

DS2 (4 heures - 10/10/2026)

Si, au cours de l'épreuve, un·e étudiant·e repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il ou elle le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il ou elle est amené·e à prendre. La notation tiendra compte de la présentation, de la lisibilité et de la qualité de la rédaction de la copie.

Exercice I - Calcul d'une intégrale elliptique

Soient $0 < a \leq b$ deux réels. Le but de cet exercice est de calculer $\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}}$.

1) Justifier que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}}$ existe.

On définit deux suites (a_n) et (b_n) en posant $a_0 = a$, $b_0 = b$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Pour tout $n \geq 0$, on pose également $I_n = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + a_n^2)(t^2 + b_n^2)}}$ (qui existe d'après la question 1).

2) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. On note m leur limite commune.

3) Soient $n \geq 0$ et $t > 0$.

a) Montrer que $\left| \frac{1}{\sqrt{(t^2 + a_n^2)(t^2 + b_n^2)}} - \frac{1}{t^2 + m^2} \right| \leq \frac{|2m^2 - a_n^2 - b_n^2|t^2 + |m^4 - a_n^2 b_n^2|}{2(t^2 + a^2)^3}$.

b) Justifier que les intégrales $\int_0^\infty \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^3}$ et $\int_0^\infty \frac{dt}{(t^2 + a^2)^3}$ existent, en déduire que (I_n) converge et calculer sa limite.

4) Soit $n \geq 0$.

a) Montrer que la fonction $\varphi_n : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_n(u) = \frac{1}{2} \left(u - \frac{a_n b_n}{u} \right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective.

b) Montrer que, pour tout $u > 0$, $\varphi_n(u)^2 + a_{n+1}^2 = u^2 \varphi_n'(u)^2$ et que $\varphi_n(u)^2 + b_{n+1}^2 = \frac{(u^2 + a_n^2)(u^2 + b_n^2)}{4u^2}$.

c) Justifier que l'intégrale $\int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + a_{n+1}^2)(t^2 + b_{n+1}^2)}}$ existe et vaut $2I_{n+1}$, puis conclure que $I_{n+1} = I_n$.

d) Conclure enfin quant à la valeur de $\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}}$.

Exercice II - Une expression intégrale de la constante γ d'Euler

0) Montrer l'existence de l'intégrale $\int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt$.

Le but de cet exercice est de montrer que cette intégrale est égale à la constante γ d'Euler dont on rappelle qu'elle est la limite de la suite (a_n) définie, pour tout $n \geq 1$, par $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

1) Soient $0 < a < b$ deux réels.

a) Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t} - 1}{t}$ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire que $\int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

c) Montrer que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$ existe et conclure qu'elle vaut $\ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

2) Soit $t > 0$ un réel. Justifier que les séries $\sum_{n \geq 1} e^{-nt}$ et $\sum_{n \geq 1} (e^{-nt} - e^{-(n+1)t})$ convergent et montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-nt} - \frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t} \right) = e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right).$$

3) Pour tout $N \geq 1$, justifier l'existence et donner la valeur de $\sum_{n=1}^N \int_0^\infty \left(e^{-nt} - \frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t} \right) dt$.

Expliquer pourquoi on ne peut pas conclure que $\gamma = \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt$.

4) Soient $t > 0$ un réel et $n \geq 1$ un entier

a) Montrer qu'il existe $c_{t,n} \in]nt, (n+1)t[$ tel qu'on a $\frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t} = e^{-c_{t,n}}$.

b) En déduire que $\left| e^{-nt} - \frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t} \right| \leq te^{-nt}$.

5) Soit $N \geq 1$ un entier.

a) Soit $t > 0$. Justifier que $0 \leq \frac{t}{e^t - 1} \leq 1$ et en déduire que $\sum_{n=N+1}^{\infty} \left| e^{-nt} - \frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t} \right| \leq e^{-Nt}$.

b) Conclure que $\left| \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt - a_N \right| \leq \frac{1}{N}$ puis que $\gamma = \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt$.

Exercice III - Bicommutant d'une matrice diagonale

Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, on note $\mathbb{K}[A]$ l'ensemble $\{P(A), P \in \mathbb{K}[T]\}$ des polynômes en A .

On définit le commutant de A comme l'ensemble

$$\mathcal{C}(A) = \{B \in M_n(\mathbb{K}) \text{ t.q. } AB = BA\}$$

des matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec A . Puisque deux polynômes en A commutent, on a $\mathbb{K}[A] \subset \mathcal{C}(A)$.

