

# Leçon 5 : Rappels et compléments d'algèbre linéaire

## Table des matières

|            |                                                                                  |          |
|------------|----------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>I</b>   | <b>Espaces et sous-espaces vectoriels</b>                                        | <b>1</b> |
| I.1        | Produits d'espaces vectoriels . . . . .                                          | 1        |
| I.2        | Sous-espaces vectoriels . . . . .                                                | 2        |
| I.3        | Sommes directes . . . . .                                                        | 2        |
| <b>II</b>  | <b>Applications linéaires</b>                                                    | <b>3</b> |
| II.1       | Généralités . . . . .                                                            | 3        |
| II.2       | Noyau et image d'une application linéaire - Cas des hyperplans . . . . .         | 3        |
| II.3       | Algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel - Cas des projecteurs . . . . . | 4        |
| II.4       | Sous-espaces stables par un endomorphisme - Endomorphisme induit . . . . .       | 5        |
| <b>III</b> | <b>Algèbre linéaire en dimension finie</b>                                       | <b>6</b> |
| III.1      | Bases et dimension . . . . .                                                     | 6        |
| III.2      | Dimension des sous-espaces, rang des applications linéaires . . . . .            | 7        |
| <b>IV</b>  | <b>Matrices représentatives dans des bases</b>                                   | <b>9</b> |
| IV.1       | Matrice représentative d'une famille de vecteurs - Matrice de passage . . . . .  | 9        |
| IV.2       | Matrice représentative d'une application linéaire (dans des bases) . . . . .     | 10       |
| IV.3       | Matrice représentative d'un endomorphisme dans une base . . . . .                | 11       |

## I Espaces et sous-espaces vectoriels

### I.1 Produits d'espaces vectoriels

Un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $(E, +, \cdot)$  est un ensemble  $E$  non-vide muni d'une addition  $+$  :  $E \times E \rightarrow E$  et d'une multiplication par un scalaire  $\cdot$  :  $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$  satisfaisant 8 propriétés (*à savoir retrouver*). En particulier, le neutre de l'addition est le vecteur nul, noté  $0_E$  ou simplement  $0$ .

Les objets fondamentaux dans un espace vectoriel sont les combinaisons linéaires  $\sum_{k=1}^r \lambda_k v_k$  de vecteurs  $v_1, \dots, v_r$  de  $E$  qu'on peut reconstruire par récurrence à partir des combinaisons linéaires élémentaires  $\lambda v + w$ .

Si  $E_1, \dots, E_r$  sont des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, le produit cartésien  $\prod_{k=1}^r E_k = E_1 \times \dots \times E_r$ , muni des opérations

$$(v_1, \dots, v_r) + (w_1, \dots, w_r) = (v_1 + w_1, \dots, v_r + w_r) \quad \text{et} \quad \lambda \cdot (v_1, \dots, v_r) = (\lambda v_1, \dots, \lambda v_r),$$

est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Son neutre est le  $r$ -uplet  $0 = (0_{E_1}, \dots, 0_{E_r})$ .

Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, on pourra considérer aussi  $E^r = E \times \dots \times E$  (formé des  $r$ -uplets de vecteurs de  $E$ ) et, pour tout ensemble  $\Omega$ , l'espace  $E^\Omega$  formé de toutes les familles  $(v_\omega)_{\omega \in \Omega}$  de vecteurs de  $E$  paramétrées par  $\Omega$ . Cet espace vectoriel s'identifie à l'espace  $\mathcal{F}(\Omega, E)$  des applications  $f : \Omega \rightarrow E$  (où, pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $f(\omega) = v_\omega$ ).

**Exemples I.1 : 1)**  $\mathbb{K}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (et la loi externe  $\cdot$  est la multiplication  $\times$  de  $\mathbb{K}$ ).

Pour tout  $r$ ,  $\mathbb{K}^r$  est bien connu et muni d'une structure de  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Pour  $n, p \geq 1$ ,  $\mathbb{K}^{np}$  s'identifie à l'espace vectoriel  $M_{np}(\mathbb{K})$  des matrices de taille  $(n, p)$ .

- 2) L'ensemble  $\mathbb{K}[T]$  des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
- 3) Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $E^{\mathbb{N}}$  et  $E^{\mathcal{D}}$  (où  $\mathcal{D}$  est un domaine réel) sont les espaces de suites et de fonctions (définies sur  $\mathcal{D}$  et) à valeurs dans  $E$ .

## I.2 Sous-espaces vectoriels

Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, un sous-espace vectoriel de  $E$  est une partie  $F$  de  $E$  contenant  $0$  et stable par combinaisons linéaires (les CL élémentaires suffisent). Un sous-espace de  $E$  est aussi un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel !

On retiendra le cas des sous-espaces triviaux  $\{0_E\}$  et  $E$  et, pour tout  $v \neq 0$  dans  $E$ , de la droite engendrée par  $v$ , notée  $\mathbb{K}.v = \{\lambda v, \lambda \in \mathbb{K}\}$ . Plus généralement, un sous-espace vectoriel est une droite s'il est distinct de  $\{0\}$  et s'il n'a pas d'autres sous-espaces que ses sous-espaces triviaux. On convient que  $\mathbb{K}.0_E = \{0_E\}$ .

Une intersection quelconque de sous-espaces vectoriels de  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  (et c'est le plus grand (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de  $E$  contenu dans chaque sous-espace de l'intersection).

Une réunion de sous-espaces vectoriels de  $E$  n'est pas un sous-espace (sauf dans le cas où l'un d'eux contient tous les autres !) Si  $F_1, \dots, F_r$  sont des sous-espaces de  $E$ , on définit donc la somme (finie) de sous-espaces vectoriels

$$\sum_{k=1}^r F_k = \left\{ \sum_{k=1}^r v_k, (v_1, \dots, v_r) \in \prod_{k=1}^r F_k \right\}.$$

C'est le plus petit sous-espace de  $E$  contenant la réunion  $\bigcup_{k=1}^r F_k$ . L'associativité et la commutativité de la réunion rendent donc la somme des sous-espaces associative et commutative. Par contre, on ne peut ni simplifier ni soustraire des sous-espaces !

**Exemples I.2 : 1)** Toute matrice dans  $M_n(\mathbb{K})$  se décompose en la somme d'une matrice triangulaire supérieure et d'une matrice triangulaire inférieure : on a  $M_n(\mathbb{K}) = T_n^s(\mathbb{K}) + T_n^i(\mathbb{K})$ .

2) Toute matrice dans  $M_n(\mathbb{K})$  se décompose en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique : on a  $M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) + A_n(\mathbb{K})$ .

3) Si  $v_1, \dots, v_r$  sont des vecteurs de  $E$ , la somme de droites  $\sum_{k=1}^r \mathbb{K}.v_k$  est l'ensemble des combinaisons linéaires de  $v_1, \dots, v_r$ . C'est aussi le plus petit sous-espace de  $E$  contenant  $v_1, \dots, v_r$ , qu'on note aussi  $\text{Vect}(v_1, \dots, v_r)$ .

