} v_{\alpha}(P) = \deg(P)$, i.e., lorsqu'il existe $r \geq 1$,

$\alpha_1, \dots, \alpha_r$ deux-à-deux distincts dans $\mathbb{K}$ et $v_1, \dots, v_r \geq 1$ tels que $P = cd(P) \prod_{k=1}^r (T - \alpha_k)^{v_k}$.

On dit que $P \in \mathbb{K}[T]$ non-constant est scindé à racines simples s'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_{\deg(P)}$ deux-à-deux distincts dans $\mathbb{K}$ tels que $P = cd(P) \prod_{k=1}^{\deg(P)} (T - \alpha_k)$.

Exercice I.7 (Lagrange) : Soient $n \geq 1$ et $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ deux-à-deux distincts dans $\mathbb{K}$.

1) Montrer que, pour tout $0 \leq i \leq n$, il existe un unique polynôme L_i de degré n tel que, pour tout $0 \leq j \leq n$, $L_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$. Expliciter ce polynôme L_i .

2) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{K}_n[T]$, on a $P = \sum_{i=0}^n P(\alpha_i) L_i$. Que valent $\sum_{i=0}^n L_i$ et $\sum_{i=0}^n \alpha_i L_i$?

3) Calculer, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, le reste de la division euclidienne de P par $\prod_{i=0}^n (T - \alpha_i)$.

Exercice I.8 (Relation coefficients-racines) : Montrer que, pour tout $n \geq 1$, pour tout n -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\prod_{k=1}^n (T - \alpha_k) = T^n - \sigma_1 T^{n-1} + \sigma_2 T^{n-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n \quad \text{avec} \quad \sigma_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i, \sigma_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j \text{ et } \sigma_n = \prod_{i=1}^n \alpha_i.$$

I.5 Théorème fondamental de l'algèbre et irréductibles de $\mathbb{C}[T]$ et de $\mathbb{R}[T]$

Le théorème de d'Alembert-Gauss (qui, fondamentalement, est un résultat (difficile) d'analyse) affirme que tout polynôme non-constant à coefficients dans $\mathbb{C}$ possède une racine (on dit que $\mathbb{C}$ est *algébriquement clos*). Par conséquent, tout polynôme non-constant à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est scindé sur $\mathbb{C}$.

Rappelons qu'un complexe z peut s'écrire de manière unique sous forme algébrique $z = a + ib$ (avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$), bien adaptée à l'addition, mais que la multiplication est complexe sous cette forme.

Rappelons aussi que, suivant Euler, tout complexe z de module 1 s'écrit sous la forme $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$ uniquement défini modulo 2π , et que la notation exponentielle se justifie par la coïncidence des formules d'addition en trigonométrie et de la multiplication complexe. Tout complexe $z \neq 0$ peut donc également s'écrire sous forme polaire $z = |z|e^{i\theta}$. Cette forme est adaptée au produit mais le calcul d'une somme est rarement possible, hormis dans le cas remarquable de deux complexes de même module grâce à l'astuce de l'angle moitié.

Un polynôme $P \in \mathbb{K}[T]$ non-constant est irréductible dans $\mathbb{K}$ s'il n'existe pas de polynômes P_1, P_2 non-constants dans $\mathbb{K}[T]$ tels que $P = P_1 P_2$. On montre par récurrence sur le degré que tout polynôme non-constant $P \in \mathbb{K}[T]$ est un produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{K}$.

D'après le théorème fondamental de l'algèbre, les polynômes irréductibles unitaires de $\mathbb{C}[T]$ sont les $T - \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Si $P \in \mathbb{R}[T]$ possède une racine $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, son conjugué $\bar{\alpha}$ est également racine de P et le produit

$$(T - \alpha)(T - \bar{\alpha}) = T^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)T + |\alpha|^2 \in \mathbb{R}[T],$$

de discriminant $-4\operatorname{Im}(\alpha)^2 < 0$, divise P . On en déduit que les polynômes irréductibles unitaires de $\mathbb{R}[T]$ sont les $T - \alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$) et les $T^2 + \beta T + \gamma$ (avec $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\beta^2 - 4\gamma < 0$). En particulier, pour tout $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on a $v_{\alpha}(P) = v_{\bar{\alpha}}(P)$ (c'est le nombre de facteurs $T^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)T + |\alpha|^2$ dans la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P dans $\mathbb{R}$).

En outre, un polynôme $P \in \mathbb{R}[T]$ de degré impair possède toujours une racine réelle.

Exercice I.9 : Soit $n \geq 1$.

1) On note $\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$. C'est l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$.

Montrer que $T^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (T - \omega) = \prod_{k=0}^{n-1} (T - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$ et développer $\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} (T - \omega) = \prod_{k=1}^{n-1} (T - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$.

2) Exprimer la décomposition en produit de facteurs irréductibles de $T^n - 1$ dans $\mathbb{R}[T]$.

(On distinguera suivant la parité de n .)

II Calcul matriciel

Dans tout ce chapitre, n, p, q sont des entiers naturels non-nuls.

II.1 Espaces vectoriels et sous-espaces remarquables de matrices

Une matrice $A = (a_{ij}) \in M_{np}(\mathbb{K})$ est un tableau de np scalaires avec

- n lignes de longueur p (notées $l_i(A)$ pour $1 \leq i \leq n$);
- p colonnes de hauteur n (notées $c_j(A)$ pour $1 \leq j \leq p$).

Deux matrices sont égales si et seulement si elles ont même taille et si tous les coefficients homologues sont égaux deux-à-deux. On sait sommer deux matrices de même taille et multiplier une matrice par un scalaire, ce qui permet de parler du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $M_{np}(\mathbb{K})$.

Pour tout $1 \leq i \leq n$ et pour tout $1 \leq j \leq p$, on note $E_{ij} \in M_{np}(\mathbb{K})$ la matrice élémentaire dont tous les coefficients sont nuls à l'exception du coefficient en ligne i et colonne j qui vaut 1. On peut donc écrire

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij} E_{ij}$$

et on dit que $(E_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$ est la base canonique de $M_{np}(\mathbb{K})$.

Enfin, la transposée de $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ est la matrice $A^T \in M_{pn}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont, pour tout $1 \leq i \leq p$, pour tout $1 \leq j \leq n$, $(A^T)_{ij} = a_{ji}$. La transposition $^T : M_{np}(\mathbb{K}) \rightarrow M_{pn}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels dont la réciproque est encore la transposition.

