

Corrections d'exercices Feuille 3 : Intégration sur un intervalle quelconque

Exercice 24 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\int_0^\infty f(t)dt$ existe.

1) Soit $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = \ell$. Fixons $\varepsilon > 0$.

Par définition, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $t \geq A$, on a $|F(t) - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Par tout $x > A$, on a donc

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^x F(t)dt - \ell \right| = \left| \frac{1}{x} \int_0^x (F(t) - \ell)dt \right| \leq \frac{1}{x} \int_0^A |F(t) - \ell|dt + \frac{1}{x} \int_A^x \frac{\varepsilon}{2}dt \leq \frac{1}{x} \int_0^A |F(t) - \ell|dt + \frac{\varepsilon(x - A)}{2x}.$$

On a immédiatement $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \int_0^A |F(t) - \ell|dt + \frac{\varepsilon(x - A)}{2x} \right) = \frac{\varepsilon}{2}$ donc il existe $B \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout

$x \geq B$, on a $\frac{1}{x} \int_0^A |F(t) - \ell|dt + \frac{\varepsilon(x - A)}{2x} \leq \varepsilon$. Ainsi, pour tout $x \geq \max\{A, B\}$, on a $\left| \frac{1}{x} \int_0^x F(t)dt - \ell \right| \leq \varepsilon$,

ce qui assure que $\frac{1}{x} \int_0^x F(t)dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$.

2) Puisque f est continue sur $[0, 1]$, elle est bornée sur ce segment et, pour tout $t \in [0, 1]$, on peut écrire que $|tf(t)| \leq t\|f\|_\infty^{[0,1]}$. On en déduit que, pour tout $x \in]0, 1]$, on a

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^x tf(t)dt \right| \leq \frac{1}{x} \int_0^x |tf(t)|dt \leq \frac{\|f\|_\infty^{[0,1]}}{x} \int_0^x tdt = \frac{x\|f\|_\infty^{[0,1]}}{2}.$$

Par encadrement, on conclut que $\frac{1}{x} \int_0^x tf(t)dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$. Alors F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et, par hypothèse $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = F(0) + \int_0^\infty f(t)dt$ existe. En intégrant par partie, on a, pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{x} \int_0^x tf(t)dt = \frac{1}{x} [tF(t)]_0^x - \frac{1}{x} \int_0^x F(t)dt = F(x) - \frac{1}{x} \int_0^x F(t)dt.$$

D'après le théorème de Cesaro démontré à la question précédente, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x F(t)dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et on

peut conclure que $\frac{1}{x} \int_0^x tf(t)dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

3) On va intégrer par partie et écrire (après avoir justifié que c'est légitime) que

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x^2} \int_0^x tf(t)dt \right) dx = \left[-\frac{1}{x} \int_0^x tf(t)dt \right]_0^\infty + \int_0^\infty f(t)dt.$$

Les fonctions $x \mapsto -\frac{1}{x}$ et $x \mapsto \int_0^x tf(t)dt$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (car $t \mapsto f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$). La pre-

mière se dérive en $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et la seconde en $x \mapsto xf(x)$. D'après la question précédente, $\left[-\frac{1}{x} \int_0^x tf(t)dt \right]_0^\infty$

existe donc les intégrales $\int_0^\infty \left(\frac{1}{x^2} \int_0^x tf(t)dt \right) dx$ et $\int_0^\infty -\frac{tf(t)}{t}dt = -\int_0^\infty f(t)dt$ ont même nature. La seconde converge par hypothèse donc on peut bien écrire

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x^2} \int_0^x tf(t)dt \right) dx = \left[-\frac{1}{x} \int_0^x tf(t)dt \right]_0^\infty + \int_0^\infty f(t)dt = \int_0^\infty f(t)dt.$$

Remarque. On a vu des intégrales doubles. On peut également considérer des intégrales "triangulaires" et intervenir, parfois, les intégrales. Ici, on aurait

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t) dt \right) dx = \iint_{0 < t \leq x < \infty} \frac{t f(t)}{x^2} dt dx = \iint_{0 < t \leq x < \infty} \frac{t f(t)}{x^2} dx dt = \int_0^\infty \left(t f(t) \int_t^\infty \frac{dx}{x^2} \right) dt.$$

Puisque, pour tout $t > 0$, on a $\int_t^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{t}$, on pourrait conclure que $\int_0^\infty \left(\frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t) dt \right) dx = \int_0^\infty f(t) dt$.

