

Feuille d'exercices 4 : Rappels et compléments de calcul algébrique

Calcul polynomial

Exercice 1 (Formule de Vandermonde) : Soient $p, q \geq 0$ deux entiers.

En calculant $(1+T)^{p+q}$ de deux manières, montrer que, pour tout $0 \leq n \leq p+q$, on a $\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{p}{n-k} \binom{q}{k}$.

Exercice 2 : Soit $P \in \mathbb{K}[T]$ tel que $P' \mid P$. Montrer que, pour tout $1 \leq k \leq \deg(P)$, $P^{(k)}$ divise $P^{(k-1)}$ et en déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $P = cd(P)(T - \alpha)^{\deg(P)}$.

Exercice 3 : Déterminer l'ensemble des entiers $n \geq 3$ tels que le polynôme $P_n = (T - 1)^n - (T^n - 1)$ possède (au moins) une racine multiple dans $\mathbb{C}$.

Exercice 4 : Soit $n \geq 2$ un entier. On note $\omega_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$ pour tout $0 \leq k \leq n-1$.

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1) Expliciter (sous forme développée) les polynômes interpolateurs de Lagrange associés à $\omega_0, \dots, \omega_{n-1}$.

2) Montrer que $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega_k)$ et en déduire la valeur de $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

3) a) Ecrire la décomposition irréductible des polynômes $\prod_{k=0}^{n-1} ((T + \omega_k)^n - 1)$ et $\prod_{k=0}^{n-1} (T^n - (\omega_k - 1)^n)$.

b) Montrer que, pour tout $0 \leq k \leq n-1$, l'application $\mathbb{U}_n \rightarrow \mathbb{U}_n$ définie par $\omega \mapsto \omega_k \omega$ est bijective et en déduire que les polynômes précédents sont égaux.

Exercice 5 : Soit a un élément de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

1) Montrer que la fonction $t \mapsto \ln(a^2 - 2a \cos(t) + 1)$ est bien définie et continue sur $[0, \pi]$.

2) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a $\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(a^2 - 2a \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1\right) = \ln\left(\frac{a^{2n} - 1}{a^2 - 1}\right)$.

3) En déduire la valeur de $\int_0^\pi \ln(a^2 - 2a \cos(t) + 1) dt$ (on distinguera deux cas).

Exercice 6 : On considère le polynôme $P = T^3 + 3T - 12i$, dont on note α_1, α_2 et α_3 les racines complexes

1) Donner la valeur de $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ et de $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$ (on pourra calculer $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2$.)

2) Déterminer le reste de la division euclidienne de T^5 par P et en déduire la valeur de $\alpha_1^5 + \alpha_2^5 + \alpha_3^5$.

Exercice 7 : Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $P = T^3 + aT + b$.

1) Donner une CNS sur (a, b) pour que les racines z_1, z_2 et z_3 de P vérifient $z_1^2 = z_2 z_3$.

2) Donner une CNS sur (a, b) pour que deux racines z_1 et z_2 de P vérifient $z_1^2 + z_2^2 = 1$.

Calcul matriciel

Exercice 8 : Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Calculer $(M + I_3)^2$ puis $(M + I_3)^4$. En déduire que M est inversible et calculer son inverse.

Exercice 9 : Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

- Calculer M^2 et déterminer des coefficients a, b tels que $M^2 = aM + bI_3$.
- Montrer que M est inversible et déterminer son inverse.
- Montrer que, pour tout $k \geq 0$, il existe des scalaires a_k, b_k tels que $M^k = a_k M + b_k I_3$ et calculer ces scalaires.

Exercice 10 : Soient $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans $M_n(\mathbb{R})$.

- Calculer N^k pour tout $k \geq 0$ (on pourra commencer par faire ce travail en taille 4 sans pointillés.)
- En déduire que M est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 11 : Soit $n \geq 2$ un entier. On note

$$Z_n = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \text{ telle que, pour tout } M \in M_n(\mathbb{K}), AM = MA\}.$$

C'est le *centre* de $M_n(\mathbb{K})$, i.e., l'ensemble des matrices A de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les autres.

