

Programme de colles - Semaine 4 (du 05/10 au 09/10)

Reprise du programme précédent - **Leçon 3 : Intégration sur un intervalle quelconque** - On garde :

☞ Taylor; ☞ $\Gamma(z)$; ☞ Dirichlet et Gauss; ☞ $\int_0^\infty \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt$; ☞ $\int_0^\pi \frac{dt}{1+\sin(t)}$ et on ajoute
 ☞ Si $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{K}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et si f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ (Exo 23).

Leçon 4 - Rappels et compléments de calcul algébrique

I - Calcul polynomial

- 1) Polynômes et évaluation dans une algèbre - Polynômes, degré et coefficient dominant, polynôme unitaire. Opérations, degré d'une somme ou d'un produit. Monômes, base canonique de $\mathbb{K}[T]$. Evaluation d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[T]$ en un élément α d'une $\mathbb{K}$ -algèbre $\mathcal{A}$, sous-ensemble $\mathbb{K}[\alpha]$ de $\mathcal{A}$.
- 2) Division euclidienne et dérivation - Rappels, polynôme constant, sous-espaces $\mathbb{K}_n[T]$, formule de Taylor.
- 3) Racines et multiplicité - Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et P non-nul dans $\mathbb{K}[T]$. Alors $P(\alpha) = 0$ ssi $T - \alpha$ divise P . La valuation de P en α est $v_\alpha(P) := \min\{v \in \mathbb{N} \text{ t.q. } P^{(v)}(\alpha) \neq 0\} = \max\{k \in \mathbb{N} \text{ t.q. } (T - \alpha)^k | P\}$. Convention $v_\alpha(0) = +\infty$. Cas de $v_\alpha(P + Q)$ et de $v_\alpha(PQ)$.
 Pour tout $r \geq 1$, pour tous $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ deux-à-deux distincts, $\prod_{k=1}^r (T - \alpha_k)^{v_{\alpha_k}(P)}$ divise P donc P possède au plus $\deg(P)$ racines comptées avec multiplicités. Le produit $\prod_{\alpha \in \mathbb{K}} (T - \alpha)^{v_\alpha(P)}$ est fini et divise P .
 Cas de $P \in \mathbb{K}_n[T]$ s'annulant en $n + 1$ points, identification des polynômes et des fonctions polynomiales.
- 4) Polynômes scindés - Cas des interpolateurs de Lagrange - Un polynôme non-constant $P \in \mathbb{K}[T]$ est scindé sur $\mathbb{K}$ si $\sum_{\alpha \in \mathbb{K}} v_\alpha(P) = \deg(P)$. Cas d'un polynôme scindé à racines simples.
 ☞ Polynômes interpolateurs de Lagrange $L_0, L_1, \dots, L_n$ (dans $\mathbb{K}_n[T]$) associés à $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ deux-à-deux distincts dans $\mathbb{K}$, $\sum_{i=0}^n L_i$ et $\sum_{i=0}^n \alpha_i L_i$, reste de la DE de $P \in \mathbb{K}[T]$ par $\prod_{k=0}^n (T - \alpha_k)$ à l'aide de $L_0, L_1, \dots, L_n$.
 ☞ Pour tous $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, développement $\prod_{k=1}^n (T - \alpha_k) = T^n + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sigma_k T^{n-k}$, expression de σ_1, σ_2 et σ_n .
- 5) Théorème fondamental de l'algèbre et irréductibles de $\mathbb{C}[T]$ et $\mathbb{R}[T]$ - Thm de d'Alembert-Gauss (admis). Si $P \in \mathbb{R}[T]$ admet $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ comme racine, $P(\bar{\alpha}) = 0$ et $T^2 - 2\operatorname{Re}(\alpha)T + |\alpha|^2$ divise P .
 Irréductibles de $\mathbb{C}[T]$ et de $\mathbb{R}[T]$. ☞ Formes factorisées de $T^n - 1$, forme développée de $\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} (T - \omega)$.

II - Calcul matriciel

- 1) Espaces vectoriels et sous-espaces remarquables de matrices - Notations $A = (a_{ij}) \in M_{np}(\mathbb{K})$, coefficients A_{ij} de A , lignes $l_i(A)$ et colonnes $c_j(A)$. Combinaisons linéaires et transposition. Matrices élémentaires E_{ij} de $M_{np}(\mathbb{K})$ (base canonique), identification $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$ (base canonique $(e_1, \dots, e_n)$). Matrices carrées, coefs diag et trace, sous-espaces $T_n^s(\mathbb{K})$ et $T_n^i(\mathbb{K})$, $D_n(\mathbb{K})$ (notation $\operatorname{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$), $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$.
- 2) Produit matriciel - Algèbre de matrices carrées - Produit $AB \in M_{nq}(\mathbb{K})$ de $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{pq}(\mathbb{K})$. Disposition pratique qui permet de retenir que $l_i(AB) = l_i(A)B$ et $c_j(AB) = A c_j(B)$. Associativité, calcul de $E_{ij}E_{kl}$, de AX (avec $X \in \mathbb{K}^p$) comme CL des $c_j(A)$, transposée et trace d'un produit.

