

Programme de colles - Semaine 5 (du 12/10 au 16/10)

Leçon 4 - Rappels et compléments de calcul algébrique

I - Calcul polynomial

☞ Polynômes interpolateurs de Lagrange $L_0, L_1, \dots, L_n$ (dans $\mathbb{K}_n[T]$) associés à $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ deux-à-deux distincts dans $\mathbb{K}$, $\sum_{i=0}^n L_i$ et $\sum_{i=0}^n \alpha_i L_i$, reste de la DE de $P \in \mathbb{K}[T]$ par $\prod_{k=0}^n (T - \alpha_k)$ à l'aide de $L_0, L_1, \dots, L_n$.

☞ Pour tous $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, développement $\prod_{k=1}^n (T - \alpha_k) = T^n + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sigma_k T^{n-k}$, expression de σ_1, σ_2 et σ_n .

☞ Formes factorisées de $T^n - 1$, forme développée de $\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} (T - \omega)$.

II - Calcul matriciel

☞ Ex : Si $A \in M_n(\mathbb{K})$, CNS d'inversibilité (et inverse) de $\begin{pmatrix} I_n & A \\ A & I_n \end{pmatrix}$.

III - Systèmes linéaires et équations matricielles

☞ Exercice corrigé : On note $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $T^2 - 3T + 2$ annule M .

En raisonnant par analyse-synthèse, déterminer $D \in D_3(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_3(\mathbb{K})$ telles que $M = QDQ^{-1}$.

IV - Calcul de déterminant

1) Généralités - Notion d'application $g : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ n -linéaire alternée par rapport aux colonnes.

☞ Si g est une telle application et si $A \in M_n(\mathbb{K})$ n'est pas inversible, $g(A) = 0$.

Rq : Une telle application est également antisymétrique par rapport aux colonnes.

Ex : Si $n = 2$ ou 3 , approches géométrique et calculatoire : g uniquement déterminée par $g(I_n)$.

Notations. Pour tout $n \geq 2$, $\mathfrak{S}_n = \{\sigma : [1, n] \xrightarrow{\sim} [1, n]\}$ et, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $T_\sigma = (\delta_{i, \sigma(j)}) \in M_n(\mathbb{K})$ (on a $T_\sigma T_{\sigma'} = T_{\sigma \circ \sigma'}$). Cas des transpositions τ_{ij} , matrices T_{ij} (avec $g(T_{ij}) = -g(I_n)$ par antisymétrie).

Tout σ est composée de transpositions donc il existe $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$ tel que $g(T_\sigma) = \varepsilon(\sigma)g(I_n)$.

Bilan : Si $g : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est n -linéaire alternée, si $A = (a_{ij})$ alors $g(A) = \left[\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j), j} \right] g(I_n)$.

PropDef : Existence et unicité de $\det : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ n -linéaire alternée telle que $\det(I_n) = 1$.

☞ Thm : Pour tous $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$; CNS d'inversibilité de A et $\det(A^{-1})$.

Thm : Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\det(A^T) = \det(A)$.

2) Calcul de déterminant par opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes

Effet sur le déterminant des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes.

Cor : Si $A = (a_{ij}) \in T_n^s(\mathbb{K})$, $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$.

3) Calcul de déterminant par développement suivant une ligne ou une colonne

PropDef : Mineurs $\Delta_{ij}(A)$ d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$. Développement suivant une ligne ou une colonne.

Cor : Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in M_{r+(n-r)}(\mathbb{K})$, $\det(M) = \det(A) \det(D)$.  Calcul de Vandermonde.

Programme un peu court du fait du blocage du lycée le jeudi!!