- Justifier que Z_n est une partie de $M_n(\mathbb{K})$ stable par combinaison linéaire et par produit.
- Pour toute matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ et pour toute matrice élémentaire $E_{ij} \in M_n(\mathbb{K})$, exprimer AE_{ij} et $E_{ij}A$.

(On pourra commencer par le cas $n = 2$ puis utiliser le fait que $A = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} E_{kl}$ pour n quelconque.)

- En déduire que $Z_n = \{\lambda I_n, \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Exercice 12 : Soit $n \geq 2$ un entier. Une matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ est dite *stochastique* si :

- Pour tous $1 \leq i, j \leq n$, on a $a_{ij} \geq 0$;
- pour tout $1 \leq i \leq n$, on a $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$.

On fixe deux matrices stochastiques $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$.

- Montrer que AB est encore stochastique.
- Dans cette question, on suppose que $AB = I_n$. Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
 - Montrer que $\max_{1 \leq k \leq n} b_{kj} = 1$. On choisit un entier $k_j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $b_{k_j j} = 1$.
 - Montrer que $b_{k_j j}$ est le seul coefficient non-nul de la colonne $c_j(B)$.
 - En déduire que l'application $\llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ définie par $j \mapsto k_j$ est surjective (donc bijective).
 - Déterminer toutes les matrices stochastiques inversibles d'inverse stochastique dans $M_2(\mathbb{R})$ et $M_3(\mathbb{R})$.

Exercice 13 : 1) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$. Montrer que A est annulé par $T^2 - (a+b)T + (ad-bc)$.

2) Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Justifier que M est inversible et calculer son inverse.

Déterminer un polynôme P annulant les deux blocs diagonaux de M et calculer $P(M)$. Retrouver ainsi M^{-1} .

Exercice 14 : Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ deux matrices nilpotentes telles que $AB = BA$.
Montrer que AB et $A + B$ sont nilpotentes.

Equations matricielles

Exercice 15 : Selon la valeur de $m \in \mathbb{K}$, résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = m+1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + my + z = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

Exercice 16 : Calculer le rang des matrices suivantes (selon la valeurs des $a, b, c, d \in \mathbb{K}$) :

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}; \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & a & b \\ c & c & d & d \\ ca & cb & da & db \end{pmatrix}.$$

Exercice 17 : Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et calculer leurs inverses :

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 18 (Matrices de rang 1) : Soit $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ une matrice.

- Montrer que s'il existe une colonne $C \neq 0$ et une ligne $L \neq 0$ telles que $A = CL$, alors $\text{rg}(A) = 1$.
- Montrer réciproquement que si $\text{rg}(A) = 1$ alors il existe une matrice colonne C et une matrice ligne L telles que $A = CL$. (On commencera par le cas où $A = J_{n,p,1}$.)
- Application.** On suppose que A est carré de rang 1. En calculant A^2 , montrer que A est nilpotente si et seulement si $\text{tr}(A) = 0$.

Exercice 19 : Soient $A \in M_{3,2}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{2,3}(\mathbb{K})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & x & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Que vaut x ?

Exercice 20 : Soient $n \geq 2$ un entier et $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{K}^*)^n$ un n -uplet de scalaires tous non-nuls.

On note $\lambda = 1 + \sum_{j=1}^n a_j$ et $A = \left(1 + \frac{\delta_{ij}}{a_j}\right) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{a_1} & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 + \frac{1}{a_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 + \frac{1}{a_n} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$.

1) On note $X = (a_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^n$. Calculer AX . Que peut-on en déduire quant à l'inversibilité de A ?

2) On suppose à présent que $\lambda \neq 0$ et qu'il existe $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ tel que $BA = I_n$.

