

Commentaires sur le DS1 (19/09/2026)

L'essentiel du programme d'analyse de MathSpé tourne, comme on le verra, autour de l'interversion de passages à la limite. C'était aussi le thème de ce problème (sûrement trop long, peut-être un peu trop difficile).

Partie I - Convergence et somme de séries doubles

La première partie attaquait par le biais des séries numériques le cas des sommes doubles, une configuration "simple" de familles sommables.

Il faut comprendre que, si (u_{ij}) est une suite double, on a bien sûr $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m u_{ij}$ pour tous $m, n \geq 1$ (parce que l'addition est commutative) mais on n'a pas nécessairement $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} u_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} u_{ij}$ (même lorsque tout converge) car

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} u_{ij} = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_{ij} \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} u_{ij} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_{ij}.$$

Donnons un contre-exemple classique : pour tous $i, j \geq 1$, on pose $u_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } i = j + 1 \text{ (donc } i \geq 2) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Pour $i = 1$, on calcule $\sum_{j=1}^{\infty} u_{1j} = u_{11} = 1$ et, pour tout $i \geq 2$, $\sum_{j=1}^{\infty} u_{ij} = u_{ii} + u_{i,i-1} = 0$ donc $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} u_{ij} = 1$.

Pour tout $j \geq 1$, on calcule $\sum_{i=1}^{\infty} u_{ij} = u_{jj} + u_{j+1,j} = 0$ donc $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} u_{ij} = 0$.

Puisque le passage à la limite est linéaire, on a par contre toujours, pour tout $m \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\infty} u_{ij} = \sum_{i=1}^m \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n u_{ij} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_{ij} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m u_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^m u_{ij}.$$

On peut dire directement que la somme des séries convergentes est linéaire : on a montré en cours que, si $\sum v_k$ et $\sum w_k$ convergent, $\sum_{k=1}^{\infty} (v_k + w_k) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k + \sum_{k=1}^{\infty} w_k$ et ce résultat se généralise évidemment par récurrence (il est parfaitement inutile d'écrire cette récurrence !) De même, pour tous $m, n \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=n+1}^{\infty} u_{ij} = \sum_{i=1}^m \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=n+1}^N u_{ij} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=n+1}^N u_{ij} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=n+1}^N \sum_{i=1}^m u_{ij} = \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{i=1}^m u_{ij}.$$

Comme ci-dessus, on peut dire directement que la formation des restes de séries convergentes est linéaire.

Attention enfin aux notations : $\sum_{k=1}^n v_k$ et $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ sont des nombres et $\sum_{k \geq 1} v_k$ est une suite. De même, $\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^{\infty} u_{ij} \right)$ et $\sum_{i \geq 1} \left(\sum_{j=1}^{\infty} u_{ij} \right)$ sont des nombres et $\sum_{i \geq 1} \left(\sum_{j \geq 1} u_{ij} \right)$ est une suite. Les notations $\sum_{i \geq 1} \left(\sum_{j \geq 1} u_{ij} \right)$ et $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j \geq 1} u_{ij} \right)$ n'ont pas de sens (évident). On ne les utilise pas !

Voyons dans le détail.

1) Question bien réussie malgré des complications inutiles et un usage discutable des notations.

Ecrire $\left| \sum_{j \geq 1} \sum_{i=1}^{\infty} u_{ij} \right| \leq \sum_{j \geq 1} \left| \sum_{i=1}^{\infty} u_{ij} \right| \leq \sum_{j \geq 1} \sum_{i=1}^{\infty} |u_{ij}|$ n'apporte rien par rapport à $\left| \sum_{i=1}^{\infty} u_{ij} \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |u_{ij}|$ et conduit plus loin à des bêtises.

2) a) Il est évident que, pour tous $i, j \geq 1$, on a $|u_{ij}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |u_{kj}|$. C'est une indication, inutile d'y passer un tiers de page. Même remarque que ci-dessus sur la suite de la question.

b) La deuxième partie de la question a été fréquemment ratée car beaucoup écrivent que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^m |u_{ij}| = \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m |u_{ij}| = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |u_{ij}|,$$

ce qui est précisément une interversion de passage à la limite !

Certains enchaînent en maltraitant les notations un peu plus et en disant que les séries $\sum_{i \geq 1} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |u_{ij}| \right)$ et

$\sum_{j \geq 1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |u_{ij}| \right)$ sont égales, c'est-à-dire, puisque les indices sont muets, que, pour tout $N \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^N \left(\sum_{j=1}^{\infty} |u_{kj}| \right) = \sum_{k=1}^N \left(\sum_{i=1}^{\infty} |u_{ik}| \right). \quad \text{Aucune chance !}$$

3) a) Le même genre de question que 2.b, mieux guidée, bien réussie en général.

b) Des **HORREURS** avec l'inégalité triangulaire qui ne tolère rien approchant $|a - b| \leq |a| - |b|$.