## I.3 Sommes directes

**Proposition-Définition I.3 :** Soit  $(F_i)_{i \in I}$  une famille finie de sous-espaces vectoriels de  $E$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) Pour toute famille de vecteurs  $(v_i) \in \prod_{i \in I} F_i$ ,  $\sum_{i \in I} v_i = 0$  implique  $v_i = 0$  pour tout  $i \in I$ .
- (ii) Pour tout vecteur  $v \in \sum_{i \in I} F_i$ , il existe une unique famille de vecteurs  $(v_i) \in \prod_{i \in I} F_i$  telle que  $\sum_{i \in I} v_i = v$ .

Lorsque ces conditions sont satisfaites, on dit que la somme  $\sum_{i \in I} F_i$  est directe. On la note alors  $\bigoplus_{i \in I} F_i$ .

**Remarque I.4 :** Dans le cas de deux sev  $F_1, F_2$ , la somme  $F_1 + F_2$  est directe si et seulement si  $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ . Le cas de trois droites du plan assure que trois sous-espaces (ou plus) en sommes directes deux-à-deux ne sont pas nécessairement en somme directe et il ne faudra pas généraliser abusivement le critère précédent.

On dit que  $F_1$  et  $F_2$  sont supplémentaires dans  $E$  lorsque  $E = F_1 \oplus F_2$ . On démontre bien souvent un tel résultat par analyse-synthèse.

**Exercice I.5 : 1)** Montrer que  $S_n(\mathbb{K})$  et  $A_n(\mathbb{K})$  sont supplémentaires dans  $M_n(\mathbb{K})$ .

**2)** Soient  $(F_i)_{i \in I}$  une famille finie de sous-espaces vectoriels de  $E$  et  $I = I_1 \sqcup I_2$  une partition de  $I$ . Montrer que la somme  $\sum_{i \in I} F_i$  est directe si et seulement si les sommes  $\sum_{i \in I_1} F_i$  et  $\sum_{i \in I_2} F_i$  sont directes et si la somme

$$\left( \bigoplus_{i \in I_1} F_i \right) + \left( \bigoplus_{i \in I_2} F_i \right) \text{ est également directe. On a alors dans ce cas } \bigoplus_{i \in I} F_i = \left( \bigoplus_{i \in I_1} F_i \right) \oplus \left( \bigoplus_{i \in I_2} F_i \right).$$

(On notera en particulier qu'une "sous"-somme d'une somme directe est directe et que la somme directe est associative et commutative.)

## II Applications linéaires

### II.1 Généralités

Si  $E, E'$  sont deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, une application  $f : E \rightarrow E'$  est linéaire si elle est compatible avec les combinaisons linéaires au sens où, pour tout  $r \geq 1$ , pour tout  $(v_1, \dots, v_r) \in E^r$ , pour tout  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{K}^r$ ,

$$f \left( \sum_{k=1}^r \lambda_k v_k \right) = \sum_{k=1}^r \lambda_k f(v_k).$$

A nouveau, il suffit de le vérifier pour les combinaisons linéaires élémentaires. On a alors  $f(0_E) = 0_{E'}$ .

Si  $f : E \rightarrow E'$  est bijective, on dit que  $f$  est un isomorphisme. Sa bijection réciproque  $f^{-1} : E' \rightarrow E$  est alors également linéaire et on dit que  $E$  et  $E'$  sont isomorphes.

Si  $F \subset E$  est un sous-espace de  $E$ , la restriction de  $f : E \rightarrow E'$  à  $F$  est l'application (linéaire)  $f|_F : F \rightarrow E'$  définie, pour tout  $v \in F$ , par  $f|_F(v) = f(v)$ .

**Remarque II.1 :** Dire que la somme  $\sum_{i \in I} F_i$  est directe revient à dire que l'application (linéaire) canonique

$$\prod_{i \in I} F_i \rightarrow \sum_{i \in I} F_i \text{ définie par } (v_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} v_i \text{ est un isomorphisme.}$$

On note  $\mathcal{L}(E, E')$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $E'$ . Si  $f, g : E \rightarrow E'$  sont linéaires, si  $\lambda \in \mathbb{K}$ , l'application  $\lambda \cdot f + g : E \rightarrow E'$  est linéaire et  $\mathcal{L}(E, E')$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(E, E')$ .

Si  $E''$  est un troisième  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, si  $f : E \rightarrow E'$  et  $g : E' \rightarrow E''$  sont deux applications linéaires, la composée  $g \circ f : E \xrightarrow{f} E' \xrightarrow{g} E''$  est encore linéaire et la composition  $\circ : \mathcal{L}(E, E') \times \mathcal{L}(E', E'') \rightarrow \mathcal{L}(E, E'')$  est bilinéaire. La composée de deux isomorphismes est encore un isomorphisme (d'inverse égal à la composée des inverses "dans l'autre sens") et dire que deux espaces vectoriels sont isomorphes est une relation d'équivalence.

Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , l'application  $\mathcal{L}(E, E') \rightarrow \mathcal{L}(F, E')$  définie par  $f \mapsto f|_F$  est linéaire.

Dans ce contexte, on a le théorème fondamental suivant :

**Théorème II.2 :** Soient  $E, E'$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, et  $F_1, F_2$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $E$ . L'application  $\mathcal{L}(E, E') \rightarrow \mathcal{L}(F_1, E') \times \mathcal{L}(F_2, E')$  définie par  $f \mapsto (f|_{F_1}, f|_{F_2})$  est (linéaire et) bijective. On généralise bien sûr ce résultat au cas où  $E$  est la somme directe finie de sous-espaces vectoriels  $(F_i)_{i \in I}$ .

### II.2 Noyau et image d'une application linéaire - Cas des hyperplans

Soit  $f : E \rightarrow E'$  une application linéaire.

- Si  $F'$  est un sous-espace vectoriel de  $E'$ ,  $f^{-1}(F') = \{v \in E \text{ t.q. } f(v) \in F'\}$  est un sous-espace de  $E$ .  
C'est en particulier le cas du noyau de  $f$ , défini comme  $\ker(f) = f^{-1}(\{0_{E'}\})$ , et on montre que  $f$  est injective si et seulement si  $\ker(f) = \{0_E\}$ .

- Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ ,  $f(F) = \{f(v), v \in F\}$  est un sous-espace de  $E'$ .

C'est en particulier le cas de l'image de  $f$ , définie comme  $\text{Im}(f) = f(E)$ .

**Remarque II.3 :** Rappelons que si  $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ , l'application linéaire  $\Phi_A : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$  canoniquement associée à  $A$  est définie par  $X \mapsto AX$ . On a bien sûr  $\ker(\Phi_A) = \ker(A)$  et  $\text{Im}(\Phi_A) = \text{Im}(A)$ .

