

Corrigé du DM2 (A rendre le 1/10/2026)

Problème. Dans ce problème, on se propose de calculer de deux manières les intégrales de Fresnel

$$\int_0^\infty \cos(t^2) dt \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \sin(t^2) dt.$$

Les parties **I** et **II** sont indépendantes.

Question préliminaire. Existence des intégrales de Fresnel

a) La fonction à valeurs complexes $t \mapsto e^{it^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et l'expression des composantes réelles et imaginaires donne, pour tout $x \geq 0$,

$$\int_0^x e^{it^2} dt = \int_0^x \cos(t^2) dt + i \int_0^x \sin(t^2) dt.$$

Par définition de la limite d'une fonction à valeurs complexes, $\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$ existe si et seulement si les intégrales de Fresnel existent et on a dans ce cas

$$\int_0^\infty e^{it^2} dt = \int_0^\infty \cos(t^2) dt + i \int_0^\infty \sin(t^2) dt.$$

b) Montrons que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} dt$ existe. La fonction $t \mapsto \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $t > 0$, on a $\left| \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} \right| = \frac{1}{\sqrt{t}}$ qui est intégrable en 0^+ d'après Riemann.

En intégrant par parties, on a par ailleurs, pour tout $x \geq 1$,

$$\int_1^x \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} dt = \left[\frac{e^{ix}}{i\sqrt{x}} - \frac{e^i}{i} \right] + \int_1^x \frac{e^{it}}{2it\sqrt{t}} dt.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ix}}{i\sqrt{x}} = 0$ et puisque, pour tout $t \geq 1$, $\left| \frac{e^{ixt}}{2it\sqrt{t}} \right| = \frac{1}{2t\sqrt{t}}$ qui est intégrable en $+\infty$ d'après

Riemann, l'intégrale $\int_1^\infty \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} dt$ existe.

La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, en faisant le changement de variable

$u = \sqrt{t}$, on a $\int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{iu^2} du$. D'après **a**, les intégrales de Fresnel existent.

Partie I - Utilisation des séries de Fourier.

A - Généralités sur les séries de Fourier. On fixe $T > 0$ et une fonction T -périodique $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur tout segment.

1) Noyaux de Dirichlet. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{-\frac{2ik\pi t}{T}}$.

a) Soit $n \geq 0$. Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\frac{1}{T} \int_0^T D_n(t) dt = \frac{1}{T} \sum_{k=-n}^n \int_0^T e^{-\frac{2ik\pi t}{T}} dt = 1 + \sum_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^n \left[\frac{e^{-\frac{2ik\pi t}{T}}}{-2ik\pi} \right]_0^T = 1 + \sum_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^n \left[1 - \frac{e^{-2ik\pi}}{1} \right] = 1.$$

b) Soient $n \geq 0$ et $t \in]0, T[$. On a donc $0 \leq \frac{2\pi t}{T} < 2\pi$ et $D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{-\frac{2ik\pi t}{T}}$ est une somme géométrique de raison $e^{-\frac{2i\pi t}{T}} \neq 1$. On a donc

$$D_n(t) = \frac{e^{\frac{2in\pi t}{T}} - e^{-\frac{2i(n+1)\pi t}{T}}}{1 - e^{-\frac{2i\pi t}{T}}} = \frac{e^{i\frac{(2n+1)\pi t}{T}} - e^{-i\frac{(2n+1)\pi t}{T}}}{e^{\frac{i\pi t}{T}} - e^{-\frac{i\pi t}{T}}} = \frac{e^{i\frac{(2n+1)\pi t}{T}} - e^{-i\frac{(2n+1)\pi t}{T}}}{2i \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}.$$

Dans les questions **2** à **4**, on fixe $x \in \mathbb{R}$.

2) Soit $n \geq 0$. Il est clair que la fonction D_n est T -périodique comme combinaison linéaire de fonctions qui le sont. Puisque f est T -périodique, le produit $u \mapsto f(x+u)D_n(u)$ l'est également.

