

Corrections d'exercices de la feuille 4 : Rappels et compléments de calcul algébrique

Exercice 1 (Formule de Vandermonde) : Soient $p, q \geq 0$ deux entiers. Avec Newton, on calcule directement

$$(1 + T)^{p+q} = \sum_{n=0}^{p+q} \binom{p+q}{n} T^n.$$

On peut aussi écrire que $(1+T)^{p+q} = (1+T)^p(1+T)^q$, développer chaque facteurs avec Newton comme-ci-dessus puis appliquer la formule du produit :

$$(1 + T)^{p+q} = \left(\sum_{i=0}^p \binom{p}{i} T^i \right) \left(\sum_{j=0}^q \binom{q}{j} T^j \right) = \sum_{n=0}^{p+q} \left(\sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} \right) T^n.$$

L'égalité de deux polynômes est l'égalité de leurs coefficients homologues donc on a bien, pour tout $0 \leq n \leq p+q$,

$$\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{p}{n-k} \binom{q}{k}.$$

Exercice 3 : Dire qu'un polynôme $P \in \mathbb{C}[T]$ possède une racine multiple revient à dire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $v_\alpha(P) \geq 2$ donc à dire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$. Soit $n \geq 3$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que

$$\begin{cases} P_n(\alpha) = (\alpha - 1)^n - (\alpha^n - 1) = 0 \\ P'_n(\alpha) = n[(\alpha - 1)^{n-1} - \alpha^{n-1}] = 0 \end{cases} \quad , \quad i.e., \quad \begin{cases} (\alpha - 1)^n = \alpha^n - 1 \\ (\alpha - 1)^{n-1} = \alpha^{n-1} \end{cases}.$$

On a donc $\alpha^n - 1 = (\alpha - 1)^n = (\alpha - 1)\alpha^{n-1} = \alpha^n - \alpha^{n-1}$ donc $(\alpha - 1)^{n-1} = \alpha^{n-1} = 1$.

En passant au module, on en déduit que $|\alpha| = |\alpha - 1| = 1$ et on conclut géométriquement (*faire un dessin*) que $\alpha = e^{\frac{\pm i\pi}{3}}$. La condition $\alpha^{n-1} = 1$ force alors $6|n-1$.

Réciproquement, s'il existe $k \geq 1$ tel que $n = 6k + 1$, on calcule $e^{\frac{i\pi}{3}} - 1 = e^{\frac{2i\pi}{3}} = j$ (et on note que $e^{\frac{i\pi}{3}} = -j^2$) donc on a $\begin{cases} P_n(e^{\frac{i\pi}{3}}) = (e^{\frac{i\pi}{3}} - 1)^{6k+1} - (e^{2ik\pi + \frac{i\pi}{3}} - 1) = e^{4ik\pi + \frac{2i\pi}{3}} - e^{2ik\pi + \frac{i\pi}{3}} + 1 = j + j^2 + 1 = 0 \\ P'_n(e^{\frac{i\pi}{3}}) = n[(\alpha - 1)^{n-1} - \alpha^{n-1}] = n[e^{4ik\pi} - e^{2ik\pi}] = 0 \end{cases}$.

On peut conclure que $P_n = (T - 1)^n - (T^n - 1)$ possède (au moins) une racine multiple si et seulement si $6|n-1$.

Exercice 4 : Soit $n \geq 2$ un entier. On note $\omega_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$ pour tout $0 \leq k \leq n-1$. On a déjà corrigé 1, 2.