Soit $1 \leq j \leq n$. On note $X_j = c_j(B)$ et $e_j = c_j(I_n)$.

a) Montrer que $c_j(BA) = \frac{X_j}{a_j} + \sum_{k=1}^n X_k = e_j$ et en déduire que $\lambda \sum_{k=1}^n X_k = \sum_{j=1}^n a_j e_j$.

b) Conclure que $X_j = a_j e_j - \frac{a_j}{\lambda} \sum_{i=1}^n a_i E_i$ et préciser b_{ij} pour tout $1 \leq i, j \leq n$.

3) Conclure que A est inversible si et seulement si $\lambda \neq 0$ et donner son inverse dans ce cas. Vérifier en taille 2.

Exercice 21 : Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des scalaires et notons $A = (x_i + y_j) \in M_n(\mathbb{K})$. Calculer le rang de A .

Calcul de déterminant

Exercice 22 : Montrer avec un minimum de calcul la nullité des déterminant suivants :

$$\text{a) } \begin{vmatrix} (a+b)^2 & ab & a^2+b^2 \\ (a+c)^2 & ac & a^2+c^2 \\ (b+c)^2 & bc & b^2+c^2 \end{vmatrix}, \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 2a & a+b & a+c \\ a+b & 2b & b+c \\ a+c & b+c & 2c \end{vmatrix}, \quad \text{c) } \begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_2-b_1 & \cdots & a_n-b_1 \\ a_1-b_2 & a_2-b_2 & \cdots & a_n-b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1-b_n & a_2-b_n & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}.$$

Exercice 23 : Exprimer (sous forme de produits) les déterminants suivants :

$$\text{a) } \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ a+c & ac & a^2+c^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \end{vmatrix}, \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}, \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & c & b & cb \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{vmatrix}.$$

Exercice 24 : Soient $n \geq 2$ et $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice.

En notant $B = ((-1)^{i+j} a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$, exprimer $\det(B)$ en fonction de $\det(A)$.

Exercice 25 : Pour tout $n \geq 2$, on note $A_n = (|i-j|) \in M_n(\mathbb{K})$ et $D_n = \det(A_n)$.

1) Calculer D_2 et D_3 puis établir que, pour tout $n \geq 3$, $D_n = -2D_{n-1} - (-2)^{n-2}$.

2) Calculer $\sum_{k=0}^{n-3} (-2)^k (D_{n-k} + 2D_{n-k-1})$ et en déduire que $D_n = (1-n)(-2)^{n-2}$.

Exercice 26 : Pour tout $n \geq 2$, pour tous scalaires a, b, c avec $a \neq c$, on pose $A_n = \begin{pmatrix} b & a & \cdots & a \\ c & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ c & \cdots & c & b \end{pmatrix}$.

On note $J_n \in M_n(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1) Montrer que l'application $t \mapsto \det(A_n + tJ_n)$ est polynomiale de degré inférieur ou égal à 1.

2) En évaluant cette application en a et en c , calculer $\det(A_n)$.

Exercice 27 : Pour tout $n \geq 2$, pour tous scalaires $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$, on pose $A_n = (\delta_{ij} + a_i b_j) \in M_n(\mathbb{K})$.

1) Pour tout $n \geq 1$, montrer que $\begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_{n-1} & a_1 \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-2}b_{n-1} & a_{n-2} \\ a_{n-1}b_1 & \cdots & a_{n-1}b_{n-1} & 1+a_{n-1}b_{n-1} & a_{n-1} \\ b_1 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} & 1 \end{vmatrix} = 1$.

2) En déduire, pour tout $n \geq 2$, la valeur de $\det(A_n)$.

Exercice 28 : 1) Soient $n \geq 2$ et $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $M^2 = -I_n$. Montrer que n est pair.

2) Soient $p \geq 1$ et $M \in A_{2p+1}(\mathbb{R})$. Montrer que M n'est pas inversible.

Exercice 29 : Soient $n \geq 1$ et $(A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$. Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B) \det(A-B)$.