L'application  $\Phi : M_{np}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$  définie par  $A \mapsto \Phi_A$  est linéaire, injective et compatible avec la multiplication au sens où, pour tout  $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ , pour tout  $B \in M_{pq}(\mathbb{K})$ , on a  $\Phi_{AB} = \Phi_A \circ \Phi_B : \mathbb{K}^q \xrightarrow{\Phi_B} \mathbb{K}^p \xrightarrow{\Phi_A} \mathbb{K}^n$ . On montrera bien sûr que cette application linéaire est un isomorphisme !

**Exercice II.4 : 1) Noyau et image de  $f + g$ .** Soient  $f, g : E \rightarrow E'$  deux applications linéaires.

- Montrer que  $(\ker(f) \cap \ker(g)) \subset \ker(f + g)$ . On généralise par récurrence à une somme finie quelconque. Montrer que si  $\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$  alors l'inclusion précédente est une égalité.
- Montrer que  $\text{Im}(f + g) \subset (\text{Im}(f) + \text{Im}(g))$ . On généralise par récurrence à une somme finie quelconque. Montrer que si  $\ker(f) + \ker(g) = E$  alors l'inclusion précédente est une égalité (*c'est plus difficile*).

**2) Noyau et image de  $g \circ f$ .** Soient  $f : E \rightarrow E'$  et  $g : E' \rightarrow E''$  deux applications linéaires.

- Montrer que  $g \circ f = 0$  si et seulement si  $\text{Im}(f) \subset \ker(g)$ .
- Montrer que  $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$  avec égalité si et seulement si  $\text{Im}(f) \cap \ker(g) = \{0\}$  dans  $E'$ .
- Montrer que  $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$  avec égalité si et seulement si  $\text{Im}(f) + \ker(g) = E'$ .

**Remarque II.5 :** On notera que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ ,  $\ker(\lambda f) = \ker(f)$  et  $\text{Im}(\lambda f) = \text{Im}(f)$ .

**Exercice II.6 (Formes linéaires et hyperplans) :** Une application linéaire  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$  est une forme linéaire.

**1)** Dans cette question, on fixe une forme linéaire  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$  non-nulle.

- Justifier que  $\varphi$  est surjective. On dit que son noyau  $H := \ker(\varphi)$  est un hyperplan de  $E$ .
- Montrer que, pour toute droite vectorielle  $D$  de  $E$ , on a soit  $D \subset H$ , soit  $H \oplus D = E$ .
- Soit  $\psi : E \rightarrow \mathbb{K}$  une seconde forme linéaire non-nulle. Montrer que  $\ker(\varphi) = \ker(\psi)$  si et seulement s'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  tel que  $\psi = \lambda\varphi$  dans  $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ .

**2)** Réciproquement, soit  $H$  un sous-espace vectoriel de  $E$  tel qu'il existe une droite vectorielle  $D$  de  $E$  telle que  $H \oplus D = E$ . Montrer qu'il existe une forme linéaire  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$  non-nulle telle que  $H = \ker(\varphi)$ .

### II.3 Algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel - Cas des projecteurs

Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $\mathcal{L}(E)$  désigne l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans lui-même. On dit que  $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$  est la  $\mathbb{K}$ -algèbre des endomorphismes de  $E$ . Le neutre de la composition est l'identité  $I_E$  de  $E$ . Pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ , l'application  $\lambda I_E \in \mathcal{L}(E)$  est l'homothétie de rapport  $\lambda$ .

Un endomorphisme  $f : E \rightarrow E$  bijectif est un automorphisme de  $E$ . On note  $\text{GL}(E)$  l'ensemble des automorphismes de  $E$ , qui est stable par composition.

Comme dans le cas des matrices carrées, si  $f \in \mathcal{L}(E)$ , si  $P = \sum_{k=1}^{\infty} a_k T^k \in \mathbb{K}[T]$ , on peut évaluer  $P$  en  $f$  et calculer

l'endomorphisme  $P(f) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f^k \in \mathcal{L}(E)$  (on rappelle que  $f^0 = I_E$ ). Si  $P, Q$  sont deux polynômes, on a

$$(P + Q)(f) = P(f) + Q(f) \quad \text{et} \quad P(f) \circ Q(f) = (PQ)(f) = (QP)(f) = Q(f) \circ P(f).$$

Comme dans le cas des matrices, on définit la notion de polynôme annulateur de  $f$  (et on rappelle que tout multiple d'un polynôme annulateur de  $f$  est encore annulateur de  $f$ ) et d'endomorphisme nilpotent.

Si  $f$  est annulé par un polynôme  $P \in \mathbb{K}[T]$  tel que  $P(0) \neq 0$ , alors  $f$  est bijective et sa réciproque est un polynôme en  $f$ . En particulier, si  $f$  est nilpotent,  $I_E + f$  est bijective.

**Remarque II.7 : Attention !** Avec les notations ci-dessus, si  $v$  est un vecteur de  $E$ , la notation  $P(f)(v)$  a un sens : c'est l'image par  $P(f) \in \mathcal{L}(E)$  du vecteur  $v$ . *A contrario*, puisque  $f(v)$  est un élément de  $E$  qui, *a priori*, n'est pas une  $\mathbb{K}$ -algèbre (comment multiplier deux vecteurs ?), la notation  $P(f(v))$  n'en a aucun !

**Exercice II.8 (Projecteurs) :** Un projecteur de  $E$  est un endomorphisme  $p$  de  $E$  tel que  $p^2 = p$ .  
En d'autres termes,  $p$  est un endomorphisme annulé par le polynôme  $T^2 - T = T(T - 1) \in \mathbb{K}[T]$ .

- 1) Montrer que  $I_E - p$  est également un projecteur de  $E$  (c'est le projecteur associé à  $p$ ).
- 2) Montrer que  $\text{Im}(p) = \ker(p - I_E)$  (pour tout  $v \in E$ , on a  $v \in \text{Im}(p)$  si et seulement si  $p(v) = v$ ).
- 3) Montrer que  $E = \text{Im}(p) \oplus \ker(p)$  (pour tout  $v \in E$ , on a  $v = p(v) + (v - p(v))$  dans cette décomposition.)

**Remarques II.9 :** 1) Réciproquement, si  $E = F_1 \oplus F_2$ , si on définit  $p_1 : E \rightarrow E$  en posant, pour tout  $v = v_1 + v_2$  dans  $E = F_1 \oplus F_2$ ,  $p_1(v) = v_1$ ,  $p_1$  est le projecteur sur  $F_1$  parallèlement à  $F_2$  (i.e., avec  $\text{Im}(p_1) = F_1$  et  $\ker(p_1) = F_2$ ). Le projecteur associé est  $p_2 : E \rightarrow E$  qui, à tout  $v \in E$ , associe  $p_2(v) = v_2$ .