Donnons quelques cas particuliers et sous-ensembles remarquables :

- On identifie l'ensemble $M_{n1}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et une seule colonne à $\mathbb{K}^n$ et on note plus volontiers $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ sa base canonique. On notera $X = (x_i) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ les éléments de $\mathbb{K}^n$.
- On note $M_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices carrées de taille n (et $M_1(\mathbb{K})$ s'identifie à $\mathbb{K}$).
Si $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$, les coefficients a_{ii} (pour $1 \leq i \leq n$) sont les coefficients diagonaux de A .
On définit la trace de A comme la somme $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ de ses coefficients diagonaux. En particulier, l'application $\text{tr} : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est linéaire et invariante par transposition (au sens où $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$).
- On note $T_n^s(\mathbb{K})$ le sous-espace des matrices triangulaires supérieures de taille n , i.e., l'ensemble des matrices $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ telles que, pour tous $1 \leq i, j \leq n$, $j < i$ implique $a_{ij} = 0$ (ou $a_{ij} \neq 0$ implique $i \leq j$).
On note $T_n^i(\mathbb{K})$ le sous-espace des matrices triangulaires inférieures de taille n , dont la transposée est triangulaire supérieure.

- Une matrice simultanément triangulaire supérieure et triangulaire inférieure est une matrice diagonale et on note $D_n(\mathbb{K}) = T_n^s(\mathbb{K}) \cap T_n^i(\mathbb{K})$. On pourra noter $\text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ une telle matrice.

La matrice identité (de taille n) est définie par $I_n = (\delta_{ij}) = \text{Diag}(1, \dots, 1) = \sum_{i=1}^n E_{ii}$ et on notera que, pour tout $1 \leq i \leq n$, $c_i(I_n) = e_i$ dans $\mathbb{K}^n$.

- La transposition est une involution de $M_n(\mathbb{K})$. On note $S_n(\mathbb{K})$ (resp. $A_n(\mathbb{K})$) le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$ formés par les matrices symétriques (resp. antisymétriques), i.e., satisfaisant $A^T = A$ (resp. $A^T = -A$). En particulier, les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont tous nuls.

II.2 Produit matriciel - Algèbres de matrices carrées

Si $A = (a_{ij}) \in M_{np}(\mathbb{K})$, si $B = (b_{ij}) \in M_{pq}(\mathbb{K})$ sont deux matrices, on définit le produit $AB \in M_{nq}(\mathbb{K})$ par

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \quad \text{pour tout } (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket.$$

La disposition pratique du produit permet le calcul en petite taille et permet de visualiser le fait que

$$l_i(AB) = l_i(A)B \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq n \quad \text{et} \quad c_j(AB) = A c_j(B) \quad \text{pour tout } 1 \leq j \leq q.$$

Exercice II.1 : 1) Montrer que le produit matriciel est associatif (il est aussi bilinéaire et l'identité est neutre).

2) Soient $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$. En considérant $e_i \in \mathbb{K}^n$ et $e_j \in \mathbb{K}^p$, montrer que $e_i e_j^T = E_{ij} \in M_{np}(\mathbb{K})$.

Soient de plus $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $l \in \llbracket 1, q \rrbracket$. Calculer $e_j^T e_k$ et en déduire le produit $E_{ij} E_{kl} \in M_{nq}(\mathbb{K})$.

3) Montrer que, pour tout $A \in M_{np}(\mathbb{K})$, pour tout $X = (x_k) \in \mathbb{K}^p$, on a $AX = \sum_{k=1}^p x_k c_k(A)$ dans $\mathbb{K}^n$.

4) Montrer que, pour tout $A \in M_{np}(\mathbb{K})$, pour tout $B \in M_{pq}(\mathbb{K})$, on a $(AB)^T = B^T A^T$ dans $M_{qn}(\mathbb{K})$.

5) Montrer que, pour tous $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{pn}(\mathbb{K})$, on a $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Dans le cas des matrices carrées, le produit fait de $(M_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ une $\mathbb{K}$ -algèbre non-commutative (au sens où il existe des matrices A, B telles que $AB \neq BA$) et non-intègre (au sens où il existe des matrices A, B non-nulles telles que $AB = 0$).

Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ et si $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T^k \in \mathbb{K}[T]$ est un polynôme, on peut évaluer P en A et calculer la matrice

$$P(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k \in M_n(\mathbb{K}).$$

On rappelle que $A^0 = I_n$ et que deux polynômes en A commutent !

Un polynôme $P_0 \neq 0$ tel que $P_0(A) = 0$ est un polynôme annulateur de A . Tous les multiples de P_0 sont alors encore annulateurs de A et si P est un polynôme quelconque, si $P = P_0 Q + R$ est la division euclidienne de P par P_0 , on a $P(A) = R(A)$.

Dans le cas où $A \in M_n(\mathbb{K})$ est annulée par un monôme, on dit que A est nilpotente.

Exercice II.2 : 1) Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ est annulée par le polynôme $T^2 - 5T + 6$.

2) Avec l'exercice I.4.2, en déduire, pour tout $d \geq 2$, la valeur de A^d sans calcul matriciel.

Exercice II.3 : 1) Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieur.

Montrer que les coefficients diagonaux du produit sont les produits des coefficients diagonaux homologues.

Si $A = (a_{ij})$ est triangulaire supérieure et si $P \in \mathbb{K}[T]$ est un polynôme, que dire de $P(A)$?

- 2) Pour tout $0 \leq r \leq n$, on note $T_{n,r}^s(\mathbb{K})$ le sous-espace des matrices $A = (a_{ij}) \in T_n^s(\mathbb{K})$ telles que, pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $j < i + r$ implique $a_{ij} = 0$. En particulier, $A \in T_{n,1}^s(\mathbb{K})$ si elle a une diagonale de 0.
- a) Montrer que, pour tous $0 \leq r, t \leq n$, pour tous $A \in T_{n,r}^s(\mathbb{K})$ et $B \in T_{n,t}^s(\mathbb{K})$, on a $AB \in T_{n,r+t}^s(\mathbb{K})$.
- b) En déduire que $A \in T_n^s(\mathbb{K})$ est nilpotente si et seulement si elle possède une diagonale de 0.

Une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible s'il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$, et B est alors unique : c'est l'inverse de A , qu'on note A^{-1} .