Par linéarité de l'intégrale et en faisant le changement de variable $t = x + u$, on a

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-n}^n \int_0^T f(t) e^{\frac{2ik\pi(x-t)}{T}} dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-n}^n \int_{-x}^{-x+T} f(x+u) e^{-\frac{2ik\pi u}{T}} du \\ &= \frac{1}{T} \int_{-x}^{-x+T} f(x+u) D_n(u) du \end{aligned}$$

et, par T -périodicité de la fonction intégrée, on conclut que $S_n(f)(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x+u) D_n(u) du$.

Avec **1.a** et par linéarité de l'intégrale à nouveau, on a donc

$$S_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x+u) D_n(u) du - \frac{f(x)}{T} \int_0^T D_n(u) du = \frac{1}{T} \int_0^T [f(x+u) - f(x)] D_n(u) du.$$

3) Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$ et puisque $u \mapsto \sin\left(\frac{\pi u}{T}\right)$ ne s'annule pas sur $]0, T[$, la fonction définie par $u \mapsto \frac{f(x+u) - f(x)}{\sin\left(\frac{\pi u}{T}\right)}$ est continue sur $]0, T[$. Puisque f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur tout segment,

$$\lim_{t \rightarrow x^+} f'(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow (x+T)^-} f'(t)$$

existent et sont finies. D'après le théorème de la limite de la dérivée, cela implique (en posant $h = u - T$ dans le second cas et en utilisant la périodicité de f) que

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(x+u) - f(x)}{u} \quad \text{et} \quad \lim_{u \rightarrow T^-} \frac{f(x+u) - f(x)}{u - T} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+T+h) - f(x+T)}{h}$$

existent et sont finies. Puisque $\sin\left(\frac{\pi u}{T}\right) \underset{u \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\pi u}{T}$ et que $\sin\left(\frac{\pi u}{T}\right) = \sin\left(\frac{\pi(T-u)}{T}\right) \underset{u \rightarrow T^-}{\sim} -\frac{\pi(u-T)}{T}$,

la fonction définie par $u \mapsto \frac{f(x+u) - f(x)}{\sin\left(\frac{\pi u}{T}\right)}$ est prolongeable par continuité en 0 et en T .

On note $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{K}$ ce prolongement.

4) D'après **1.b** et **2**, et avec deux changements de variable, on a, pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) - f(x) &= \frac{1}{2iT} \left[\int_0^T \left(g(u) e^{i\frac{\pi u}{T}} \right) e^{\frac{2in\pi u}{T}} du - \int_0^T \left(g(u) e^{-i\frac{\pi u}{T}} \right) e^{-\frac{2in\pi u}{T}} du \right] \\ &= \frac{1}{4i\pi} \left[\int_0^{2\pi} \left(g\left(\frac{tT}{2\pi}\right) e^{i\frac{t}{2}} \right) e^{int} dt - \int_{-2\pi}^0 \left(g\left(-\frac{tT}{2\pi}\right) e^{i\frac{t}{2}} \right) e^{int} dt \right]. \end{aligned}$$

Puisque les fonctions $t \mapsto g\left(\frac{tT}{2\pi}\right) e^{i\frac{t}{2}}$ et $t \mapsto g\left(-\frac{tT}{2\pi}\right) e^{i\frac{t}{2}}$ sont continues sur $[0, 2\pi]$ et $[-2\pi, 0]$ respectivement, le lemme de Riemann-Lebesgue s'applique et $S_n(f)(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$.

B - Application au calcul des intégrales de Fresnel. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $f(t) = e^{2i\pi(t - \lfloor t \rfloor)^2}$.

5) a) Puisque la fonction "partie fractionnaire" $t \mapsto t - \lfloor t \rfloor$ est 1-périodique, la fonction f l'est aussi.