3) a) Pour tout $0 \leq k \leq n-1$, on a $(T + \omega_k)^n - 1 = \prod_{l=0}^{n-1} ((T + \omega_k) - \omega_l)$ donc

$$\prod_{k=0}^{n-1} ((T + \omega_k)^n - 1) = \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{l=0}^{n-1} (T - (\omega_l - \omega_k)).$$

Pour tout $0 \leq k \leq n-1$, on a $T^n - (\omega_k - 1)^n = \prod_{l=0}^{n-1} (T - \omega_l(\omega_k - 1))$ donc

$$\prod_{k=0}^{n-1} (T^n - (\omega_k - 1)^n) = \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{l=0}^{n-1} (T - (\omega_l \omega_k - \omega_l)) = \prod_{l=0}^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (T - (\omega_k \omega_l - \omega_k)) = \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{l=0}^{n-1} (T - (\omega_k \omega_l - \omega_k)).$$

- b) Soit $0 \leq k \leq n-1$. Pour tout $\omega \in \mathbb{U}_n$, on a $(\omega_k \omega)^n = \omega_k^n \omega^n = 1$ donc l'application $\mathbb{U}_n \rightarrow \mathbb{U}_n; \omega \mapsto \omega_k \omega$ est bien définie. De la même façon, l'application $\mathbb{U}_n \rightarrow \mathbb{U}_n; \omega \mapsto \omega_k^{-1} \omega$ est bien définie car $\omega_k^{-1} \in \mathbb{U}_n$. Ces deux applications sont manifestement réciproques l'une de l'autre donc la première est bijective. On peut donc faire le changement d'indice $\omega' = \omega_k \omega$ pour écrire que

$$\prod_{l=0}^{n-1} (T - (\omega_k \omega_l - \omega_k)) = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (T - (\omega_k \omega - \omega_k)) = \prod_{\omega' \in \mathbb{U}_n} (T - (\omega' - \omega_k)) = \prod_{l=0}^{n-1} (T - (\omega_l - \omega_k)).$$

$$\text{On a donc bien } \prod_{k=0}^{n-1} (T^n - (\omega_k - 1)^n) = \prod_{k=0}^{n-1} \prod_{l=0}^{n-1} (T - (\omega_l - \omega_k)) = \prod_{k=0}^{n-1} ((T + \omega_k)^n - 1).$$

Exercice 6 : On considère le polynôme $P = T^3 + 3T - 12i$, dont on note α_1, α_2 et α_3 les racines complexes

- 1) Par définition, on a $P = T^3 + 3T - 12i = (T - \alpha_1)(T - \alpha_2)(T - \alpha_3)$ donc, d'après les relations coefficients-racines, on a

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \quad \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 = 3 \quad \text{et} \quad \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = 12i.$$

On calcule

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2(\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3)$$

pour en déduire, avec ce qui précède, que $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = -6$.

- 2) On calcule la division euclidienne de T^5 par P (avec la méthode de l'échelle comme en CMI) et on trouve

$$T^5 = (T^2 - 3)P + (12iT^2 + 9T - 36i).$$

Pour tout $1 \leq k \leq 3$, on a donc $\alpha_k^5 = 12i\alpha_k^2 + 9\alpha_k - 36i$ et, en sommant de $k = 1$ à 3, on obtient, avec la question précédente, $\alpha_1^5 + \alpha_2^5 + \alpha_3^5 = 12i(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) + 9(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - 108i = -180i$.

Exercice 11 : Soit $n \geq 2$ un entier. On note

$$Z_n = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \text{ telle que, pour tout } M \in M_n(\mathbb{K}), AM = MA\}.$$

C'est le *centre* de $M_n(\mathbb{K})$, i.e., l'ensemble des matrices A de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les autres.

- a) Soient $A_1, A_2 \in Z_n$. Alors, pour tout $M \in M_n(\mathbb{K})$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$(\lambda A_1 + A_2)M = \lambda(A_1 M) + (A_2 M) = \lambda(MA_1) + (MA_2) = M(\lambda A_1 + A_2)$$

et

$$(A_1 A_2)M = A_1(A_2 M) = (A_1 M)A_2 = M(A_1 A_2),$$

ce qui prouve que Z_n est stable par combinaison linéaire et par produit.