On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles dans $M_n(\mathbb{K})$ et on vérifie que, si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sont inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

En outre, si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors A^T est inversible et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Si une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible alors elle est simplifiable au sens où, pour tout $B \in M_{np}(\mathbb{K})$ (resp. pour tout $B \in M_{pn}(\mathbb{K})$), $AB = 0$ implique $B = 0$ (resp. $BA = 0$ implique $B = 0$). Puisque, pour tous $1 \leq i, j \leq n$, on a $e_i^T A = l_i(A)$ et $A e_j = c_j(A)$, une matrice inversible n'a ni ligne ni colonne nulle.

Plus généralement, les lignes et les colonnes d'une matrice inversible sont linéairement indépendantes.

Exercice II.4 : 1) Montrer que si $N \in M_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors $I_n + N$ est inversible.

2) Montrer que $D \in D_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non-nuls.

3) Soit $A = (a_{ij}) \in T_n^s(\mathbb{K})$.

a) On suppose que, pour tout $1 \leq i \leq n$, $a_{ii} \neq 0$. En notant $D = \text{Diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$, calculer $D^{-1}A$ et montrer que A est inversible. Que dire de A^{-1} et de ses coefficients diagonaux ?

b) Réciproquement, on suppose que A est inversible. En notant $P = \prod_{\substack{j=1 \\ a_{jj} \neq 0}}^n (T - a_{jj})$, justifier que $AP(A)$ et $P(A)$ sont nilpotentes et conclure que $a_{ii} \neq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

4) Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{K})$ possède un polynôme annulateur P tel que $P(0) \neq 0$, alors A est inversible.

Exercice II.5 : Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ deux matrices. On dit que A est semblable à B s'il existe une matrice inversible $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = QAQ^{-1}$.

1) Montrer que la similitude est une relation d'équivalence (au sens logique).

2) On note $A \underset{S}{\sim} B$ lorsque A et B sont semblables. Dans ce cas, montrer que :

- a) pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[T]$, $P(A) \underset{S}{\sim} P(B)$;
- b) A est inversible si et seulement si B l'est et, dans ce cas, $A^{-1} \underset{S}{\sim} B^{-1}$;
- c) on a $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$.

II.3 Calcul matriciel par blocs

Si on a des entiers $n_1, n_2, p_1, p_2 \geq 1$ tels que $n_1 + n_2 = n$ et $p_1 + p_2 = p$, on peut découper une matrice $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ en blocs et voir A comme un élément de $M_{n_1+n_2, p_1+p_2}(\mathbb{K})$ en notant

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A_{ij} \in M_{n_i, p_j}(\mathbb{K}) \text{ pour tous } 1 \leq i, j \leq 2.$$

Ces découpages sont arbitraires, et on les choisit par commodité. Par exemple, on peut écrire

$$A = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \in M_{2+3, 2+1}(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \in M_{4+1, 1+2}(\mathbb{K}).$$

On calcule par blocs les combinaisons linéaires d'éléments dans $M_{n_1+n_2, p_1+p_2}(\mathbb{K})$ et, en transposant, on obtient

$$A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{pmatrix} \in M_{p_1+p_2, n_1+n_2}(\mathbb{K}).$$

Pour $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \in M_{n_1+n_2, p_1+p_2}(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \in M_{p_1+p_2, q_1+q_2}(\mathbb{K})$, le produit matriciel se réécrit sous la forme du produit par blocs

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} \in M_{n_1+n_2, q_1+q_2}(\mathbb{K}).$$

Dans le cas d'une matrice carré $A \in M_n(\mathbb{K})$, on découpera toujours les lignes et les colonnes de manière analogue de sorte que, si $n_1 + n_2 = n$, les blocs diagonaux de $A \in M_{n_1+n_2}(\mathbb{K})$ sont toujours carrés. On pourra considérer des matrices triangulaires par blocs et diagonales par blocs

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Le produit de deux matrices triangulaires (resp. diagonales) par blocs de même taille est encore triangulaire (resp. diagonal) par blocs et les blocs diagonaux du produit sont les produits des blocs diagonaux.

Par conséquent, pour $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \star \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$ et pour $P \in \mathbb{K}[T]$, on a $P(A) = \begin{pmatrix} P(A_{11}) & \star \\ 0 & P(A_{22}) \end{pmatrix}$.

En outre, une telle matrice est inversible si et seulement si ses blocs diagonaux le sont.

Tout ce qui précède se généralise bien sûr à un nombre quelconque de blocs. On peut également choisir de ne découper que suivant les lignes ou suivant les colonnes. En particulier, pour toute matrice $A \in M_{np}(\mathbb{K})$, on peut écrire

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} c_1(A) & c_2(A) & \cdots & c_p(A) \end{array} \right).$$

Exercice II.6 : 1) Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in M_{n_1+n_2}(\mathbb{K})$ avec A, D inversibles. Calculer M^{-1} .

2) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et considérons la matrice $M = \begin{pmatrix} I_n & A \\ A & I_n \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{K})$. Calculer $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -A & I_n \end{pmatrix} M$ et en déduire que M est inversible si et seulement si $I_n - A^2$ l'est. Calculer M^{-1} dans ce cas.

3) Avant de généraliser hâtivement, considérer $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: calculer $A^2 - B^2$ puis trouver une combinaison linéaire nulle des colonnes de M (qui n'est donc pas inversible).

III Systèmes linéaires et équations matricielles

III.1 Novau et image d'une matrice - Cas des matrices échelonnées réduites

Soit $A = (a_{ij}) \in M_{np}(\mathbb{K})$. Pour tout $Y = (y_i) \in \mathbb{K}^n$, résoudre le système linéaire à n équations et p inconnues

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1p}x_p & = & y_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2p}x_p & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + \cdots + & a_{np}x_p & = & y_n \end{array} \right.$$

revient à résoudre l'équation matricielle $AX = Y$ d'inconnue $X = (x_k) \in \mathbb{K}^p$.

Le noyau de A est le sous-espace $\ker(A) := \{X \in \mathbb{K}^p \text{ t.q. } AX = 0\}$ des solutions de l'équation homogène associée $AX = 0$.

L'image de A est le sous-espace $\text{Im}(A) := \{Y \in \mathbb{K}^n \text{ t.q. il existe } X \in \mathbb{K}^p \text{ t.q. } AX = Y\}$ des seconds membres tels que l'équation $AX = Y$ est compatible. Par construction, $\text{Im}(A)$ est l'ensemble $\text{Vect}(c_1(A), \dots, c_p(A))$ des combinaisons linéaires des colonnes de A .

Remarques III.1 : 1) La bilinéarité du produit assure que l'application $\Phi_A : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$ définie par $X \mapsto AX$ est linéaire, ce qui justifie le vocabulaire. On dit que Φ_A est l'application linéaire canoniquement associée à A .

