

DM2 (A rendre le 1/10/2026)

Problème. Dans ce problème, on se propose de calculer de deux manières les intégrales de Fresnel

$$\int_0^\infty \cos(t^2) dt \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \sin(t^2) dt.$$

Les parties **I** et **II** sont indépendantes.

Question préliminaire. Existence des intégrales de Fresnel

- a) Justifier que les intégrales de Fresnel existent si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$ existe.
- b) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} dt$ existe et conclure quant aux intégrales précédentes.

Partie I - Utilisation des séries de Fourier.

A - Généralités sur les séries de Fourier. On fixe $T > 0$ et une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ continue et T -périodique.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on pose $c_k(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-\frac{2ik\pi t}{T}} dt$: ce sont les coefficients de Fourier de f .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f en x est la suite de terme général $S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{\frac{2ik\pi x}{T}}$.

1) Noyaux de Dirichlet. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{-\frac{2ik\pi t}{T}}$.

a) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $\frac{1}{T} \int_0^T D_n(t) dt = 1$.

b) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, pour tout $t \in]0, T[$, on a $D_n(t) = \frac{e^{i\frac{(2n+1)\pi t}{T}} - e^{-i\frac{(2n+1)\pi t}{T}}}{2i \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}$.

Dans les questions **2** à **4**, on fixe $x \in \mathbb{R}$.

2) Justifier que, pour tout $n \geq 0$, la fonction $u \mapsto f(x+u)D_n(u)$ est T -périodique et en déduire que

$$S_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{T} \int_0^T [f(x+u) - f(x)] D_n(u) du.$$

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = \{c_k, 0 \leq k \leq n\}$ de $[a, b]$ telle que, pour tout $1 \leq k \leq n$, $f|_{]c_{k-1}, c_k[}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]c_{k-1}, c_k[$ et telle que $\lim_{x \rightarrow c_{k-1}^+} f'(x)$ et $\lim_{x \rightarrow c_k^-} f'(x)$ existent

(et sont finies). Dans les questions **3** et **4**, on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur tout segment et on montre le théorème de Dirichlet : la série de Fourier de f converge et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{\frac{2ik\pi x}{T}}$.

3) Justifier que la fonction définie sur $]0, T[$ par $u \mapsto \frac{f(x+u) - f(x)}{\sin(\frac{\pi u}{T})}$ est continue sur $]0, T[$ et montrer qu'elle est prolongeable en une fonction $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{K}$ continue sur $[0, T]$.

(On pourra utiliser le théorème de la limite de la dérivée et des équivalents de $\sin$ en 0^+ et en π^- .)

4) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$S_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{4i\pi} \left[\int_0^{2\pi} \left(g\left(\frac{tT}{2\pi}\right) e^{i\frac{t}{2}} \right) e^{int} dt - \int_{-2\pi}^0 \left(g\left(-\frac{tT}{2\pi}\right) e^{i\frac{t}{2}} \right) e^{int} dt \right]$$

et conclure à l'aide du lemme de Riemann-Lebesgue (Feuille 3, Exercice 7) que $S_n(f)(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x)$.

B - Application au calcul des intégrales de Fresnel. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $f(t) = e^{2i\pi(t - \lfloor t \rfloor)^2}$.

5) a) Montrer que f est 1-périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que ses coefficients de Fourier sont, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $c_k(f) = e^{-\frac{i\pi k^2}{2}} \int_{-\frac{k}{2}}^{1-\frac{k}{2}} e^{2i\pi t^2} dt$.

c) En déduire que, pour tout $n \geq 0$, $\sum_{k=-n}^n c_{2k}(f) = \int_{-n}^{n+1} e^{2i\pi t^2} dt$.

6) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur tout segment puis calculer $\frac{f(0) + f(\frac{1}{2})}{2}$ de deux manières.

7) Montrer avec la question préliminaire que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi t^2} dt$ existe et en déduire la valeur des intégrales de Fresnel.

Partie II - Utilisation d'une intégrale à paramètre

Pour tout $x \geq 0$, on pose $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{ix(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ et $g(x) = f(x^2) - i \left(\int_0^x e^{it^2} dt \right)^2$.

8) Pour tout $u \in]1, 2]$, on pose $\varphi(u) = \frac{1}{2u\sqrt{u-1}}$. On fixe $0 < \varepsilon < 1$.

a) Montrer que $\int_{\varepsilon}^1 \frac{e^{ix(1+t^2)}}{1+t^2} dt = \int_{1+\varepsilon^2}^2 e^{ixu} \varphi(u) du$.

b) Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, 2]$ et en déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{1+\varepsilon^2}^2 e^{ixu} \varphi(u) du = 0$.

c) Conclure (soigneusement) que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

9) Soient $x \geq 0$ et $h \neq 0$.

a) Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $|e^{i\theta} - (1 + i\theta)| \leq \frac{\theta^2}{2}$.

b) En déduire que $\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - i \int_0^1 e^{ix(1+t^2)} dt \right| \leq \frac{2|h|}{3}$ et conclure que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

c) Montrer que $f'(x) = i \frac{e^{ix}}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{it^2} dt$

10) a) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \geq 0$, calculer $g'(x)$.

b) En déduire que $\left(\int_0^{\infty} e^{it^2} dt \right)^2 = \frac{i\pi}{4}$.

11) a) Montrer que la série $\sum_{k \geq 0} (-1)^k \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t+k\pi}} dt$ converge (on vérifiera l'existence du terme d'indice 0.)

b) Montrer que $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t+k\pi}} dt = 2 \int_0^{\infty} \sin(t^2) dt$ et en déduire le signe de cette intégrale.

c) Conclure quant à la valeur des intégrales de Fresnel.