Evaluation d'un polynôme en une matrice. Notion de polynôme annulateur, cas des matrices nilpotentes.

☞ Calcul de $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^k$ pour tout $k \geq 0$ (presque) sans calcul matriciel.

Produit de matrices triangulaires supérieures, coefs diagonaux. CNS de nilpotence.

Matrices inversibles et inverse (unicité), ensemble $GL_n(\mathbb{K})$ (stable par produit et transposition). Une matrice inversible est simplifiable (donc ses colonnes sont linéairement indépendantes).

CNS d'inversibilité de $D \in D_n(\mathbb{K})$. Cas d'une matrice annulée par $P \in \mathbb{K}[T]$ avec $P(0) \neq 0$, de $I_n + N$ avec N nilpotente. ☞ CNS d'inversibilité de $A \in T_n^s(\mathbb{K})$, forme de A^{-1} dans ce cas.

Relation de similitude (notation $A \underset{S}{\sim} B$), $P(A) \underset{S}{\sim} P(B)$ si $P \in \mathbb{K}[T]$, inversibilité et inverse, trace invariante.

3) Calcul matriciel par blocs - Découpage (arbitraire) en blocs. CL et transposition d'éléments de $M_{n_1+n_2, p_1+p_2}(\mathbb{K})$.

Blocs diagonaux (carrés) de $M \in M_{n_1+n_2}(\mathbb{K})$. Généralisations à plus de blocs, cas de $A = (c_1(A)|\dots|c_p(A))$.

Produit par blocs, cas de matrices triangulaires ou diagonales par blocs, CNS d'inversibilité et calcul d'inverse.

☞ Ex : Si $A \in M_n(\mathbb{K})$, CNS d'inversibilité (et inverse) de $\begin{pmatrix} I_n & A \\ A & I_n \end{pmatrix}$.

On ne fera le chapitre suivant que lundi mais ce sont des révisions!

III - Systèmes linéaires et équations matricielles

1) Noyau et image d'une matrice - Cas des matrices échelonnées réduites - Correspondance entre système et équation matricielle $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^p$ (avec $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathbb{K}^n$). Image et noyau de A .

Notion de matrice éch. réd. (colonnes principales et secondaires), calcul de $\ker(R)$ et de $\text{Im}(R)$.

Si r est le nombre de colonnes principales de R : $R = 0$ ssi $r = 0$, $\ker(R) = \{0\}$ ssi $r = p$, $\text{Im}(R) = \mathbb{K}^n$ ssi $r = n$, $R \in GL_n(\mathbb{K})$ ssi $r = n = p$ ssi $R = I_n$.

2) Equivalence par lignes et algorithme de Gauss-Jordan - Définition de $A \underset{L}{\sim} B$ (et alors $\ker(A) = \ker(B)$).

Deux matrices éch. réd. équivalentes par lignes sont égales. Matrices de transformation élémentaire (dilatation, transvection, transposition). Effet de la multiplication à gauche par une telle matrice : opération élémentaire sur les lignes. Gauss-Jordan appliqué à $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ donne l'unique $R \in M_{np}(\mathbb{K})$ éch. réd. telle que $A \underset{L}{\sim} R$.

Définition du rang et des colonnes principales de A .

3) Variante de l'algorithme de Gauss-Jordan - Calcul d'inverse - Opérations élémentaires parallèles sur A et I_n .

Gauss-Jordan donne $(A|I_n) \underset{L}{\sim} (R|P)$ (avec $P \in GL_n(\mathbb{K})$) tels que $PA = R$. Rqs : Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, $P = A^{-1}$;

Si $r := \text{rg}(A) < n$ et si $\tilde{P} \in M_{n-r, n}(\mathbb{K})$ est formée des $n - r$ dernières lignes de P , $\text{Im}(A) = \ker(\tilde{P})$.

4) Matrices équivalentes - Définition de $A \underset{C}{\sim} B$. Effet de la multiplication à droite par une matrice de transformation élémentaire : opération élémentaire sur les colonnes.

Def de l'équivalence $A \sim B$ (ne pas confondre avec la similitude !) Notation $J_{n,p,r} := \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{np}(\mathbb{K})$.

Thm : 1) $\text{rg}(AB) \leq \min\{\text{rg}(A), \text{rg}(B)\}$ (cas de A, B carrées avec AB inversible) ;

2) La multiplication par une matrice inversible ne change pas le rang ;

3) $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ est de rang r ssi $A \sim J_{n,p,r}$.

On en déduit que A est inversible ssi elle est simplifiable et que $\text{rg}(A^T) = \text{rg}(A)$.