2) Pour tout $Y \in \mathbb{K}^n$, il suffit de déterminer $\ker(A)$ et une solution particulière de l'équation $AX = Y$ pour la résoudre complètement, *i.e.*, pour expliciter le sous-espace affine des $X \in \mathbb{K}^p$ tels que $AX = Y$!

On calcule aisément le noyau et l'image d'une matrice échelonnée réduite dont on distingue

- les colonnes principales $c_{j_1}, \dots, c_{j_r}$ avec $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq p$ et, pour tout $1 \leq k \leq r$, $c_{j_k} = c_k(I_n) = e_k$;
- les colonnes secondaires qui sont combinaisons linéaires des colonnes principales qui les précèdent.

Exemple III.2 : La matrice $R = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{34}(\mathbb{K})$ est échelonnée réduite. Ses colonnes principales sont c_1 et c_3 et on a bien $c_2 = \alpha c_1$ et $c_4 = \beta c_1 + \gamma c_3$. En particulier, $\text{Im}(R) = \text{Vect}(c_1, c_3) = \text{Vect}(e_1, e_2)$ et

$$\text{pour tout } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Im}(R), \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ est solution de l'équation } RX = Y.$$

On notera que $\text{Im}(R)$ admet l'équation $y_3 = 0$ et s'exprime ainsi comme le noyau $\ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Un vecteur $X = (x_k) \in \mathbb{K}^4$ est dans $\ker(R)$ si et seulement si $x_1 = -\alpha x_2 - \beta x_4$ et $x_3 = -\gamma x_4$ (les inconnues principales s'expriment en fonction des inconnues secondaires (ou paramètres) et on a

$$\ker(R) = \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha x_2 - \beta x_4 \\ x_2 \\ -\gamma x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}, (x_2, x_4) \in \mathbb{K}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\beta \\ 0 \\ -\gamma \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Im} \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ 1 & 0 \\ 0 & -\gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut donc également exprimer $\ker(R)$ comme une image !

Exercice III.3 : Faire le même travail avec $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque III.4 : Si $R \in M_{np}(\mathbb{K})$ est échelonnée réduite, le nombre r de ses colonnes principales satisfait nécessairement $0 \leq r \leq \min\{n, p\}$. On notera en outre que :

- $R = 0$ si et seulement si R n'a aucune colonne principale si et seulement si $r = 0$;
- $\ker(R) = \{0\}$ si et seulement si toutes les colonnes de R sont principales si et seulement si $r = p$;
- $\text{Im}(R) = \mathbb{K}^n$ si et seulement si R n'a aucune ligne nulle si et seulement si $r = n$;
- Si $n = p$, *i.e.*, si R est carrée, elle est triangulaire supérieure. Par conséquent, elle est inversible si et seulement si $r = n$ si et seulement si $R = I_n$. Ainsi, I_n est l'unique matrice échelonnée réduite inversible.

III.2 Equivalence par lignes et algorithme de Gauss-Jordan

Si $A, B \in M_{np}(\mathbb{K})$ sont deux matrices, on dit que A est équivalente par lignes à B (et on note $A \underset{L}{\sim} B$) s'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $PA = B$. C'est une relation d'équivalence (au sens logique). Deux matrices équivalentes par lignes ont donc même noyau et on peut prouver que deux matrices échelonnées réduites équivalentes par lignes sont égales en généralisant l'exemple suivant :

Exercice III.5 : Soient $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et R la matrice de l'exemple III.2.

- Expliciter PR sous la forme $PR = \left(\begin{array}{c|c|c|c} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{array} \right)$.
- Montrer que si PR est échelonnée réduite, alors $PR = R$. A-t-on nécessairement $P = I_3$?
- En déduire que si R' est échelonnée réduite et si $R \underset{L}{\sim} R'$, alors $R = R'$.

Soit $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ et étudions l'effet de la multiplication à gauche par les matrices de transformation élémentaire :

- (Matrices de dilatation) Soient $1 \leq i \leq n$ et $\alpha \in \mathbb{K}^*$. La matrice $D_i(\alpha) = \text{Diag}(1, \dots, 1, \alpha, 1, \dots, 1)$ (où α est en i -ème position), obtenue en multipliant la ligne l_i de I_n par α , est inversible. On déduit $D_i(\alpha)A$ de A en multipliant $l_i(A)$ par α et on dit qu'on a fait subir à A la dilatation $l_i \leftarrow \alpha l_i$.
- (Matrices de transvection) Soient $1 \leq i, j \leq n$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. La matrice $I_n + \lambda E_{ij}$, obtenue en remplaçant la ligne l_i de I_n par $l_i(I_n) + \lambda l_j(I_n)$, est inversible. On déduit $(I_n + \lambda E_{ij})A$ de A en ajoutant à $l_i(A)$ le produit $\lambda l_j(A)$ et on dit qu'on a fait subir à A la transvection $l_i \leftarrow l_i + \lambda l_j$.
- (Matrices de transposition) Soient $1 \leq i, j \leq n$ avec $i \neq j$. La matrice T_{ij} obtenue en intervertissant les lignes l_i et l_j de I_n est inversible (et elle est son propre inverse). On déduit $T_{ij}A$ de A en intervertissant $l_i(A)$ et $l_j(A)$ et on dit qu'on a fait subir à A la transposition $l_i \leftrightarrow l_j$.

L'algorithme de Gauss-Jordan (ou algorithme du pivot) donne une suite d'opérations élémentaires sur les lignes (*i.e.*, de multiplications à gauche par des matrices de transformation élémentaire) permettant d'obtenir l'unique matrice échelonnée réduite $R \in M_{np}(\mathbb{K})$ équivalente par lignes à A .

Définition III.6 : Avec les notations précédentes :

- On appelle rang de A , et on note $\text{rg}(A)$, le nombre de colonnes principales de R .
- On appelle colonnes principales de A les colonnes de A correspondant aux colonnes principales de R .

Remarques III.7 : 1) Deux matrices A, B équivalentes par lignes sont équivalentes par la lignes à la même matrice échelonnée réduite. Elles ont donc même rang et leurs colonnes principales sont aux mêmes positions.

2) III.4 s'étend à toutes les matrices ! En particulier, pour $A \in M_{np}(\mathbb{K})$, on a $0 \leq \text{rg}(A) \leq \min\{n, p\}$, $A = 0$ si et seulement si $\text{rg}(A) = 0$ et, si $A \in M_n(\mathbb{K})$, A est inversible si et seulement si $\text{rg}(A) = n$.