Exercice 25 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.

La fonction $\varphi : t \mapsto t - \frac{1}{t}$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $t \neq 0$, $\varphi'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} > 1$ donc φ est strictement croissante sur les intervalles $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$. Le calcul des limites en $-\infty$, 0^- , 0^+ et $+\infty$ assure que φ réalise deux bijections strictement croissantes $\varphi_- : \mathbb{R}_-^* \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ et $\varphi_+ : \mathbb{R}_+^* \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$.

Le mieux ici est d'ajouter un dessin où on prendra soin de représenter l'asymptote $y = t$ (les positions relatives au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$ sont faciles à déterminer) et les tangentes aux points d'abscisse -1 et 1 (le calcul de $\varphi''(t) = -\frac{1}{t^3}$ donne la convexité de φ_- et la concavité de φ_+).

Les changements de variable $x = \varphi_-(t)$ et $x = \varphi_+(t)$ donnent alors les deux égalités

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) f \left(t - \frac{1}{t} \right) dt \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) f \left(t - \frac{1}{t} \right) dt.$$

Pour tout $t > 0$, on a, par positivité de f sur $\mathbb{R}$, $0 \leq f \left(t - \frac{1}{t} \right) \leq \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) f \left(t - \frac{1}{t} \right)$ donc, par majoration,

$\int_0^\infty f \left(t - \frac{1}{t} \right) dt$ existe et on a

$$\int_0^\infty f \left(t - \frac{1}{t} \right) dt \leq \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) f \left(t - \frac{1}{t} \right) dt = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$$

De même, $\int_{-\infty}^0 f \left(t - \frac{1}{t} \right) dt$ existe et $\int_{-\infty}^0 f \left(t - \frac{1}{t} \right) dt \leq \int_{-\infty}^0 \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) f \left(t - \frac{1}{t} \right) dt = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$.

Puisque $\int_0^\infty f \left(t - \frac{1}{t} \right) dt$ existe, l'égalité $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) f \left(t - \frac{1}{t} \right) dt$ assure que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} f \left(t - \frac{1}{t} \right) dt$ existe et qu'on a

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_0^{+\infty} f \left(t - \frac{1}{t} \right) dt + \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} f \left(t - \frac{1}{t} \right) dt.$$

La fonction $\psi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_-^*$ définie par $\psi(t) = -\frac{1}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (pour tout $t < 0$, on calcule $\psi'(t) = \frac{1}{t^2} > 0$), bijective et strictement croissante. Le changement de variable $u = -\frac{1}{t}$ assure donc que les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} f \left(t - \frac{1}{t} \right) dt \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^0 f \left(-\frac{1}{u} + u \right) du = \int_{-\infty}^0 f \left(u - \frac{1}{u} \right) du$$

ont même nature et puisque la seconde existe, qu'elles ont la même valeur. Par conséquent, on a bien

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}_-} f \left(t - \frac{1}{t} \right) dt + \int_{\mathbb{R}_+} f \left(t - \frac{1}{t} \right) dt.$$

Application : Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = e^{-x^2}$. Elle est bien continue et intégrable

sur $\mathbb{R}$. Par parité, on a $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Pour tout $t \neq 0$, on a $f\left(t - \frac{1}{t}\right) = e^{-(t^2 - 2 + \frac{1}{t^2})} = e^2 e^{-(t^2 + \frac{1}{t^2})}$ et, d'après ce qui précède, $\int_{\mathbb{R}} e^{-(t^2 + \frac{1}{t^2})} dt$ existe.

De plus, on a

$$e^2 \int_{\mathbb{R}} e^{-(t^2 + \frac{1}{t^2})} dt = \int_{\mathbb{R}} f\left(t - \frac{1}{t}\right) dt = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \sqrt{\pi} \quad \text{donc} \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-(t^2 + \frac{1}{t^2})} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{e^2}.$$

Exercice 26 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f et f'' sont de carrés intégrables sur $\mathbb{R}$.