Pour tout $t \in [0, 1[$, on a $t - \lfloor t \rfloor = t$ et $f(t) = e^{2i\pi t^2}$. Il est donc clair que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, 1[$, donc sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. De plus, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(t) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(t) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(t) = e^{2i\pi} = 1,$$

ce qui prouve la continuité de f en 0, et donc en tout entier par 1-périodicité. Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Par définition, on a, par linéarité de l'intégrale

$$c_k(f) = \int_0^1 e^{2i\pi t^2} e^{-2i\pi k t} dt = \int_0^1 e^{2i\pi(t^2 - kt)} dt = e^{-\frac{i\pi k^2}{2}} \int_0^1 e^{2i\pi(t - \frac{k}{2})^2} dt.$$

Le changement de variable $u = t - \frac{k}{2}$ donne donc bien $c_k(f) = e^{-\frac{i\pi k^2}{2}} \int_{-\frac{k}{2}}^{1-\frac{k}{2}} e^{2i\pi u^2} du$.

c) Avec un changement d'indice et avec la relation de Chasles, on a donc, pour tout $n \geq 0$,

$$\sum_{k=-n}^n c_{2k}(f) = \sum_{k=-n}^n e^{-2i\pi k^2} \int_{-k}^{1-k} e^{2i\pi t^2} dt = \sum_{l=-n}^n \int_l^{l+1} e^{2i\pi t^2} dt = \int_{-n}^{n+1} e^{2i\pi t^2} dt.$$

6) Pour tout $t \in]0, 1[$, rappelons que $f(t) = e^{2i\pi t^2}$. On calcule $f'(t) = 4i\pi t e^{2i\pi t^2}$ donc on a

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f'(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 1^-} f'(t) = 4i\pi,$$

ce qui prouve que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur la période $[0, 1]$ de f , et donc sur tout segment de $\mathbb{R}$ (un segment contient un nombre fini d'entiers). Le théorème de Dirichlet s'applique donc et on a

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) = f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ik\pi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k c_k(f) = f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{i\pi}{2}} = i.$$

On en déduit que $\frac{f(0) + f(\frac{1}{2})}{2} = \frac{1+i}{2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1 + (-1)^k}{2} c_k(f) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \text{ pair}}}^{\infty} c_k(f) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{2l}(f).$

7) Dans la question préliminaire, on a montré que l'intégrale $\int_0^\infty e^{it^2} dt$ existait. Avec le changement de variable

(strictement décroissant) $u = -t$, l'intégrale $\int_{-\infty}^0 e^{it^2} dt$ existe également (et a la même valeur). Par Chasles,

l'intégrale $\int_{-\infty}^\infty e^{it^2} dt$ existe également et vaut $2 \int_0^\infty e^{it^2} dt$. On fait alors le changement de variable (strictement croissant) $t = \sqrt{2\pi}u$ pour conclure que

$$\int_{-\infty}^\infty e^{2i\pi u^2} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{it^2} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{it^2} dt.$$

Puisque $\int_{-\infty}^\infty e^{2i\pi t^2} dt$ existe, on déduit de 5.c que $\sum_{k=-n}^n c_{2k}(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^\infty e^{2i\pi t^2} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{it^2} dt$.

Avec la question 6, on obtient par unicité de la limite que $\int_0^\infty e^{it^2} dt = \frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$ et on peut conclure que

$$\int_0^\infty \cos(t^2) dt = \int_0^\infty \sin(t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Partie II - Utilisation d'une intégrale à paramètre

Pour tout $x \geq 0$, on pose $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{ix(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ et $g(x) = f(x^2) - i \left(\int_0^x e^{it^2} dt \right)^2$.