Exemple III.8 : Fixons $\lambda \in \mathbb{K}$ et considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$. On choisit un pivot dans la première colonne, *i.e.*, un coefficient non-nul, on le place sur la première ligne à l'aide d'une transposition puis on "nettoie" la colonne en dessous à l'aide de transvections. Ici, on fait $l_1 \leftrightarrow l_3$ puis $l_2 \leftarrow l_2 - l_1$ et $l_3 \leftarrow l_3 - \lambda l_1$:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ \boxed{1} & 1 & \lambda \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda \\ 0 & 1 - \lambda & 1 - \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Si $\lambda = 1$, on obtient $A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est échelonnée réduite et possède un unique pivot ($\text{rg}(A) = 1$).

Déterminer $\ker(A)$ revient à résoudre l'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ et on peut conclure que

$$\ker(A) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, (x_2, x_3) \in \mathbb{K}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Si $\lambda \neq 1$, on choisit $\lambda - 1$ comme second pivot, on utilise une dilatation pour normaliser ce pivot à 1 puis on "nettoie" la colonne en dessous à l'aide d'une transvection. Ici, on fait donc $l_2 \leftarrow \frac{l_2}{\lambda - 1}$ puis $l_3 \leftarrow l_3 - (1 - \lambda)l_2$:

$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & \lambda \\ 0 & \boxed{\lambda - 1} & 1 - \lambda \\ 0 & 1 - \lambda & 1 - \lambda^2 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & \lambda \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda - \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Si $\lambda = -2$, on a $2 - \lambda - \lambda^2 = (\lambda - 1)(2 + \lambda) = 0$ et on obtient $A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est échelonnée et

possède deux pivots (donc $\text{rg}(A) = 2$). La transvection $l_1 \leftarrow l_1 - l_2$ donne $A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer $\ker(A)$ revient à résoudre le système linéaire (à deux équations) $x_1 - x_3 = x_2 - x_3 = 0$ et

$$\ker(A) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{K} \right\} = \mathbb{K} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si $\lambda \notin \{1, -2\}$, on choisit $2 - \lambda - \lambda^2$ comme troisième pivot, on le normalise et A est équivalente par lignes à une matrice triangulaire supérieure avec une diagonale de 1 donc A est inversible, $\text{rg}(A) = 3$ et $\ker(A) = \{0\}$.

Des transvections supplémentaires assurent que $A \underset{L}{\sim} I_3$.

Remarque III.9 : Résoudre une équation matricielle homogène revient à exprimer $\ker(A)$ comme une image ! Les colonnes engendrant $\ker(A)$ (lorsqu'il est non-nul) donnent les coefficients d'une combinaison linéaire nulle des colonnes de A . Ainsi, comme dans le cas d'une matrice échelonnée-réduite, les colonnes non-principales de A (lorsqu'il y en a) sont combinaisons linéaires des colonnes principales de A .

Dans l'exemple, lorsque $\lambda \in \{1, -2\}$, on a

- si $\lambda = 1$, $c_1(A)$ est l'unique colonne principale de A et on a $c_2(A) = c_3(A) = c_1(A)$;
- si $\lambda = -2$, $c_1(A)$ et $c_2(A)$ sont les colonnes principales de A et on a $c_3(A) = -c_1(A) - c_2(A)$.

III.3 Variante de l'algorithme de Gauss-Jordan - Calcul d'inverse

Pour calculer une matrice inversible $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $PA = R$, on fait subir à I_n la même suite d'opérations élémentaires sur les lignes que celle qui permet d'échelonner-réduire A .

Il est commode d'utiliser la matrice augmentée (ou par blocs) $(A|I_n) \in M_{n,p+n}(\mathbb{K})$ et, à la fin de cette variante de l'algorithme de Gauss-Jordan, on obtient une matrice augmentée $(R|P)$ avec $R \in M_{np}(\mathbb{K})$ échelonnée réduite et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $(A|I_n) \underset{L}{\sim} (R|P)$, i.e., $PA = R$ (sauf si on a fait une erreur de calcul ! C'est fréquent !)

Remarques III.10 : 1) $A \in M_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si elle est équivalente par lignes à I_n . Le calcul de P tel que $PA = I_n$ revient alors au calcul de A^{-1} . Ceci prouve au passage que toute matrice inversible est un produit fini de matrices de transformation élémentaire.

- 2) La variante ci-dessus permet de résoudre une équation matricielle $AX = Y$ puisque ses solutions sont aussi celles de $RX = PY$. Raisonner sur la matrice augmentée $(A|Y)$ peut être plus pertinent dans le cas où Y est numérique. Si Y est littéral, raisonner sur $(A|Y)$ implique les mêmes calculs que de raisonner sur $(A|I_n)$, moins bien présentés : la variante proposée est plus sûre et plus efficace !
- 3) Si R possède des lignes de 0 et si on note $\tilde{P}$ la matrice extraite de P correspondant à ces lignes nulles, on a $\tilde{P}A = 0$ et $\text{Im}(A) = \ker(\tilde{P})$. On peut donc toujours exprimer une image comme un noyau (si R n'a pas de ligne de 0, i.e., si $\text{rg}(A) = n$, $\text{Im}(A) = \mathbb{K}^n = \ker(0)$) !

Exemple III.11 (suite de III.8) : Si $\lambda = 1$, on a $(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right).$

On vérifie qu'en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a bien $PA = R$.

On vérifie également qu'en notant $\tilde{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\text{Im}(A) = \ker(\tilde{P})$.

Si $\lambda = -2$, on a (avec une présentation peu recommandable mais plus économe en papier)

$$\begin{aligned} (A|I_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ &\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

On vérifie qu'en posant $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a bien $PA = R$.

On vérifie également qu'en notant $\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\text{Im}(A) = \ker(\tilde{P})$.

Si $\lambda = 2$, on trouve $(A|I_3) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array} \right)$ et on vérifie que $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice III.12 : Avec $\lambda = 2$ ci-dessus, on remarque que $A = I_3 + J$ où $J = (1) \in M_3(\mathbb{K})$. Calculer J^2 puis A^2 et en déduire un polynôme annulateur de A . Retrouver (beaucoup plus économiquement) l'expression de A^{-1} . Faire de même pour λ quelconque dans $\mathbb{K} \setminus \{-2, 1\}$.