On définit le bicommutant de A comme l'ensemble

$$\mathcal{CC}(A) = \bigcap_{B \in \mathcal{C}(A)} \mathcal{C}(B) = \{M \in M_n(\mathbb{K}) \text{ t.q., pour tout } B \in \mathcal{C}(A), BM = MB\}$$

des matrices qui commutent avec tous les éléments du commutant de A . Puisque $A \in \mathcal{C}(A)$, on a $\mathcal{CC}(A) \subset \mathcal{C}(A)$.

0) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice quelconque.

- a) Soit $B \in \mathcal{C}(A)$. Montrer que, pour tout $k \geq 0$, on a $A^k B = B A^k$ et en déduire que $\mathbb{K}[A] \subset \mathcal{C}(B)$.
- b) Conclure que $\mathbb{K}[A] \subset \mathcal{CC}(A) \subset \mathcal{C}(A)$.

Dans toute la suite, on fixe une matrice diagonale $D = \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in M_n(\mathbb{K})$.

Le but de cet exercice est de montrer que l'inclusion $\mathbb{K}[D] \subset \mathcal{CC}(D)$ est une égalité.

1) Dans cette question, on suppose que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont tous égaux, i.e., que D est une homothétie αI_n .

On rappelle que, pour tous $1 \leq i, j \leq n$, E_{ij} désigne la matrice élémentaire d'indices i, j de $M_n(\mathbb{K})$ et on fixe

une matrice $M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} E_{ij} \in \mathcal{CC}(D)$.

- a) Préciser $\mathcal{C}(D)$ et en déduire que, pour tous $1 \leq k, l \leq n$, on a $\sum_{j=1}^n m_{lj} E_{kj} = \sum_{i=1}^n m_{ik} E_{il}$.
- b) Conclure que M est une homothétie, puis que $\mathbb{K}[D] = \mathcal{CC}(D) = \mathbb{K} \cdot I_n$.

2) Dans cette question, on suppose que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont deux-à-deux distincts. Soit $B = (b_{ij}) \in \mathcal{C}(D)$.

- a) Montrer que, pour tous $1 \leq i, j \leq n$, on a $\alpha_i b_{ij} = b_{ij} \alpha_j$ et en déduire que B est diagonale.
- b) Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[T]$ tel que, pour tout $1 \leq i \leq n$, $b_{ii} = P(\alpha_i)$.
- c) Conclure que $\mathbb{K}[D] = \mathcal{CC}(D) = \mathcal{C}(D)$.

3) Dans cette question, on suppose qu'il existe des entiers $n_1, \dots, n_r \geq 1$ avec $n = \sum_{k=1}^r n_k$ et des scalaires $\beta_1, \dots, \beta_r$

deux-à-deux distincts tels que $D = \begin{pmatrix} \beta_1 I_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2 I_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_r I_{n_r} \end{pmatrix}$.

- a) Soit $B \in M_n(\mathbb{K})$. En considérant B par blocs $\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & B_{r-1,r} \\ B_{r,1} & \cdots & B_{r,r-1} & B_{rr} \end{pmatrix}$, avec $B_{ij} \in M_{n_i, n_j}(\mathbb{K})$

pour tous $1 \leq i, j \leq r$, montrer que $B \in \mathcal{C}(D)$ si et seulement si $B_{ij} = 0$ pour tous $i \neq j$ dans $\llbracket 1, r \rrbracket$.

- b) Conclure que $\mathbb{K}[D] = \mathcal{CC}(D)$ (on relira les questions 1 et 2.)

4) Soient A_1, A_2 semblables dans $M_n(\mathbb{K})$ et Q dans $GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A_2 = Q A_1 Q^{-1}$.

- a) Montrer que $\mathcal{C}(A_2) = \{Q B_1 Q^{-1}, B_1 \in \mathcal{C}(A_1)\}$.
- b) Décrire pareillement $\mathcal{CC}(A_2)$ (en le justifiant) et conclure que si $\mathbb{K}[A_1] = \mathcal{CC}(A_1)$, alors $\mathbb{K}[A_2] = \mathcal{CC}(A_2)$.

5) Dans cette question, D est une matrice diagonale quelconque.

- a) Pour toute bijection $\sigma : \llbracket 1, n \rrbracket \xrightarrow{\sim} \llbracket 1, n \rrbracket$, on considère la matrice $T_\sigma = (\delta_{i, \sigma(j)}) \in M_n(\mathbb{K})$.
Pour tous $1 \leq i, j \leq n$, calculer $(T_{\sigma^{-1}} T_\sigma)_{ij}$ et en déduire que $T_\sigma^{-1} D T_\sigma = \text{Diag}(\alpha_{\sigma(1)}, \alpha_{\sigma(2)}, \dots, \alpha_{\sigma(n)})$.
- b) Conclure avec la question 3 que $\mathbb{K}[D] = \mathcal{CC}(D)$.