

Programme de colles - Semaine 3 (du 28/09 au 02/10)

Reprise du programme précédent - Leçon 2 : Séries numériques - On garde :

 d'Alembert ;  Séries de Riemann ;  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \dots$;  Intégrales de Wallis ;  CSSA.

Leçon 3 : Intégration sur un intervalle quelconque

I - Rappels et compléments - Intégration sur un segment

1) Fonctions continues par morceaux, fonctions en escalier - Notion de subdivision, relation de finesse.

Def : Fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, subdivision adaptée, cas d'une subdivision plus fine.

Rqs : $\mathcal{C}_{pm}^0([a, b], \mathbb{K})$ est stable par CL, par produit, inclus dans l'ensemble $\mathfrak{B}([a, b], \mathbb{K})$ des fonctions bornées.

Cas d'une restriction. Def : Fonction en escalier (toujours notées φ ci-dessous). Mêmes remarques.

2) Approximation uniforme d'une fonction continue par des fonctions en escalier

 Norme infinie $\|\cdot\|_\infty : \mathfrak{B}(I, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}_+$, 3 propriétés (+1 pour le produit). Si $J \subset I$, $\|f\|_\infty^J \leq \|f\|_\infty^I$.

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est lipschitzienne (ou $\mathcal{C}^0$ (BWHP)), elle est uniformément $\mathcal{C}^0$. Pour $\varepsilon > 0$, construction de $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ en escalier telle que $\|f - \varphi\|_\infty^{[a,b]} \leq \varepsilon$, d'une suite (φ_n) telle que $\|f - \varphi_n\|_\infty^{[a,b]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Encadrement de $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ par φ_-, φ_+ telles que $\|\varphi_+ - \varphi_-\|_\infty^{[a,b]} \leq \varepsilon$. Extension au cas $\mathcal{C}_{pm}^0$.

3) Construction de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment - Si $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est en

escalier, $\int_a^b \varphi := \sum_{k=1}^n (c_k - c_{k-1}) \xi_k$ ne dépend pas de σ adaptée : propriétés des sommes finies.

Definition de $\int_a^b f$ si $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], \mathbb{R})$ (donc positivité de l'intégrale), si $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], \mathbb{C})$.

 (cas réel de) Thm : Si $f \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], \mathbb{K})$, si $\|f - \varphi_n\|_\infty^{[a,b]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, alors $\int_a^b \varphi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f$.

4) Propriétés élémentaires de l'intégration sur un segment - Sur $\mathcal{C}_{pm}^0([a, b], \mathbb{K})$, Chasles, linéarité et inégalité triangulaire (le thm précédent permet d'étendre les propriétés des sommes finies à l'intégrale).

Sur $\mathcal{C}_{pm}^0([a, b], \mathbb{R})$, linéarité + positivité donnent croissance et inégalité de Cauchy-Schwarz.

Thm (de positivité stricte) : Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ est continue sur $[a, b]$, $\int_a^b f = 0$ ssi $f = 0$.

5) Théorème fondamental de l'analyse et méthodes de calculs - Formules de Taylor - Rappels. Rq : Si f est $\mathcal{C}_{pm}^0$

sur I (i.e., sur tout segment de I), $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t)dt$ est bien définie (et continue) sur I , croissante si $f \geq 0$.

Rappels IPP et changement de variable.  Ex : Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange.

Cor : Formule de Taylor-Young (existence du $DL_n(x_0)$ de f de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de x_0).

6) Calcul numérique d'intégrale - Sommes de Riemann - Méthodes des rectangles, du point milieu, des trapèzes.

II - Intégrales généralisées (ou impropres)

1) Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

a) Intégrales convergentes - Def : Si $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ est $\mathcal{C}_{pm}^0$, $\int_a^\infty f$ existe (ou converge) si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt$ existe. Rqs : 1) Cas où f est $\mathcal{C}^0$, caractérisation par une primitive quelconque, notation $[F(t)]_a^{+\infty}$.

2) Une suite $(u_n) \in \mathbb{I}^\mathbb{N}$ telle que $u_n \rightarrow +\infty$ et $\int_a^{u_n} f(t)dt$ converge ne prouve pas l'existence de $\int_a^\infty f$.