III.4 Matrices équivalentes

La transposition échange les lignes et les colonnes, et change l'ordre des facteurs dans un produit. On dit donc que deux matrices $A, B \in M_{np}(\mathbb{K})$ sont équivalentes par colonnes (et on note $A \underset{C}{\sim} B$) s'il existe $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ telle que $AQ = B$. On étudie l'effet de la multiplication à droite par les matrices de transformation élémentaire :

- (Matrices de dilatation) Soient $1 \leq j \leq p$ et $\alpha \in \mathbb{K}^*$. La matrice $D_j(\alpha) = \text{Diag}(1, \dots, 1, \alpha, 1, \dots, 1)$ (où α est en j -ème position) est également obtenue en multipliant la colonne c_j de I_p par α . On déduit $AD_j(\alpha)$ de A en multipliant $c_j(A)$ par α et on dit qu'on a fait subir à A la dilatation $c_j \leftarrow \alpha c_j$.
- (Matrices de transvection) Soient $1 \leq i, j \leq p$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. La matrice $I_p + \lambda E_{ij}$ est également obtenue en remplaçant la colonne c_j de I_p par $c_j(I_p) + \lambda c_i(I_p)$. On déduit $A(I_p + \lambda E_{ij})$ de A en ajoutant à $c_j(A)$ le produit $\lambda c_i(A)$ et on dit qu'on a fait subir à A la transvection $c_j \leftarrow c_j + \lambda c_i$.

- (Matrices de transposition) Soient $1 \leq i, j \leq p$ avec $i \neq j$. La matrice T_{ij} est également obtenue en intervertissant les colonnes c_i et c_j de I_p . On déduit AT_{ij} de A en intervertissant $c_i(A)$ et $c_j(A)$ et on dit qu'on a fait subir à A la transposition $c_i \leftrightarrow c_j$.

En particulier, si $R \in M_{np}(\mathbb{K})$ est une matrice échelonnée réduite de colonnes principales $c_{j_1}, \dots, c_{j_r}$, des transpositions (pour placer les colonnes principales dans les r premières colonnes) et des transvections (pour tuer les colonnes non-principales) assurent que

$$R \underset{\mathbb{C}}{\sim} J_{n,p,r} \quad \text{où} \quad J_{n,p,r} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \in M_{np}(\mathbb{K}).$$

On dit que deux matrices $A, B \in M_{np}(\mathbb{K})$ sont équivalentes (et on note $A \sim B$) s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ telle que $PAQ = B$. D'après ce qui précède, si $\text{rg}(A) = r$, i.e., si A est équivalente par lignes à une matrice échelonnée réduite possédant r colonnes principales, alors $A \sim J_{n,p,r}$.

Remarque III.13 : On a déjà vu qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ inversible était simplifiable. On montre avec ce qui précède que si A n'est pas inversible, i.e., de rang strictement inférieur à n , elle n'est pas simplifiable : pour tout $p \geq 1$, il existe $B \in M_{np}(\mathbb{K})$ (resp. $B \in M_{pn}(\mathbb{K})$) non-nulle tel que $AB = 0$ (resp. $BA = 0$).

Théorème III.14 : 1) Pour tout $A \in M_{np}(\mathbb{K})$, pour tout $B \in M_{pq}(\mathbb{K})$, $\text{rg}(AB) \leq \min\{\text{rg}(A), \text{rg}(B)\}$.

En particulier, si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sont carrées et si AB est inversible alors A et B le sont.

2) La multiplication, à gauche ou à droite, par une matrice inversible ne change pas le rang d'une matrice.

3) Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang. En particulier, une matrice $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ est de rang r si et seulement si elle est équivalente à $J_{n,p,r}$, et on a donc $\text{rg}(A^T) = \text{rg}(A)$.

IV Calcul de déterminant

IV.1 Généralités

Proposition-Définition IV.1 : Soient $n \geq 2$ un entier et $g : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ une application.

1) a) On dit que g est n -linéaire (ou multilinéaire) par rapport aux colonnes si, pour tout $1 \leq j \leq n$, pour toutes colonnes $c_1, \dots, c_j, c'_j, \dots, c_n$ dans $\mathbb{K}^n$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$g \left(c_1 \mid \dots \mid \lambda c_j + c'_j \mid \dots \mid c_n \right) = \lambda g \left(c_1 \mid \dots \mid c_j \mid \dots \mid c_n \right) + g \left(c_1 \mid \dots \mid c'_j \mid \dots \mid c_n \right).$$

b) On dit que g est alternée par rapport aux colonnes si, pour toutes colonnes $c_1, \dots, c_n$ dans $\mathbb{K}^n$, pour tous $1 \leq i < j \leq n$, $c_i = c_j$ implique $g \left(c_1 \mid \dots \mid c_i \mid \dots \mid c_j \mid \dots \mid c_n \right) = 0$

2) Si $g : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est n -linéaire alternée et si $A \in M_n(\mathbb{K})$ n'est pas inversible, alors $g(A) = 0$.

Remarque IV.2 : Soient $n \geq 2$ et $g : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ une application n -linéaire alternée par rapport aux colonnes. Alors g est antisymétrique par rapport aux colonnes au sens où, pour toutes colonnes $c_1, \dots, c_n$ dans $\mathbb{K}^n$, pour tous $1 \leq i < j \leq n$, on a $g \left(c_1 \mid \dots \mid c_j \mid \dots \mid c_i \mid \dots \mid c_n \right) = -g \left(c_1 \mid \dots \mid c_i \mid \dots \mid c_j \mid \dots \mid c_n \right)$.

Exemples IV.3 : Avec les notations précédentes, examinons la situation en petite taille :

1) Pour $n = 2$, on commencera par noter que, dans le plan euclidien, la mesure de l'aire d'un parallélogramme est bilinéaire alternée par rapport aux vecteurs qui l'engendre. Le choix de l'échelle (et de l'orientation), i.e., le choix de l'aire algébrique du carré engendré par une base orthonormée, est notre seul degré de liberté !