- 2) Plus généralement, supposons que  $E = \bigoplus_{k=1}^r F_k$  et, pour tout  $1 \leq i \leq r$ , définissons  $p_i : E \rightarrow E$  en posant

$$p_i(v) = v_i \text{ pour tout } v = \sum_{k=1}^r v_k \text{ dans } E = \bigoplus_{k=1}^r F_k. \text{ Alors } p_i \text{ est un projecteur de } E \text{ avec } \text{Im}(p_i) = F_i \text{ et}$$

$$\ker(p_i) = \bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^r F_k. \text{ On dit que } p_1, \dots, p_r \text{ sont les } \underline{\text{projecteurs associés à la décomposition}} \text{ } E = \bigoplus_{k=1}^r F_k.$$

On notera que  $\sum_{i=1}^r p_i = I_E$  et que, pour tous  $1 \leq i < j \leq r$ ,  $p_i \circ p_j = p_j \circ p_i = 0$ .

**Exercice II.10 :** Montrer réciproquement que si  $p_1, \dots, p_r : E \rightarrow E$  sont des projecteurs tels que  $1 \leq i < j \leq r$ ,  $p_i \circ p_j = p_j \circ p_i = 0$  et tels que  $\sum_{i=1}^r p_i = I_E$ , alors  $E = \bigoplus_{i=1}^r \text{Im}(p_i)$ .

**Exercice II.11 (Symétries) :** Une symétrie de  $E$  est un endomorphisme  $s$  de  $E$  tel que  $s^2 = I_E$ .

En d'autres termes,  $s$  est un endomorphisme annulé par le polynôme  $T^2 - 1 = (T + 1)(T - 1) \in \mathbb{K}[T]$ .

Montrer que  $E = \ker(s - I_E) \oplus \ker(s + I_E)$  et écrire la décomposition de tout vecteur  $v \in E$  dans cette décomposition (ce qui revient à trouver les projecteurs qui lui sont associés).

## II.4 Sous-espaces stables par un endomorphisme - Endomorphisme induit

**Définition II.12 :** Soient  $f : E \rightarrow E$  un endomorphisme de  $E$ . Un sous-espace  $F$  de  $E$  est stable par  $f$  si  $f(F) \subset F$ . On définit dans ce cas l'endomorphisme  $f_F : F \rightarrow F$  induit par  $f$  sur  $F$  en posant, pour tout  $v \in F$ ,  $f_F(v) = f(v)$ . C'est un élément de  $\mathcal{L}(F)$  (à ne pas confondre avec la restriction  $f|_F \in \mathcal{L}(F, E)$ ).

**Exemples II.13 :** 1) En géométrie euclidienne dans l'espace, une rotation stabilise une droite (l'axe de la rotation) et le plan orthogonal à cette droite.

- 2) Si  $v \in E$  est un vecteur non-nul tel que  $f(v)$  est colinéaire à  $v$ , la droite  $\mathbb{K}.v$  est stable par  $f$ .
- 3) Plus généralement, si  $v$  est un vecteur non-nul de  $E$ , le sous-espace  $F_v = \text{Vect}(f^k(v), k \in \mathbb{N})$  est stable par  $f$ . On notera que si  $f$  est annulé par un polynôme  $P$  de degré  $d$ , alors  $F_v = \text{Vect}(v, f(v), \dots, f^{d-1}(v))$ .
- 4) Si  $f, g : E \rightarrow E$  sont deux endomorphismes de  $E$  qui commutent (i.e., tels que  $f \circ g = g \circ f$ ), alors  $\ker(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont stables par  $g$ .

**Remarque II.14 :** Si  $F$  est un sous-espace de  $E$  stable par  $f \in \mathcal{L}(E)$  alors, pour tout polynôme  $P \in \mathbb{K}[T]$ ,  $F$  est stable par  $P(f)$  et on a  $P(f)_F = P(f_F)$ . En particulier, si  $P$  annule de  $f$ , il annule également  $f_F$ .

### III Algèbre linéaire en dimension finie

Un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  est de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie, i.e., s'il existe des vecteurs  $(v_1, \dots, v_n) \in E^n$  tels que  $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n) = E$ .

**Dans tout ce chapitre, on supposera que  $E$  est de dimension finie et distinct de  $\{0\}$ .**

#### III.1 Bases et dimension

Une famille  $(v_1, \dots, v_r)$  de vecteurs de  $E$  est libre si l'application (linéaire) canonique

$$\mathbb{K}^r \rightarrow E \quad \text{définie par } (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \mapsto \sum_{k=1}^r \lambda_k v_k$$

est injective, soit encore, si toute combinaison linéaire nulle de ces vecteurs est trivialement nulle. On dit aussi que  $v_1, \dots, v_r$  sont linéairement indépendants. Une famille de vecteurs qui n'est pas libre est liée.

Toute sous-famille d'une famille (finie) libre est libre et toute sur-famille (finie) d'une famille liée est liée.

On dit qu'une famille infinie  $(v_i)_{i \in I} \in E^I$  est libre si toute ses sous-familles finies sont libres.

**Remarques III.1 : 1)** Pour tout vecteur  $v \neq 0$  de  $E$ , la famille  $(v)$  (à un unique vecteur) est libre ! Ainsi,  $\{0\}$  est le seul espace vectoriel à ne pas posséder de famille libre.

**2)** Pour tous vecteurs  $v, w$  de  $E$ , la famille  $(v, w)$  est liée si et seulement si les vecteurs  $v, w$  sont colinéaires, i.e., si  $w \in \mathbb{K}.v$  ou  $v \in \mathbb{K}.w$ .

**Exercice III.2 : 1)** Soit  $(v_1, \dots, v_r)$  une famille de vecteurs de  $E$ .

**a)** Montrer que s'il existe  $1 \leq i \leq r$  tel que  $v_i = 0$ , alors  $(v_1, \dots, v_r)$  est liée.

**b)** Montrer que, dans le cas contraire,  $(v_1, \dots, v_r)$  est libre si et seulement si la somme  $\sum_{i=1}^r \mathbb{K}.v_i$  est directe.

**2)** Soit  $(P_0, \dots, P_n)$  une famille de polynômes échelonnée en degré (au sens où  $0 \leq \deg(P_0) < \dots < \deg(P_n)$ ) ou en valuation (au sens où il existe  $\alpha \in \mathbb{K}$  tel que  $v_\alpha(P_0) < \dots < v_\alpha(P_n) < \infty$ ). Montrer que  $(P_0, \dots, P_n)$  est libre.