8) Pour tout $u \in]1, 2]$, on pose $\varphi(u) = \frac{1}{2u\sqrt{u-1}}$. On fixe $0 < \varepsilon < 1$.

a) Faisons le changement de variable $1+t^2 = u$, équivalent à $t = \sqrt{u-1}$. On a alors $dt = \frac{du}{2\sqrt{u-1}}$ et, en calculant les nouvelles bornes, on obtient bien, pour tout $x \geq 0$,

$$\int_\varepsilon^1 \frac{e^{ix(1+t^2)}}{1+t^2} dt = \int_{1+\varepsilon^2}^2 \frac{e^{ixu}}{u} \frac{du}{2\sqrt{u-1}} = \int_{1+\varepsilon^2}^2 e^{ixu} \varphi(u) du.$$

b) Puisque $u \mapsto \sqrt{u-1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$, la fonction φ l'est également comme inverse d'un produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ qui ne s'annulent pas. Elle est donc bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, 2]$, et donc sur $[1+\varepsilon^2, 2]$. Fixons $x > 0$ et intégrons par partie : on obtient (*tout à fait dans l'esprit du lemme de Riemann-Lebesgue dans le cas d'une fonction $\mathcal{C}^1$*)

$$\int_{1+\varepsilon^2}^2 e^{ixu} \varphi(u) du = \left[\frac{e^{ixu} \varphi(u)}{ix} \right]_{1+\varepsilon^2}^2 - \frac{1}{ix} \int_{1+\varepsilon^2}^2 e^{ixu} \varphi'(u) du$$

donc, par inégalité triangulaire,

$$\left| \int_{1+\varepsilon^2}^2 e^{ixu} \varphi(u) du \right| \leq \frac{1}{x} \left[\varphi(1+\varepsilon^2) + \varphi(2) + \int_{1+\varepsilon^2}^2 |\varphi'(u)| du \right].$$

Le terme entre crochet ne dépend pas de x donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{1+\varepsilon^2}^2 e^{ixu} \varphi(u) du = 0$ par encadrement.

c) Pour tout $x > 0$, pour tout $t \in [0, 1]$, on a $\left| \frac{e^{ix(1+t^2)}}{1+t^2} \right| \leq 1$ donc, par inégalité triangulaire et d'après 8.a, on a

$$|f(x)| \leq \left| \int_0^\varepsilon \frac{e^{ix(1+t^2)}}{1+t^2} dt \right| + \left| \int_{1+\varepsilon^2}^2 e^{ixu} \varphi(u) du \right| \leq \varepsilon + \left| \int_{1+\varepsilon^2}^2 e^{ixu} \varphi(u) du \right|.$$

D'après 8.b, il existe A tel que, pour tout $x \geq A$, $\left| \int_{1+\varepsilon^2}^2 e^{ixu} \varphi(u) du \right| \leq \varepsilon$ et donc $|f(x)| \leq 2\varepsilon$.

Comme $\varepsilon > 0$ est aussi petit qu'on veut, c'est la définition de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

9) Soient $x \geq 0$ et $h \neq 0$.

a) On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 à la fonction $\psi : \theta \mapsto e^{i\theta}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Puisque son polynôme de Taylor en 0 à l'ordre 1 est $\theta \mapsto 1 + i\theta$, et puisque, pour tout $t \in [0, \theta]$ (ou $[\theta, 0]$ si $\theta < 0$), on a $\psi''(t) = -e^{it}$, on a, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$|e^{i\theta} - (1 + i\theta)| \leq \|\psi''\|_{\infty}^{[0, \theta]} \frac{\theta^2}{2} = \frac{\theta^2}{2}.$$

b) Par linéarité de l'intégrale et par inégalité triangulaire, on a donc, puisque $|e^{ix(1+t^2)}| = 1$ pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - i \int_0^1 e^{ix(1+t^2)} dt \right| &\leq \int_0^1 \left| \frac{e^{i(x+h)(1+t^2)} - e^{ix(1+t^2)} - ih(1+t^2)e^{ix(1+t^2)}}{h(1+t^2)} \right| dt \\ &\leq \int_0^1 \frac{|e^{ih(1+t^2)} - 1 - ih(1+t^2)|}{|h|(1+t^2)} dt \\ &\leq \frac{|h|}{2} \int_0^1 (1+t^2) dt = \frac{2|h|}{3} \end{aligned}$$

On en déduit par encadrement que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = i \int_0^1 e^{ix(1+t^2)} dt$ ce qui est la définition de la dérivabilité de f en x et du fait que $f'(x) = i \int_0^1 e^{ix(1+t^2)} dt$.

c) Par linéarité encore, on a donc $f'(x) = ie^{ix} \int_0^1 e^{ixt^2} dt$.