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. En utilisant la bilinéarité, puis le caractère alterné puis l'antisymétrie de g , on calcule :

$$\begin{aligned} g(A) &= g \begin{pmatrix} a+0 & b \\ 0+c & d \end{pmatrix} = ag \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} + cg \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{pmatrix} \\ &= a \left[bg \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + dg \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] + c \left[bg \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + dg \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= adg \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + bcg \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (ad - bc)g(I_2) \end{aligned}$$

Ainsi, si $g : M_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est bilinéaire alternée par rapport aux colonnes, g est entièrement déterminé par le choix de $g(I_2)$.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. En utilisant pareillement la trilinearité puis le caractère alterné de g , on a

$$\begin{aligned} g(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} g(e_1 | e_2 | e_3) + a_{11}a_{32}a_{23} g(e_1 | e_3 | e_2) + a_{21}a_{12}a_{33} g(e_2 | e_1 | e_3) \\ &\quad + a_{21}a_{32}a_{13} g(e_2 | e_3 | e_1) + a_{31}a_{12}a_{23} g(e_3 | e_1 | e_2) + a_{31}a_{22}a_{13} g(e_3 | e_2 | e_1) \end{aligned}$$

On notera que les $3! = 6$ images de g restantes sont celles de permutations des colonnes de I_3 (qui forment la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{K}^3$). On notera aussi que le produit de coefficients de A devant chaque facteur porte aussi la trace de cette permutation (voir les coefficients de ligne).

Par exemple, sur la deuxième ligne, le troisième terme $a_{31}a_{12}a_{23} g(e_3 | e_1 | e_2)$ correspond à la transposition $e_1 \leftrightarrow e_3$ tandis que le premier terme $a_{21}a_{32}a_{13} g(e_2 | e_3 | e_1)$ correspond à la permutation circulaire $e_1 \leftarrow e_2 \leftarrow e_3 \leftarrow e_1$. Avec l'antisymétrie, on calcule

$$g(e_2 | e_3 | e_1) = -g(e_2 | e_1 | e_3) = (-1)^2 g(I_3)$$

et on peut conclure en traitant de manière analogue les six termes que

$$g(A) = [a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33}] g(I_3).$$

A nouveau, si $g : M_3(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est trilinearité alternée par rapport aux colonnes, g est entièrement déterminé par le choix de $g(I_3)$.

Cas général. Pour faire la même chose en taille quelconque, on doit introduire quelques notations : soit $n \geq 2$.

- On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$, i.e., des bijections $\sigma : \llbracket 1, n \rrbracket \xrightarrow{\sim} \llbracket 1, n \rrbracket$, de cardinal $n!$.
- Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $T_\sigma = (\delta_{i, \sigma(j)})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$ la matrice déduite de I_n par la permutation σ de ses colonnes : pour tout $1 \leq j \leq n$, on a $c_j(T_\sigma) = c_{\sigma(j)}(I_n)$, i.e., $T_\sigma = \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} & e_{\sigma(2)} & \cdots & e_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$.

On montre en particulier que, pour tous σ, σ' dans $\mathfrak{S}_n$, $T_\sigma T_{\sigma'} = T_{\sigma \circ \sigma'}$.

- On appelle transposition de $\llbracket 1, n \rrbracket$ toute permutation échangeant deux éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et laissant les autres fixes. Pour tous $1 \leq i < j \leq n$, la transposition $i \leftrightarrow j$ est notée τ_{ij} et, avec les notations de §III.4, $T_{ij} = T_{\tau_{ij}}$. (On convient que, pour tout $1 \leq i \leq n$, τ_{ii} désigne l'identité e de $\llbracket 1, n \rrbracket$.)

On montre par récurrence que tout élément de $\mathfrak{S}_n$ est une composée de transpositions : si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\tau_{\sigma(n), n} \circ \sigma$ laisse n invariant et induit une bijection $\llbracket 1, n-1 \rrbracket \xrightarrow{\sim} \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ (i.e., un élément de $\mathfrak{S}_{n-1}$) et on itère !

Soient $g : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ une application n -linéaire alternée par rapport aux colonnes. D'après la remarque **IV.2** et ce qui précède, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, il existe donc un élément $\varepsilon(\sigma) \in \{-1, 1\}$, appelé signature de σ , tel que

$$g(T_\sigma) = g \left(e_{\sigma(1)} \mid e_{\sigma(2)} \mid \cdots \mid e_{\sigma(n)} \right) = \varepsilon(\sigma)g(I_n).$$

Soit maintenant $A = (a_{ij})$ dans $M_n(\mathbb{K})$. En procédant de manière exactement analogue à ce qu'on a fait en taille 3, on utilise la n -linéarité et le caractère alterné de g pour obtenir l'expression

$$g(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j} g(T_\sigma) = \left[\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j} \right] g(I_n)$$

et, une fois encore, g est entièrement déterminé par le choix de $g(I_n)$. Par conséquent :

Proposition-Définition IV.4 : Soit $n \geq 2$. Le déterminant, noté $\det : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ et définie par

$$A = (a_{ij}) \mapsto \det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j}$$

est l'unique application $M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ n -linéaire alternée par rapport aux colonnes qui vaut 1 en I_n .

Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, on note aussi $\det(A) = |A|$ lorsque A est un tableau de nombres.

On convient que pour tout $A = (a) \in M_1(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$, on a $\det(A) = a$.

Exercice IV.5 : Fixons $A \in M_n(\mathbb{K})$ et considérons l'application $g : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $B \mapsto \det(AB)$.

Montrer que $g : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est n -linéaire alternée par rapport aux colonnes (de B !)

(On utilisera le fait que, pour tout $1 \leq j \leq n$, on a $Ac_j(B) = c_j(AB)$.)

Théorème IV.6 : 1) Pour tous $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, on a $\det(AB) = \det(A) \det(B)$;

2) Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas, on a $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

Enfin, avec des manipulations d'indices (un peu fines), on montre :

Théorème IV.7 : Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, on a $\det(A^T) = \det(A)$.

IV.2 Calcul de déterminant par opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes

En taille quelconque, on déduit immédiatement des considérations du paragraphe §III.4 la proposition suivante, qui conduit à utiliser les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes pour calculer les déterminants.