**3)** Montrer que la famille de fonctions  $(e_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C})_{\alpha \in \mathbb{C}}$  où, pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $e_\alpha(t) = e^{\alpha t}$  est libre. (On pourra montrer en dérivant que, pour tout  $\Omega \subset \mathbb{C}$  finie, pour toute CL nulle  $\sum_{\alpha \in \Omega} \lambda_\alpha e_\alpha = 0$ , et pour

$$\text{tout } P \in \mathbb{C}[T], \text{ on a } \sum_{\alpha \in \Omega} \lambda_\alpha P(\alpha) = 0.)$$

**Exercice III.3 :** Soit  $(v_1, \dots, v_n) \in E^n$  une famille de vecteurs de  $E$ . Montrer que :

**1)** Si  $(v_1, \dots, v_n)$  est libre et si  $w \in E$ ,  $w \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$  si et seulement si  $(v_1, \dots, v_n, w)$  est liée. En particulier, si  $(v_1, \dots, v_n)$  n'est pas génératrice de  $E$ , il existe  $v_{n+1} \in E$  tel que  $(v_1, \dots, v_n, v_{n+1})$  est encore libre ;

**2)** Si  $(v_1, \dots, v_n)$  est génératrice de  $E$  mais n'est pas libre, il existe  $1 \leq i \leq n$  tel que  $(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$  est encore génératrice de  $E$ .

Avec le second point, en choisissant une famille génératrice de  $E$  de cardinal minimal, on montre donc :

**Proposition-Définition III.4 :** Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, il existe une famille de vecteurs  $(v_1, \dots, v_n)$  simultanément libre et génératrice de  $E$ . On dit que  $(v_1, \dots, v_n)$  est une base de  $E$  et l'application (linéaire) canonique  $i_B : \mathbb{K}^n \rightarrow E$  est un isomorphisme de  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Pour tout  $w \in E$ , l'unique  $n$ -uplet

$$i_B^{-1}(w) = (\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } w = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k \text{ forme les } \underline{\text{coordonnées de } w \text{ dans la base } B}.$$

Soit maintenant  $(v_1, \dots, v_n)$  une famille génératrice de  $E$  et  $(w_1, \dots, w_p)$  une famille quelconque de vecteurs de  $E$ . Alors, pour tout  $1 \leq j \leq p$ , il existe  $(a_{1j}, \dots, a_{nj}) \in \mathbb{K}^n$  tel que  $w_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}v_i$  et on note  $A = (a_{ij}) \in M_{np}(\mathbb{K})$ . Si  $p > n$ , l'équation matricielle  $AX = 0$  possède des solutions non-triviales, i.e., il existe  $X = (\lambda_k) \in \mathbb{K}^p$  non-nul tel que  $\sum_{k=1}^p \lambda_k w_k = 0$  : la famille  $(w_1, \dots, w_p)$  est liée. On a donc montré :

**Théorème III.5 :** Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, toute famille libre de vecteurs de  $E$  est finie, de cardinal inférieur ou égal au cardinal de toute famille génératrice finie de  $E$ .

Ainsi, toutes les bases de  $E$  ont donc même cardinal. Ce cardinal commun est la dimension de  $E$  (en tant que  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel), notée  $\dim_{\mathbb{K}}(E)$  ou  $\dim(E)$ .

On convient que  $\{0\}$  est de dimension 0 et c'est le seul espace vectoriel dans ce cas.

**Corollaire III.6 :** Si  $(v_1, \dots, v_n)$  est une famille de vecteurs de  $E$  de cardinal égal à la dimension de  $E$ , les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $(v_1, \dots, v_n)$  est libre ;      (ii)  $(v_1, \dots, v_n)$  est génératrice de  $E$  ;      (iii)  $(v_1, \dots, v_n)$  est une base de  $E$ .

**Exemples III.7 : 1)** Les familles  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{K}^n$ ,  $(E_{11}, \dots, E_{1p}, E_{21}, \dots, E_{np})$  de  $M_{np}(\mathbb{K})$  et  $(1, T, \dots, T^n)$  de  $\mathbb{K}_n[T]$  sont des bases (canoniques !) et permettent de calculer la dimension de ces espaces vectoriels.

**2)** Si  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  sont des scalaires deux-à-deux distincts, les polynômes interpolateurs de Lagrange  $(L_0, \dots, L_n)$  forment une base de  $\mathbb{K}_n[T]$ .

**3)** Si  $(E_i)_{i \in I}$  est une famille finie d'espaces vectoriels de dimensions finies,  $\dim \left( \prod_{i \in I} E_i \right) = \sum_{i \in I} \dim(E_i)$ .

**4)** Si  $A \in M_{np}(\mathbb{K})$  est de rang  $r$ , ses  $r$  colonnes principales forment une base de  $\text{Im}(A)$ .

On a donc  $\text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(A)) = \dim(\text{Vect}(c_1(A), \dots, c_p(A)))$ .

Deux théorèmes sont utiles pour construire des bases "sous contraintes" :

**Théorème III.8 (de la base extraite) :** Soit  $(v_1, \dots, v_p)$  une famille génératrice de  $E$ . Alors il existe une sous-famille  $(v_{i_1}, \dots, v_{i_n})$  (avec  $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq p$ ) qui est une base de  $E$ .

**Théorème III.9 (de la base incomplète) :** Soient  $(v_1, \dots, v_r)$  une famille libre et  $(w_1, \dots, w_p)$  une famille génératrice de  $E$ . Alors il existe une sous-famille  $(w_{i_{r+1}}, \dots, w_{i_n})$  (avec  $1 \leq i_{r+1} < \dots < i_n \leq p$ ) telle que  $(v_1, \dots, v_r, w_{i_{r+1}}, \dots, w_{i_n})$  est une base de  $E$ .

En particulier, toute famille libre de vecteurs de  $E$  peut être complétée en une base de  $E$ .

## III.2 Dimension des sous-espaces, rang des applications linéaires

Si  $F$  est un sous-espace de  $E$ , une famille libre de vecteurs de  $F$  est aussi une famille libre de vecteurs de  $E$  donc son cardinal est majoré par la dimension de  $E$ . Une famille libre de vecteurs de  $F$  de cardinal maximal est génératrice de  $F$  et on en déduit :

**Proposition III.10 :** Tout sous-espace  $F$  de  $E$  (de dimension finie) est de dimension finie et  $\dim(F) \leq \dim(E)$  avec égalité si et seulement si  $F = E$ .

Ainsi, si  $F, G$  sont deux sous-espaces de  $E$ , on a  $F = G$  si et seulement si  $F \subset G$  et  $\dim(F) = \dim(G)$ .

En complétant une base d'un sous-espace  $F$  de  $E$  en une base de  $E$ , on montre l'existence d'un supplémentaire en dimension finie.