1) a) Soit $x \geq 0$. En intégrant par partie (sur le segment $[0, x]$), on a

$$\int_0^x f'^2(t) dt = [f(t)f'(t)]_0^x - \int_0^x (ff'')(t) dt, \quad \text{i.e.,} \quad (ff')(x) = (ff')(0) + \int_0^x f'^2(t) dt + \int_0^x (ff'')(t) dt.$$

b) Puisque $f'^2 \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto \int_0^x f'^2(t) dt$ est croissante. D'après le théorème de la limite monotone, elle possède donc une limite (dans $\overline{\mathbb{R}}$) lorsque x tend vers $+\infty$.

Puisque f et f'' sont L^2 sur $\mathbb{R}$, leur produit ff'' est L^1 sur $\mathbb{R}$ (donc sur $\mathbb{R}_+$) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x (ff'')(t) dt$ existe (et est fini). On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ff')(x)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$. On notera $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} (ff')(x)$.

c) Supposons que $\ell > 0$. En posant $M = 1$ si $\ell = +\infty$ et $M = \frac{\ell}{2}$ si $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, la définition de la limite assure qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $t \geq A$, $(ff')(t) \geq M$. Pour tout $x \geq A$, on a donc

$$\frac{f(x)^2}{2} = \frac{f(A)^2}{2} + \int_A^x (ff')(t) dt \geq \frac{f(A)^2}{2} + M(x - A) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

En particulier, il existe $B \geq A$ tel que, pour tout $t \geq B$, $f(t)^2 \geq 1$ et, pour tout $x \geq B$, on a (comme précédemment) $\int_B^x f(t)^2 dt \geq x - B \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, ce qui contredit le fait que f est carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

Supposons que $\ell < 0$. En posant $M = -1$ si $\ell = -\infty$ et $M = \frac{\ell}{2}$ si $\ell \in \mathbb{R}_-^*$, la définition de la limite assure qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $t \geq A$, $(ff')(t) \leq M$. Pour tout $x \geq A$, on a donc

$$\frac{f(x)^2}{2} = \frac{f(A)^2}{2} + \int_A^x (ff')(t) dt \leq \frac{f(A)^2}{2} + M(x - A) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty,$$

ce qui est évidemment contradictoire puisque $\frac{f(x)^2}{2} \geq 0$ pour tout $x \geq 0$. Ainsi, on a bien $\ell = 0$.

2) On va utiliser ce qui précède en faisant une symétrie par rapport à l'origine et en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(-x)$. La fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ ainsi définie est encore de classe $\mathcal{C}^2$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g'(x) = -f'(-x)$ et $g''(x) = f''(-x)$. La fonction g est encore de carré intégrable puisque, avec le changement de variable $y = -x$, les intégrales $\int_{\mathbb{R}} g^2(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f^2(-x) dx$ et $\int_{\mathbb{R}} f^2(y) dy$ sont de même nature. De même, g'' est encore de carré intégrable. La question précédente assure donc que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (gg')(x) = 0$, i.e., que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (ff')(-x) = 0 \quad \text{et, par composition,} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (ff')(x) = 0.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ff')(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (ff')(x) = 0$, on peut affirmer, en intégrant par partie sur $\mathbb{R}$, que les intégrales $\int_{\mathbb{R}} f'^2$ et $\int_{\mathbb{R}} ff''$ sont donc de même nature. Puisque f et f'' sont L^2 sur $\mathbb{R}$, leur produit ff'' est L^1 sur $\mathbb{R}$ et $\int_{\mathbb{R}} (ff'')(t) dt$ existe. Par conséquent, $\int_{\mathbb{R}} f'^2 = [f(t)f'(t)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} ff'' = - \int_{\mathbb{R}} ff''$. L'inégalité de

Cauchy-Schwarz permet de conclure puisque $\int_{\mathbb{R}} f'^2 = - \int_{\mathbb{R}} ff'' = \left| \int_{\mathbb{R}} ff'' \right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} f''^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.