Proposition IV.8 (Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes) : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

- (Dilatation.) Pour tout $1 \leq j \leq n$, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, on a $\det(D_j(\alpha)) = \alpha$ et

$$\det(AD_j(\alpha)) = \det \left(c_1 \mid \cdots \mid \alpha c_j \mid \cdots \mid c_n \right) = \alpha \det(A)$$

- (Transvection.) Pour tous $1 \leq i, j \leq n$ avec $i \neq j$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\det(I_n + \lambda E_{ij}) = 1$ et

$$\det(A(I_n + \lambda E_{ij})) = \det \left(c_1 \mid \cdots \mid c_i \mid \cdots \mid c_j + \lambda c_i \mid \cdots \mid c_n \right) = \det(A)$$

- (Transposition.) Pour tous $1 \leq i < j \leq n$, on a déjà vu que $\det(T_{ij})(= \varepsilon(\tau_{ij})) = -1$ et on a

$$\det(AT_{ij}) = \det \left(c_1 \mid \cdots \mid c_j \mid \cdots \mid c_i \mid \cdots \mid c_n \right) = -\det(A)$$

On a des résultats analogues avec les opérations élémentaires sur les lignes d'après **IV.6**

Remarque IV.9 : Il peut être utile dans certains cas de savoir permuter circulairement (des lignes ou) des colonnes adjacentes : on montre par récurrence que, pour tout $1 \leq i < j \leq n$,

$$\det \left(c_1 \cdots c_{i-1} \mid c_{i+1} \cdots c_j \ c_i \mid c_{j+1} \cdots c_n \right) = (-1)^{j-i-1} \det(A).$$

et

$$\det \left(c_1 \cdots c_{i-1} \mid c_j \ c_i \cdots c_{j-1} \mid c_{j+1} \cdots c_n \right) = (-1)^{j-i-1} \det(A).$$

Corollaire IV.10 : Si $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ est triangulaire (ou diagonale) alors $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$.

Exemples IV.11 : 1) Reprenons encore la matrice de l'exemple III.8.

En commençant par les transvections $c_1 \leftarrow c_1 + c_2 + c_3$, en sortant $\lambda + 2$ puis en échelonnant, on a

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 1 & 1 \\ \lambda+2 & \lambda & 1 \\ 2+\lambda & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-1)^2.$$

On notera l'avantage de procéder avec des opérations élémentaires plutôt qu'en appliquant IV.4 (ou la méthode de Sarrus qui permet de la retrouver rapidement) qui donne le déterminant sous la forme $\det(A) = \lambda^3 - 3\lambda + 2$.

2) Pour tout $n \geq 1$, et à l'aide des transvections $c_j \leftarrow c_j - c_n$ pour j variant de 1 à $n-1$, on montre que

$$D_n := \begin{vmatrix} 1 & n & \cdots & \cdots & n \\ n & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & n-1 & n \\ n & \cdots & \cdots & n & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-n & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 2-n & \ddots & \vdots & n \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} n!.$$

IV.3 Calcul de déterminants par développements suivant les lignes ou les colonnes

Reprenons le déterminant en taille 3. On factorise les coefficients de la première colonne pour obtenir

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{21}(a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

De même, on factorise les coefficients de la deuxième ligne pour obtenir

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

On admet que de telles factorisations sont possibles en toutes tailles, pour n'importe quelle ligne ou n'importe quelle colonne d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, et permettent de ramener le calcul d'un déterminant de taille n à n calculs de déterminants de taille $n-1$. On a donc :

Proposition-Définition IV.12 : Soient $n \geq 2$ et $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice.

1) Pour tous $1 \leq i, j \leq n$, on appelle mineur d'indice i, j de A le déterminant d'ordre $n - 1$ défini par

$$\Delta_{ij}(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

(On a effacé la ligne i et la colonne j de la matrice A .)

2) a) Développement suivant la j -ième colonne de A . Pour tout $1 \leq j \leq n$, on a $\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \Delta_{kj}(A)$.

b) Développement suivant la i -ième ligne de A . Pour tout $1 \leq i \leq n$, on a $\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \Delta_{ik}(A)$.

Remarque IV.13 : A nouveau, puisqu'on cherche le plus souvent à obtenir un déterminant sous forme factorisée, on fera bien souvent des opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes avant de développer afin de faire apparaître, dans la ligne ou la colonne selon laquelle on va développer, un maximum de coefficients nuls !

Corollaire IV.14 : Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire par blocs de taille $r + (n - r)$. Alors

$$\det(M) = \det(A) \det(D).$$

(même chose pour les matrices triangulaires inférieures par blocs, et pour un nombre quelconque de blocs.)

Exemple IV.15 (Calcul de déterminant numérique d'ordre n par récurrence) : Pour tout $n \geq 2$, on note

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 5 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 5 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

On calcule facilement $D_1 = 5$ puis $D_2 = 19$. Pour $n \geq 3$, on développe suivant la première colonne :

$$D_n = 5 \underbrace{\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 5 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 5 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}}_{\text{ordre } n-1} - 3 \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 5 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 3 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 5 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}}_{\text{ordre } n-1}.$$

Le premier terme est D_{n-1} et en développant le second par rapport à la première ligne, on obtient

$$D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}$$

et on montre que, pour tout $n \geq 1$, $D_n = 9 \cdot 3^n - 4 \cdot 2^n = 3^{n+2} - 2^{n+2}$.

Exemple IV.16 (Déterminant de Vandermonde) : Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ des scalaires. En notant

$$M(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

et $V(a_1, \dots, a_n) = \det(M(a_1, \dots, a_n))$, on montre par récurrence sur $n \geq 2$ que $V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$.

Si $n = 2$, il est clair que $V(a_1, a_2) = a_2 - a_1$ pour tout $(a_1, a_2) \in \mathbb{K}^2$.

Soit $n \geq 2$ et supposons vrai le résultat au rang n . Soient $(a_1, \dots, a_n, \lambda) \in \mathbb{K}^{n+1}$ des scalaires. En développant par rapport à la dernière colonne, on obtient

$$V(a_1, \dots, a_n, \lambda) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n+1+k} \lambda^{k-1} \Delta_{k,n+1}(M(a_1, \dots, a_n, \lambda)) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \lambda^k \Delta_{k+1,n+1}(M(a_1, \dots, a_n, \lambda))$$

S'il existe $1 \leq i < j \leq n$ tels que $a_i = a_j$, $V(a_1, \dots, a_n, \lambda) = 0$ car deux colonnes de $M(a_1, \dots, a_n, \lambda)$ sont égales.

Dans le cas contraire, en remarquant que $\Delta_{n+1,n+1}(M(a_1, \dots, a_n, \lambda)) = V(a_1, \dots, a_n)$, l'hypothèse de récurrence assure que la fonction $\lambda \mapsto V(a_1, \dots, a_n, \lambda)$ est polynomiale de degré n et de coefficient dominant $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$.

Si λ est un élément de $\{a_1, \dots, a_n\}$, deux colonnes de $M(a_1, \dots, a_n, \lambda)$ sont égales donc $V(a_1, \dots, a_n, \lambda) = 0$. On a

ainsi la factorisation $V(a_1, \dots, a_n, \lambda) = \left[\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \right] \left[\prod_{1 \leq i \leq n} (\lambda - a_i) \right]$ et on conclut selon le principe de récurrence.