Plus généralement, on a :

**Proposition III.11 :** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ .

1) Si  $(v_1, \dots, v_n)$  est une base de  $E$ , si  $(I_j)_{1 \leq j \leq r}$  forme une partition de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et si, pour tout  $1 \leq j \leq r$ , on pose

$$F_j = \text{Vect}(v_i, i \in I_j), \text{ alors on a } E = \bigoplus_{j=1}^r F_j.$$

2) Si  $(F_j)_{1 \leq j \leq r}$  sont des sous-espaces de  $E$  tels que  $E = \bigoplus_{j=1}^r F_j$  et si, pour tout  $1 \leq j \leq r$ ,  $(v_1^{(j)}, \dots, v_{d_j}^{(j)})$  est

$$\text{une base de } F_j, \text{ alors } (v_1^{(1)}, \dots, v_{d_1}^{(1)}, v_1^{(2)}, \dots, v_{d_r}^{(r)}) \text{ est une base de } E, \text{ adaptée à la décomposition } E = \bigoplus_{j=1}^r F_j.$$

On fixe un second  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E'$ . La donnée d'une base de  $E$  permet d'écrire  $E$  comme une somme directe de droites et on applique **II.2** :

**Proposition III.12 :** Notons  $p = \dim(E)$  et fixons une base  $B = (v_1, \dots, v_p)$  de  $E$ . L'application  $\mathcal{L}(E, E') \rightarrow E'^p$  définie par  $f \mapsto (f(v_1), \dots, f(v_p))$  est un isomorphisme de  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

En outre, si  $f : E \rightarrow E'$  est linéaire :

- $f$  est injective si et seulement si la famille  $(f(v_1), \dots, f(v_p))$  est libre ;
- $f$  est surjective si et seulement si la famille  $(f(v_1), \dots, f(v_p))$  engendre  $E'$  ;
- $f : E \rightarrow E'$  est un isomorphisme si et seulement si  $(f(v_1), \dots, f(v_p))$  est une base de  $E'$ .

On en déduit en particulier que deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension. Ainsi, si  $E'$  est également de dimension finie,  $\dim(\mathcal{L}(E, E')) = \dim(E) \times \dim(E')$ .

**Remarques III.13 :** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$ .

1) L'ensemble  $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  des formes linéaires sur  $E$ , aussi appelé espace dual de  $E$  et noté  $E^*$ , est de dimension  $n$ . Si  $B = (v_1, \dots, v_n)$  est une base de  $E$ , il existe une unique base  $(v_1^*, \dots, v_n^*)$  de  $E^*$  telle que, pour tous entiers  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$ . Cette base de  $E^*$  est la base duale de  $B$  et les formes linéaires  $v_1^*, \dots, v_n^* : E \rightarrow \mathbb{K}$  sont les formes coordonnées dans  $B$  : pour tout  $w \in E$ , on a  $w = \sum_{i=1}^n v_i^*(w) v_i$ . En d'autres termes, l'application linéaire  $(v_1^*, \dots, v_n^*) : E \rightarrow \mathbb{K}^n$  est la réciproque de l'isomorphisme  $i_B : \mathbb{K}^n \xrightarrow{\sim} E$  de **III.3**.

2) L'algèbre  $\mathcal{L}(E)$  des endomorphismes de  $E$  est de dimension  $n^2$ . Si  $f \in \mathcal{L}(E)$ , la famille infinie  $(f^k)_{k \geq 0}$  est donc liée et il existe un polynôme annulateur non-nul de  $f$  (de degré inférieur ou égal à  $n^2$ ). On montrera que le polynôme caractéristique de  $f$ , de degré  $n$ , est annulateur !

L'exemple de la dérivation des polynômes assure que ce résultat est faux en dimension infinie.

**Corollaire III.14 :** Si  $\dim(E) = \dim(E')$  et si  $f \in \mathcal{L}(E, E')$ , les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f$  est injective ;      (ii)  $f$  est surjective ;      (iii)  $f$  est un isomorphisme.

**Exemple III.15 :** Puisque l'application linéaire  $\Phi : M_{np}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$  décrite à la remarque **II.3** est injective et que les espaces  $M_{np}(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$  ont même dimension  $np$ , c'est un isomorphisme de  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

**Proposition-Définition III.16 (Théorème du rang) :** Soit  $f : E \rightarrow E'$  une application linéaire. Si  $F$  est un sous-espace de  $E$  tel qu'on a  $E = \ker(f) \oplus F$  alors  $f$  induit un isomorphisme  $\tilde{f} : F \xrightarrow{\sim} \text{Im}(f)$ .

On définit le rang de  $f$  comme l'entier  $\text{rg}(f) := \dim \text{Im}(f)$ . On a donc

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f).$$

En appliquant ces considérations à l'application canonique  $\prod_{i \in I} F_i \rightarrow \sum_{i \in I} F_i$  pour une famille finie  $(F_i)_{i \in I}$  de sous-espaces de  $E$  (et en calculant son noyau dans le cas de deux sous-espaces), on en déduit :

**Corollaire III.17 :** Soit  $(F_i)_{i \in I}$  une famille finie de sous-espaces de  $E$ . Alors  $\dim \left( \sum_{i \in I} F_i \right) \leq \sum_{i \in I} \dim(F_i)$  avec égalité si et seulement si la somme  $\sum_{i \in I} F_i$  est directe.

**Corollaire III.18 (Formule de Grassmann) :** Soient  $F_1, F_2$  deux sous-espaces de  $E$ , on a

$$\dim(F_1 + F_2) + \dim(F_1 \cap F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2).$$

**Remarque III.19 :** Une autre preuve, peut-être plus classique, est de choisir un supplémentaire  $G_1$  (resp.  $G_2$ ) de  $F_1 \cap F_2$  dans  $F_1$  (resp. dans  $F_2$ ), de montrer que  $F_1 + F_2 = (F_1 \cap F_2) \oplus G_1 \oplus G_2$  puis de compter les dimensions !

## IV Matrices représentatives dans des bases

### IV.1 Matrice représentative d'une famille de vecteurs - Matrice de passage

**Définition IV.1 :** Soient  $B = (v_1, \dots, v_n)$  une base de  $E$ ,  $w$  un vecteur et  $\mathcal{F} = (w_1, \dots, w_p)$  une famille de vecteurs de  $E$ . On note  $w = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$  et, pour tout  $1 \leq j \leq p$ , on note  $w_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i$ .

La matrice représentative de  $w$  (resp. de la famille  $\mathcal{F}$ ) dans  $B$  est la matrice

$$\text{Mat}_B(w) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \quad (\text{resp.} \quad \text{Mat}_B(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \in M_{np}(\mathbb{K}))$$

des coordonnées de  $w$  (resp. des vecteurs de la famille  $\mathcal{F}$ ) dans la base  $B$ .