4) a) Pour montrer que la série $\sum_{k \geq 1} u_{kk}$ converge absolument, certains disent que, pour tout $j \geq 1$, $\sum_{k \geq 1} |u_{kj}|$ converge (c'est l'hypothèse (i) avec des indices muets, pas de problème) puis prennent $j = k$, ce qui n'a aucun sens : l'indice k n'existe que dans la somme !

b) Question généralement bien réussie.

Partie II - Etude de la fonction Z définie comme somme d'une série

Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $\frac{x}{k^2 - x} \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x}{k^2}$ et on peut poser $Z(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k^2 - x}$.

Le but de cette partie est de montrer que la fonction $Z :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et satisfait une équation différentielle. On notera que, puisque $\left(\frac{x}{k^2 - x} \right)' = \frac{k^2}{(k^2 - x)^2}$, montrer que $Z'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2 - x)^2}$ (on dit qu'on dérive Z terme-à-terme) est encore une interversion de passage à la limite : on a

$$Z'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{1}{h} \left[\frac{x+h}{k^2 - x - h} - \frac{x}{k^2 - x} \right] \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2 - x)^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N \frac{1}{h} \left[\frac{x+h}{k^2 - x - h} - \frac{x}{k^2 - x} \right].$$

Voyons dans le détail.

5) a) Pour montrer que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{k^2}{(k^2 - x)^2}$ est absolument convergente, certains perdent un tiers de page (voire davantage) à calculer l'équivalent $\frac{k^2}{(k^2 - x)^2} \sim \frac{1}{k^2}$. Développer le dénominateur ne sert à rien ici puisque le calcul d'équivalent est compatible avec le produit (plus qu'avec les sommes d'ailleurs).

De manière générale, développer un dénominateur ne sert (presque) jamais à rien !

La suite de la question était un calcul un (tout petit) peu technique mais sans mystère, devant lequel beaucoup trop ont reculé. Dans ce genre de contexte, appliquer l'inégalité triangulaire avant de regrouper les sommes est beaucoup trop brutal !

b) Des problèmes importants de rédaction sur cette question ! On veut montrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{Z(x+h) - Z(x)}{h} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2 - x)^2} \right)$$

existe et vaut 0. Il s'agit de calculer la limite du majorant calculé à la question précédente et d'appliquer le théorème d'encadrement. La **conservation des inégalités larges** par passage à la limite ne s'applique que **lorsqu'on sait que les limites existent !**

On ne peut par ailleurs pas dire que $Z'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2 - x)^2}$ avant d'avoir dit que Z est dérivable !

6) Pour montrer que, pour tout $j \geq 1$, $\sum_{i \geq 1} \frac{x^2}{(i^2 - x)(j^2 - x)}$ converge, **développer le dénominateur ne sert à rien** et fait écrire des bêtises. Il est indispensable par ailleurs, puisqu'on a affaire à une suite double, de préciser en écrivant $\underset{i \rightarrow \infty}{\sim}$ que l'équivalent $\frac{x^2}{(i^2 - x)(j^2 - x)} \underset{i \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x^2}{i^2(j^2 - x)}$ est valable quand i tend vers $+\infty$. Puisque j est fixé, on ne peut pas toucher au facteur $j^2 - x$.

Pour montrer que $\sum_{j \geq 1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^2}{(i^2 - x)(j^2 - x)}$ converge, **il faut calculer** $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^2}{(i^2 - x)(j^2 - x)}$! Avec la linéarité, on trouve facilement $\frac{x}{i^2 - x} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x}{i^2 - x} = \frac{xZ(x)}{j^2 - x}$. Attention ! Calculer $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^2}{i^2(j^2 - x)}$ n'est pas suffisant !

7) a) Question de calcul élémentaire ! A revoir donc, pour s'assurer que la notation $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n$ est comprise et qu'on sait faire des décompositions en éléments simples dans ce genre de cas simples !

b) La première partie de la question était basée sur des changements d'indice dans les sommes. Certains doivent **revoir en urgence les symétries d'indices** : par commutativité de l'addition, on a

$$\sum_{k=1}^{n-1} u_{n-k} = u_{n-1} + u_{n-2} + \dots + u_2 + u_1 = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-2} + u_{n-2} + u_{n-1} = \sum_{l=1}^{n-1} u_l.$$

On dit qu'on fait le changement d'indice $l = n - k$ et on note que, contrairement aux intégrales, il faut échanger les bornes. En effet, par convention, $\sum_{k=n-1}^1 u_k = 0$!

On devait enfin montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^{n-j} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n+j} \frac{1}{i} \right] = 0$. Comme la série harmonique diverge, on ne peut

pas écrire $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 0$! Ecrire que $n - j \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n + j$ ne fonctionne pas davantage car on a par

$$\text{exemple } \sum_{i=1}^{n-j} 2^i - \sum_{i=1}^{n+j} 2^i = - \sum_{i=n-j+1}^{n+j} 2^i = -2^{n-j+1}(2^{2j+1} - 1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty.$$

Il faut se souvenir, dès qu'on voit la série harmonique, du développement $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

8) Question assez facile à condition de **revenir, sans cesse, aux définitions de l'énoncé** : on vient de montrer que

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \frac{1}{i^2 - j^2} = \frac{3}{4j^2} \text{ pour tout } j \geq 1 \text{ donc on remplace et il faut montrer que } \sum_{j \geq 1} \frac{x^2}{j^2(j^2 - x)} \text{ converge et que}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^2}{j^2(j^2 - x)} = Z(x) - \zeta(2)x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x}{j^2 - x} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x}{j^2}. \quad \text{Ca devrait pouvoir se faire !}$$

9) Question trop difficile.