- b) Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ et $1 \leq i, j \leq n$. Pour tout $A = (a_{kl}) \in M_n(\mathbb{K})$, on peut écrire $A = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} E_{kl}$

et on calcule

$$AE_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} E_{kl} E_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} \delta_{li} E_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ki} E_{kj}$$

et

$$E_{ij}A = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} E_{ij} E_{kl} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} \delta_{jk} E_{il} = \sum_{l=1}^n a_{jl} E_{il}.$$

- c) Il est clair que, pour tout $M \in M_n(\mathbb{K})$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda I_n)M = M(\lambda I_n)$ donc $\{\lambda I_n, \lambda \in \mathbb{K}\} \subset Z_n$.

Réciproquement, soit $A \in Z_n$. Alors, pour tout $1 \leq i, j \leq n$, on a $AE_{ij} = E_{ij}A$ et on utilise la question

précédente.

Les seuls coefficients potentiellement non-nuls de $AE_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ki}E_{kj}$ sont sur sa colonne j .

Les seuls coefficients potentiellement non-nuls de $E_{ij}A = \sum_{l=1}^n a_{jl}E_{il}$ sont sur sa ligne i .

Puisque ces deux matrices sont égales, leur seul coefficient non-nul est $a_{ii} = a_{jj}$ en position i, j .

En outre, pour tout $1 \leq k \leq n$ avec $k \neq i$, $a_{ki} = 0$ et tous les coefficients de la colonne i de A sont nuls à l'exception du coefficient diagonal. De même, pour tout $1 \leq l \leq n$ avec $l \neq j$, $a_{jl} = 0$ et tous les coefficients de la ligne j de A sont nuls à l'exception du coefficient diagonal. Comme i, j sont quelconques, A est diagonale et tous ses coefficients diagonaux sont égaux deux-à-deux, ce qui prouve que $A \in \{\lambda I_n, \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Par double-inclusion, on a donc bien

$$Z_n = \{\lambda I_n, \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

Exercice 18 (Matrices de rang 1) : Soit $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ une matrice.

- a) Si $C \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ est une colonne non-nulle, on a $1 \leq \text{rg}(C) \leq \min\{n, 1\} = 1$ donc $\text{rg}(C) = 1$.
Si $L \in M_{1,p}(\mathbb{K})$ est une ligne non-nulle, on a $1 \leq \text{rg}(L) \leq \min\{1, p\} = 1$ donc $\text{rg}(L) = 1$.
On a donc $\text{rg}(A) = \text{rg}(CL) \leq \min\{\text{rg}(C), \text{rg}(L)\} = 1$. En outre, il existe $1 \leq i \leq n$ tel que $C_i \neq 0$ et il existe $1 \leq j \leq p$ tel que $L_j \neq 0$. Puisque $A_{ij} = C_i L_j \neq 0$, on a $A \neq 0$ donc $\text{rg}(A) \geq 1$ et on a bien $\text{rg}(A) = 1$.
- b) Supposons réciproquement que $\text{rg}(A) = 1$. Alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ tel que $A = P J_{n,p,1} Q$.
En notant $C_0 = e_1$ (premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^n = M_{n,1}(\mathbb{K})$) et $L_0 = (1, 0, \dots, 0) \in M_{p,1}(\mathbb{K})$, on a immédiatement $J_{n,p,1} = C_0 L_0$ et $A = (P C_0)(L_0 Q) = c_1(P) l_1(Q)$ et A est bien le produit d'une colonne non-nulle par une ligne non-nulle.
- c) **Application.** On suppose que A est carré de rang 1. D'après ce qui précède, il existe une colonne non-nulle C et une ligne non-nulle L (toutes les deux de taille n) telles que $A = CL$. On calcule alors $A^2 = (CL)(CL) = C(LC)L$.
Puisque le produit LC d'une ligne par une colonne est un scalaire, on peut écrire que $A^2 = (CL)(CL) = (LC)(CL) = (LC)A$. En outre, on a $\text{tr}(A) = \text{tr}(CL) = \text{tr}(LC) = (LC)$ car la trace d'une matrice carrée de taille 1 est simplement son unique coefficient ! On a ainsi $A^2 = \text{tr}(A)A$ et, par une récurrence immédiate, $A^k = (\text{tr}(A))^{k-1}A$ pour tout $k \geq 1$. Ainsi, A est nilpotente si et seulement si $\text{tr}(A) = 0$.