Exs : Cas de $t \mapsto e^{-\alpha t}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$, d'une fonction qui ne tend pas vers 0 dont l'intégrale existe.
 Prop : Caractère local en $+\infty$ de la question de l'existence, relation de Chasles.

b) Cas des fonctions positives - Cas où $f, g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ sont $\mathcal{C}_{pm}^0$ et satisfont $f \leq g$.

Rq : Cette fois, $\int_a^\infty f$ existe ssi il existe $(u_n) \in \mathbb{I}^\mathbb{N}$ telle que $u_n \rightarrow +\infty$ et $\int_a^{u_n} f(t)dt$ converge.

2) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque - Soient $a < b$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

a) Cas d'un intervalle de la forme $[a, b[$ - Reprise des points précédents. Cas faussement impropre en b fini.

b) Cas d'un intervalle de la forme $]a, b]$ - Reprise des points précédents. Cas faussement impropre en a fini.

Ex : Cas de $t \mapsto e^{-\alpha t}$ sur $] -\infty, 0]$ et $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ sur $]0, 1]$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), de $t \mapsto \ln(t)$ sur $]0, 1]$.

c) Cas d'un intervalle de la forme $]a, b[$ - Chasles et conjonction des deux cas précédents. C'est le cas le plus

général (grâce à la notion d'intégrale faussement impropre). Ex :  Existence de $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$.

3) Propriétés élémentaires de l'intégrale - Chasles déjà vu ! Linéarité, positivité et croissance, positivité stricte.

III - Fonctions intégrables

1) Définitions - Utilisation des relations de comparaison - $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est intégrable sur I si $\int_I |f|$ existe. Dans ce

cas, $\int_I f$ existe aussi et $\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|$. Rq : Pb local aux bornes de I , notion d'intégrales semi-convergente

(Ex : Dirichlet). Exs : Cas des fonctions $t \mapsto e^{-\alpha t}$ (en $-\infty$, en $+\infty$) et $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ (en 0^+ , en $+\infty$) pour $\alpha \in \mathbb{C}$.

Prop : Si $a < b$ dans $\mathbb{R}$, invariance de l'intégrabilité de $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ par translation (ramener a^+ en 0^+) et symétrie (ramener b^- en 0^+) de la variable.

Thm de comparaison. Exs : Intégrabilité de $t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, de $t \mapsto 1 - t \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)$ sur $\mathbb{R}_+$;

 Existence de $\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) > 0$.

2) Espaces de fonctions L^1 et de fonctions L^2 - Fonctions L^1 sur I , stabilité par CL. Norme $\|\cdot\|$ sur $L_c^1(I, \mathbb{K})$.

Fonctions L^2 , stabilité par CL. Pour $f, g \in L^2(I, \mathbb{K})$, $fg \in L^1(I, \mathbb{K})$ et $\left| \int_I fg \right| \leq \sqrt{\int_I |f|^2} \sqrt{\int_I |g|^2}$.

Norme $\|\cdot\|^2$ sur $L_c^2(I, \mathbb{K})$.

IV - Méthodes de calcul

1) Intégration par partie - Si $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ sont $\mathcal{C}^1$ et si fg possède des limites finies en a et en b , $\int_a^b f'g$ et

$\int_a^b fg'$ ont même nature et on a $\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$.

Exs : Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) > 0$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$;  Existence de $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt$ par IPP.

2) Changement de variable - Si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ est $\mathcal{C}^0$, si $\varphi :]\alpha, \beta[\xrightarrow{\sim}]a, b[$ est bijective, strictement croissante et de

classe $\mathcal{C}^1$, alors $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_\alpha^\beta \varphi'(u)(f \circ \varphi)(u)du$ ont même nature (égalité si existence). Cas décroissant.

Exs :  Existence et égalité de $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$ et $\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{2\sqrt{u}} du$;  Existence et nullité de $\int_0^\infty \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt$;

 Existence et calcul de $\int_0^\pi \frac{dt}{1 + \sin(t)}$.