Le changement de variable $u = \sqrt{x}t$ donne alors bien $f'(x) = i \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{iu^2} du$.

10) a) D'après ce qui précède, la fonction $x \mapsto f(x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$. La fonction $x \mapsto \int_0^x e^{it^2} dt$ est la primitive d'une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et son carré l'est tout autant. Ainsi, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme combinaison linéaire de fonctions qui le sont et, pour tout $x \geq 0$, on a

$$g'(x) = 2xf'(x^2) - 2ie^{ix^2} \int_0^x e^{it^2} dt = 2xi \frac{e^{ix^2}}{x} \int_0^x e^{it^2} dt - 2ie^{ix^2} \int_0^x e^{it^2} dt = 0.$$

b) On en déduit que g est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, égale à sa valeur $g(0) = f(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$ en 0.

Puisque l'intégrale $\int_0^\infty e^{it^2} dt$ existe d'après la question préliminaire, on peut conclure avec la question 8.c

que $\frac{\pi}{4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -i \left(\int_0^\infty e^{it^2} dt \right)^2$, ce qui équivaut bien à $\left(\int_0^\infty e^{it^2} dt \right)^2 = \frac{i\pi}{4}$.

11) a) La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, \pi]$ et on a l'équivalent $\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \sqrt{t}$ donc l'intégrale $\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt$, faussement impropre en 0, existe. Pour tout $k \geq 1$, l'intégrale $\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{\sqrt{t+k\pi}} dt$ (d'une fonction continue sur un segment) existe également et la série $\sum_{k \geq 0} (-1)^k \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{\sqrt{t+k\pi}} dt$ est bien définie.

Il est clair que, pour tout $k \geq 0$, pour tout $t \in]0, \pi]$, on a $0 \leq \frac{\sin(t)}{\sqrt{t+(k+1)\pi}} \leq \frac{\sin(t)}{\sqrt{t+k\pi}} \leq \frac{1}{\sqrt{k\pi}}$ donc, par croissance de l'intégrale, $\sum_{k \geq 0} (-1)^k \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{\sqrt{t+k\pi}} dt$ converge d'après le critère spécial des séries alternées.

b) Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{\sqrt{t+k\pi}} dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi \frac{\sin(t+k\pi)}{\sqrt{t+k\pi}} dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{n\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt.$$

Le changement de variable $t = u^2$ donne $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{\sqrt{t+k\pi}} dt = 2 \int_0^{\sqrt{n\pi}} \sin(u^2) du$ et, puisque les

intégrales de Fresnel existent, on peut conclure que $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t+k\pi}} dt = 2 \int_0^{\infty} \sin(t^2) dt$.

En regroupant les termes de la série deux-par-deux, on a aussi

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \sin(t) \left(\frac{1}{\sqrt{t+2k\pi}} - \frac{1}{\sqrt{t+(2k+1)\pi}} \right) dt = \int_0^{\infty} \sin(t^2) dt$$

et $\int_0^{\infty} \sin(t^2) dt$ apparaît sous cette forme comme la somme d'une série à termes positifs. On peut donc conclure que $\int_0^{\infty} \sin(t^2) dt \geq 0$.

c) On a montré que $\left(\int_0^{\infty} e^{it^2} dt \right)^2 = \frac{i\pi}{4} = \left(\frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \right)^2$. Par conséquent, on a

$$\text{soit } \int_0^{\infty} e^{it^2} dt = \frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \quad \text{donc } \int_0^{\infty} \cos(t^2) dt = \int_0^{\infty} \sin(t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}},$$

$$\text{soit } \int_0^{\infty} e^{it^2} dt = -\frac{(1+i)\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \quad \text{donc } \int_0^{\infty} \cos(t^2) dt = \int_0^{\infty} \sin(t^2) dt = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Le calcul de signe précédent assure qu'on est dans le premier cas.