10) Question facile au contraire. Attention au signe du facteur calculé à la question 9 !

Partie III - Une autre expression de la fonction Z et calculs de développements limités

Pour tout entier $n \geq 1$, la série de Riemann $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^{2n}}$ converge (absolument) et on note $\zeta(2n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}}$.

Dans cette partie, on veut montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^n}{k^{2n}} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{k^2}\right)^n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k^2 - x} = Z(x)$,

montrer ensuite que $Z'(x)$ est la dérivée terme à terme $\sum_{n=1}^{\infty} n\zeta(2n)x^{n-1}$ et déduire de l'équation différentielle prouvée à la question 10 une relation de récurrence sur les $\zeta(2n)$. Il y a donc deux interversions de passages à la limite !

Voyons dans le détail.

11) a) Pour montrer que la suite $(\zeta(2n))$ est décroissante, écrire la différence $\zeta(2n+2) - \zeta(2n)$ est maladroit ! Pour montrer une inégalité entre deux sommes indéchiffrées de la même façon, commencer par comparer les termes plutôt. Or on a immédiatement $\frac{1}{k^{2n+2}} \leq \frac{1}{k^{2n}}$!

b) Il fallait montrer ici que $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} \leq \sum_{i=2^n}^{\infty} \frac{1}{i^2}$. Comme les indéxations sont différentes, comparer les termes marche moins bien. La méthode du corrigé consiste à dire que ce sont deux sommes de termes positifs et que tous les termes de la somme de gauche apparaissent dans la somme de droite. On peut aussi essayer de se ramener à la méthode précédente en posant $i = 2^n + k - 2$ pour obtenir $\sum_{i=2^n}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2^n + k - 2)^2}$.

Reste à voir que, pour tout $k \geq 2$, $\frac{1}{k^{2n}} \leq \frac{1}{(2^n + k - 2)^2}$, soit encore que $2^n - 2 \leq k^n - k$. C'est faisable mais la méthode du corrigé est plus simple.

Par contre, **on ne peut pas poser** $i = k^n$ puisque tous les entiers ne sont pas de la forme k^n .

12) Dans cette question, on devait montrer que la suite double $\left(\frac{x^n}{k^{2n}}\right)_{k,n \geq 1}$ satisfaisait les hypothèses de partie I.

Le point (i) est facile à voir. Pour le point (ii), l'énoncé suggérait d'utiliser le critère de d'Alembert et beaucoup ont écrit le rapport

$$\frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^{n+1}}{k^{2n+2}}}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{k^{2n}}} \quad \text{sans calculer et écrire} \quad = \frac{\zeta(2n+2)}{\zeta(2n)} |x|$$

qui permet de conclure puisqu'on vient de montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta(2n) = 1$. **Revenir sans cesse à l'énoncé !**

- 13) a) d'Alembert encore ! Très peu y ont touché
 b) Calcul facile avec la formule du binôme, très peu y ont touché.
 c) Attention de bien appliquer la définition avec les factorielles de

$$\binom{n-2}{k-2} = \frac{(n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!} = \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}.$$

On reconnaît les coefficients binomiaux au fait que la somme des entiers en bas est l'entier en haut !
 Très peu ont abordé la suite de la question.

- 14) Soit $d \geq 1$. On note (a_i) la suite définie par $a_0 = d + 1$ et $a_i = 1$ pour tout $i \geq 1$.

- a) Les séries $\sum a_i |x|^i$ et $\sum |x|^j$ sont géométriques à partir du rang 1, de raison $|x| \leq 1$. Le fait qu'on définisse a_0 invite à sommer à partir du rang 0 !! Des erreurs grossières sur le calcul des sommes font bien de la peine, la palme revenant à $\sum_{i=1}^{\infty} a_i |x|^i = \frac{d+1}{1-|x|}$.

- b) Le calcul de $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)|x|^n$ (qui existe d'après d'Alembert) est casse-pied sans produit de Cauchy.

- c) Personne n'a abordé cette question.

- 15) Certains ont grapillé quelques nanopoints en calculant $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ et $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$.

Il y a rarement d'application numérique en maths mais, lorsqu'il y en a, il faut simplifier les fractions !

Répartition des notes.

Moyenne : 10,75.

Médiane : 10,25.

Ecart-type : 3,97.

Note	4	6	8	10	12	14	16	20
Nombre	1	4	7	10	9	3	6	4
Rang	44ème	40ème	33ème	23ème	14ème	11ème	5ème	

(Lecture du tableau : La seconde ligne indique le nombre de copies entre les notes indiquées sur la première ligne.
 Un élève (fictif) avec une note de la première ligne aurait le rang indiqué sur la dernière ligne.)