Exercice 25 : Pour tout $n \geq 2$, on note $D_n = \det((|i-j|)_{1 \leq i,j \leq n}) =$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 2 & 1 & \ddots & \ddots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

- 1) On a $D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$. On notera qu'en faisant $l_2 \leftarrow l_2 - l_1$ puis $c_2 \leftarrow c_2 - c_1$, on a aussi $D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$.
Pour $n = 3$, on commence par faire $l_3 \leftarrow l_3 - l_2$ puis $l_2 \leftarrow l_2 - l_1$, suivi symétriquement de $c_3 \leftarrow c_3 - c_2$ puis $c_2 \leftarrow c_2 - c_1$, et on calcule, en développant enfin par rapport à la dernière colonne,

$$D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 2D_2 = 6.$$

Pour tout $n \geq 3$, on procède pareillement en commençant par faire $l_k \leftarrow l_k - l_{k-1}$ pour k variant (en décroissant) de n à 2. On obtient ainsi (ci-contre)

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 & -1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Symétriquement, on fait maintenant $c_k \leftarrow c_k - c_{k-1}$ pour k variant (en décroissant) de n à 2 et on obtient

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \vdots & \ddots & -2 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

On peut maintenant développer suivant la dernière colonne pour obtenir, en développant le premier terme par rapport à la dernière ligne et en reconnaissant D_{n-1} dans le dernier terme,

$$D_n = (-1)^{1+n} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \vdots & \ddots & -2 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -2 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{\text{ordre } n-1} - 2D_{n-1} = (-1)^{1+n}(-1)^{(n-1)+1} \underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -2 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -2 \end{vmatrix}}_{\text{ordre } n-2} - 2D_{n-1}.$$

Ainsi, on a finalement $D_n = -2D_{n-1} - (-2)^{n-2}$, ce qu'il fallait démontrer.

2) Pour tout $n \geq 3$, on a, par télescopage et avec le calcul de D_2 ,

$$\sum_{k=0}^{n-3} (-2)^k (D_{n-k} + 2D_{n-k-1}) = \sum_{k=0}^{n-3} [(-2)^k D_{n-k} - (-2)^{k+1} D_{n-k-1}] = D_n - (-2)^{n-2} D_2 = D_n + (-2)^{n-2}.$$

Par ailleurs, d'après la question précédente, on a $D_n + 2D_{n-1} = -(-2)^{n-2}$ pour tout $n \geq 3$ donc

$$\sum_{k=0}^{n-3} (-2)^k (D_{n-k} + 2D_{n-k-1}) = - \sum_{k=0}^{n-3} (-2)^{n-2} = -(n-2)(-2)^{n-2}.$$

On peut donc conclure que $D_n = -(-2)^{n-2} - (n-2)(-2)^{n-2} = (1-n)(-2)^{n-2}$, ce qu'il fallait démontrer.

Si on doit faire le DS2 de samedi en distanciel, il faudra :

- Télécharger et installer CamScanner sur votre téléphone (gratuit). N'attendez pas samedi pour le faire ni pour voir comment l'appli fonctionne !
- Récupérer le sujet du DS samedi matin à 8h00 sur cahier de prépa ;
- Composer pendant 4h puis scanner votre travail avec CamScanner (il est possible de grouper les pages, ne m'envoyez pas autant de .pdf que de pages à votre travail) ;
- Transférer ce scan sur cahier de prépa **avant 12h15** (rubrique "transfert de documents" accessible via les icônes en haut du menu à gauche) ;
- M'apporter votre copie papier dès que possible.