**Remarque IV.2 :** Avec les notations ci-dessus, pour tout  $X = (\mu_k)_{1 \leq k \leq p} \in \mathbb{K}^p$ , on a

$$\text{Mat}_B \left( \sum_{k=1}^p \mu_k w_k \right) = \text{Mat}_B(\mathcal{F})X$$

et on peut utiliser les méthodes de résolution d'équations matricielles pour caractériser la famille  $\mathcal{F}$  :

- la famille  $\mathcal{F}$  est libre si et seulement si  $\ker(\text{Mat}_B(\mathcal{F})) = \{0\}$  si et seulement si  $\text{rg}(\text{Mat}_B(\mathcal{F})) = p$ .  
(Réciproquement, si  $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ ,  $\ker(A) = \{0\}$  si et seulement si la famille de ses colonnes est libre).
- la famille  $\mathcal{F}$  engendre  $E$  si et seulement si  $\text{Im}(\text{Mat}_B(\mathcal{F})) = \mathbb{K}^n$  si et seulement si  $\text{rg}(\text{Mat}_B(\mathcal{F})) = n$ .  
(Réciproquement, si  $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ ,  $\text{Im}(A) = \mathbb{K}^n$  si et seulement si la famille de ses lignes est libre).
- $\mathcal{F}$  est une base de  $E$  si et seulement si  $\text{Mat}_B(\mathcal{F})$  est inversible.  
(Réciproquement, si  $A \in M_n(\mathbb{K})$ ,  $A$  est inversible si et seulement si ses colonnes forment une base de  $\mathbb{K}^n$ ).

Dans le cas général,  $\text{rg}(\text{Mat}_B(\mathcal{F})) = \dim(\text{Vect}(w_1, \dots, w_p))$  et les colonnes principales de  $\text{Mat}_B(\mathcal{F})$  donnent une sous-famille libre maximale (i.e., une base) du sous-espace  $\text{Vect}(w_1, \dots, w_p)$  engendré par la famille  $\mathcal{F}$ .

**Exercice IV.3 :** Si  $B_1, B_2$  sont deux bases de  $E$ , la matrice de passage  $P_{B_1 \rightarrow B_2}$  est la matrice  $\text{Mat}_{B_1}(B_2)$ .

- 1) Montrer que, pour tout vecteur  $w \in E$ ,  $\text{Mat}_{B_1}(w) = P_{B_1 \rightarrow B_2} \text{Mat}_{B_2}(w)$ .
- 2) Montrer que, pour toute base  $B$  de  $E$ ,  $P_{B \rightarrow B} = I_{\dim(E)}$ .
- 3) Montrer que, pour toutes bases  $B_1, B_2, B_3$  de  $E$ ,  $P_{B_1 \rightarrow B_3} = P_{B_1 \rightarrow B_2} P_{B_2 \rightarrow B_3}$ .
- 4) Montrer que, pour toutes bases  $B_1, B_2$  de  $E$ ,  $P_{B_2 \rightarrow B_1} = P_{B_1 \rightarrow B_2}^{-1}$ .

**Exemple IV.4 :** Soient  $n \geq 1$  et  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$  des scalaires deux-à-deux distincts. La famille  $B_L = (L_0, \dots, L_{n-1})$  des polynômes interpolateurs de Lagrange associés à  $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$  et la base canonique  $B_c = (1, T, \dots, T^{n-1})$  sont deux bases de  $\mathbb{K}_{n-1}[T]$ . Pour tout  $0 \leq j \leq n-1$ , on a  $T^j = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i^j L_i$  donc on a

$$P_{B_L \rightarrow B_c} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \cdots & \alpha_0^{n-1} \\ 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Le déterminant (de la transposée) de cette matrice est le Vandermonde  $V(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$  qui est non-nul ! Ouf !

**Remarques IV.5 :** 1) Toute matrice inversible  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  peut être vue comme la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{K}^n$  vers la base formée par les colonnes de  $P$ .

2) Si  $\dim(E) = n$ , si  $B_1 = (e_1, \dots, e_n)$  et  $B_2 = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  sont deux bases de  $E$  et si on note  $P_{B_1 \rightarrow B_2} = (a_{ij})$  alors, pour tout vecteur  $v \in E$ , on a, avec les notations de **III.13.1**,

$$v = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j^*(v) \varepsilon_j = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j^*(v) \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} \varepsilon_j^*(v) \right) e_i.$$

Par unicité des coordonnées dans la base  $B_1$ , on en déduit que, pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $e_i^* = \sum_{j=1}^n a_{ij} \varepsilon_j^*$  dans  $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ . En d'autres termes, la matrice de passage  $P_{B_2^* \rightarrow B_1^*}$  est la matrice transposée  $P_{B_1 \rightarrow B_2}^T$ .

## IV.2 Matrice représentative d'une application linéaire (dans des bases)

**Proposition-Définition IV.6 :** Soient  $E, E'$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension  $p$  et  $n$  respectivement.

Soient  $B = (v_1, \dots, v_p)$  une base de  $E$  et  $B' = (v'_1, \dots, v'_n)$  une base de  $E'$ . Si  $f : E \rightarrow E'$  est linéaire, on note  $f(B)$  la famille de vecteurs  $(f(v_1), \dots, f(v_p))$  de  $E'$  (qui détermine complètement  $f$ ) et

$$\text{Mat}_{B', B}(f) := \text{Mat}_{B'}(f(B))$$

est la matrice représentative de  $f$  dans les bases  $B$  et  $B'$ . Pour tout vecteur  $w \in E$ , on a

$$\text{Mat}_{B'}(f(w)) = \text{Mat}_{B', B}(f) \text{Mat}_B(w).$$

L'application  $M_{B', B} : \mathcal{L}(E, E') \rightarrow M_{np}(\mathbb{K})$  ainsi définie est un isomorphisme de  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

**Remarques IV.7 :** 1) Si  $E = E'$  et si  $B_1, B_2$  sont deux bases de  $E$ , on a  $P_{B_1 \rightarrow B_2} = \text{Mat}_{B_1, B_2}(I_E)$  !

2) Si on munit  $\mathbb{K}^p$  et  $\mathbb{K}^n$  de leurs bases canoniques (toutes les deux notées  $B_c$ ), l'application  $\text{Mat}_{B_c, B_c} : \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n) \rightarrow M_{np}(\mathbb{K})$  est la bijection réciproque de l'application qui associe à toute matrice  $A$  l'application linéaire  $\Phi_A$  définie par  $X \mapsto AX$ .

3) Puisque  $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(v_1), \dots, f(v_p))$  pour toute base  $B = (v_1, \dots, v_p)$  de  $E$ , on a  $\text{rg}(f) = \text{rg}(\text{Mat}_{B', B}(f))$  pour toutes bases  $B, B'$  de  $E$  et  $E'$  respectivement !

4) Supposons que  $E = F_1 \oplus F_2$  et choisissons une base  $B$  de  $E$  adaptée à cette décomposition, i.e.,  $B$  est la concaténation d'une base  $B_1$  de  $F_1$  et d'une base  $B_2$  de  $F_2$ . Si  $B'$  est une base de  $E'$ , on a donc, pour tout  $f \in \mathcal{L}(E, E')$ ,  $M_{B', B}(f) = \begin{pmatrix} M_{B', B_1}(f|_{F_1}) & M_{B', B_2}(f|_{F_2}) \end{pmatrix}$ . C'est le théorème **II.2** !

**Exercice IV.8 :** Soient  $E, E', E''$  trois  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies. Soient  $B, B'$  et  $B''$  des bases de  $E, E'$  et  $E''$  respectivement, et  $f : E \rightarrow E'$  et  $g : E' \rightarrow E''$  des applications linéaires.

- 1) Montrer que  $\text{Mat}_{B'',B}(g \circ f) = \text{Mat}_{B'',B'}(g) \times \text{Mat}_{B',B}(f)$ .
- 2) Justifier que  $f : E \rightarrow E'$  est un isomorphisme si et seulement si ( $\dim(E) = \dim(E')$  et) la matrice  $\text{Mat}_{B',B}(f)$  est inversible. Montrer dans ce cas que  $\text{Mat}_{B,B'}(f^{-1}) = \text{Mat}_{B',B}(f)^{-1}$ .

**Proposition IV.9 (Formule de changement de base) :** Soient  $E, E'$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies,  $B_1, B_2$  deux bases de  $E$  et  $B'_1, B'_2$  deux bases de  $E'$ . Alors, pour tout  $f \in \mathcal{L}(E, E')$ , on a

$$\text{Mat}_{B'_1,B_1}(f) = P_{B'_1 \rightarrow B'_2} \text{Mat}_{B'_2,B_2}(f) P_{B_2 \rightarrow B_1}.$$

**Remarque IV.10 :** Deux matrices représentant une même application linéaire dans des bases différentes sont donc équivalentes et on a vu que le rang était essentiellement la seule information portée par une matrice à équivalence près puisque toute matrice  $A \in M_{np}(\mathbb{K})$  de rang  $r$  est équivalente à la matrice  $J_{n,p,r}$ .

**Exercice IV.11 :** Si  $E, E'$  sont deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension  $p$  et  $n$  respectivement et si  $f : E \rightarrow E'$  est une application linéaire de rang  $r$ , construire des bases  $B$  et  $B'$  de  $E$  et  $E'$  telles que  $\text{Mat}_{B',B}(f) = J_{n,p,r}$ .

### IV.3 Matrice représentative d'un endomorphisme dans une base

**Proposition-Définition IV.12 :** Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $B = (v_1, \dots, v_n)$  une base de  $E$ . Si  $f : E \rightarrow E$  est un endomorphisme de  $E$ , la matrice représentative de  $f$  dans la base  $B$  est

$$\text{Mat}_B(f) := \text{Mat}_{B,B}(f) = \text{Mat}_B(f(B))$$

et, pour tout vecteur  $w \in E$ , on a  $\text{Mat}_B(f(w)) = \text{Mat}_{B',B}(f) \text{Mat}_B(w)$ .

L'application  $M_B : \mathcal{L}(E) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$  est un isomorphisme de  $\mathbb{K}$ -algèbres.

**Remarques IV.13 :** 1) La dernière affirmation signifie en particulier que, pour tout polynôme  $P \in \mathbb{K}[T]$ , on a  $P(M_B(f)) = M_B(P(f))$  : il revient au même d'évaluer  $P$  en la matrice représentative  $M_B(f) \in M_n(\mathbb{K})$  et de représenter  $P(f) \in \mathcal{L}(E)$  dans la base  $B$ . En particulier,  $f$  et  $M_B(f)$  ont les mêmes polynômes annulateurs !

2) Supposons que  $E = F_1 \oplus F_2$  et choisissons une base  $B_1$  de  $F_1$  et d'une base  $B_2$  de  $F_2$ .

Dire que  $F_1$  (resp.  $F_2$ ) est stable par  $f$  revient à dire, en notant  $f_{F_1}$  (resp.  $f_{F_2}$ ) l'endomorphisme induit, que la matrice représentative

$$M_B(f) = \left( \begin{array}{c|c} \frac{M_{B_1}(f_{F_1})}{0} & M_{B,B_2}(f_{F_2}) \end{array} \right) \quad (\text{resp.} \quad M_B(f) = \left( \begin{array}{c|c} M_{B,B_1}(f_{F_1}) & \frac{0}{M_{B_2}(f_{F_2})} \end{array} \right))$$

est triangulaire par blocs.

Dans la même veine,  $F_1$  et  $F_2$  sont tous les deux stables par  $f$  si et seulement si  $M_B(f)$  est diagonale par blocs.

**Exercice IV.14 :** 1) Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $p : E \rightarrow E$  un projecteur de  $E$  de rang  $r$ .

Montrer qu'il existe une base  $B$  de  $E$  telle que  $M_B(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$ .

2) Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $B = (v_1, \dots, v_n)$  une base de  $E$  et  $f : E \rightarrow E$  un endomorphisme de  $E$ . Montrer que  $M_B(f)$  est triangulaire supérieure si et seulement si, pour tout  $1 \leq k \leq n$ , le sous-espace  $F_k = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$  est stable par  $f$ .

Donner une CNS analogue pour que  $M_B(f)$  soit triangulaire inférieure, puis pour que  $M_B(f)$  soit diagonale.

**Proposition IV.15 (Formule de changement de base) :** Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et  $B_1, B_2$  deux bases de  $E$ . Alors, pour tout  $f \in \mathcal{L}(E)$ , on a

$$\text{Mat}_{B_1}(f) = P_{B_1 \rightarrow B_2} \text{Mat}_{B_2}(f) P_{B_1 \rightarrow B_2}^{-1}.$$

**Remarque IV.16 :** Deux matrices représentant le même endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$  dans des bases différentes sont donc semblables (et, réciproquement, deux matrices semblables représentent le même endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  dans des bases différentes).

Ces matrices ont évidemment même rang (qui est celui de  $f$ ) mais elles ont bien d'autres propriétés en commun :

- On a vu plus haut que ces matrices avaient les mêmes polynômes annulateurs (qui sont ceux de  $f$ );
- Ces matrices ont même trace car la trace est invariante par similitude. On peut donc définir la trace de  $f$  comme la trace d'une matrice représentative de  $f$  dans une base quelconque de  $E$ .  
L'application  $\text{tr} : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathbb{K}$  ainsi définie est linéaire et, pour tous  $f, g \in \mathcal{L}(E)$ , on a  $\text{tr}(g \circ f) = \text{tr}(f \circ g)$ .  
On retiendra en particulier que, pour tout projecteur  $p$  de  $E$ , on a  $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$  !
- Ces matrices ont même déterminant car le déterminant est multiplicatif donc invariant par similitude. On peut définir le déterminant de  $f$  comme celui d'une matrice représentative de  $f$  dans une base quelconque de  $E$ .  
L'application  $\det : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathbb{K}$  ainsi définie est encore multiplicative, au sens où, pour tous  $f, g \in \mathcal{L}(E)$ , on a  $\det(g \circ f) = \det(g) \det(f)$ . En outre,  $\det(f) \neq 0$  si et seulement si  $f$  est un automorphisme de  $E$  et, dans ce cas,  $\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}$ . Enfin, pour tout  $f \in \mathcal{L}(E)$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\det(\lambda f) = \lambda^{\dim(E)} \det(f)$ .