

Corrigé du DS2 (4 heures - 10/10/2026)

Exercice I - Calcul d'une intégrale elliptique

Soient $0 < a \leq b$ deux réels. Le but de cet exercice est de calculer $\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}}$.

1) La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et on a $\frac{1}{\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$.

D'après Riemann, $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}}$ existe.

On définit deux suites (a_n) et (b_n) en posant $a_0 = a$, $b_0 = b$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Pour tout $n \geq 0$, on pose également $I_n = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + a_n^2)(t^2 + b_n^2)}}$ (qui existe d'après la question 1).

2) Montrons par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, on a $0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Par hypothèse, $0 < a_0 \leq b_0$.

Soit $n \geq 0$ et supposons que $0 < a_n \leq b_n$. Alors $a_n \leq \frac{a_n + b_n}{2} \leq b_n$ et, puisque $a_n^2 \leq a_n b_n \leq b_n^2$, on a aussi

$a_n \leq \sqrt{a_n b_n} \leq b_n$. L'inégalité arithmético-géométrique assure enfin que $\sqrt{a_n b_n} \leq \frac{a_n + b_n}{2}$. Ainsi, on a bien $0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ et on conclut selon le principe de récurrence.

Ainsi, la suite (a_n) est croissante et la suite (b_n) est décroissante. De plus, on en déduit que (a_n) est majorée par b_0 et que la suite (b_n) est minorée par a_0 . Ces deux suites sont donc convergentes et, en notant ℓ_a et ℓ_b leurs limites respectives, on doit avoir $\frac{\ell_a + \ell_b}{2} = \ell_b$, i.e., $\ell_a = \ell_b$.

On peut donc conclure que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, et on note m leur limite commune.

Remarque. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{(t^2 + a_n^2)(t^2 + b_n^2)}} = \frac{1}{t^2 + m^2}$ et, d'après 1, $\int_0^\infty \frac{dt}{t^2 + m^2}$ existe.

Cependant, une intégrale impropre est une limite d'intégrales sur un segment (et une intégrale sur un segment est déjà une limite d'intégrales de fonctions en escalier). Or on ne peut pas permuter deux passages à la limite sans justification donc on ne peut pas affirmer sans précaution que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + a_n^2)(t^2 + b_n^2)}} = \int_0^\infty \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + a_n^2)(t^2 + b_n^2)}} = \int_0^\infty \frac{dt}{t^2 + m^2}.$$

3) Soient $n \geq 0$ et $t > 0$.

a) En mettant au même dénominateur puis en multipliant par la partie conjuguée, on a

$$\frac{1}{\sqrt{(t^2 + a_n^2)(t^2 + b_n^2)}} - \frac{1}{t^2 + m^2} = \frac{(t^2 + m^2)^2 - (t^2 + a_n^2)(t^2 + b_n^2)}{(t^2 + m^2)\sqrt{(t^2 + a_n^2)(t^2 + b_n^2)}[t^2 + m^2 + \sqrt{(t^2 + a_n^2)(t^2 + b_n^2)}]}.$$

D'une part, d'après la question 2, on a $a \leq a_n \leq m \leq b_n$ pour tout $n \geq 0$ donc

$$(t^2 + m^2)\sqrt{(t^2 + a_n^2)(t^2 + b_n^2)}[t^2 + m^2 + \sqrt{(t^2 + a_n^2)(t^2 + b_n^2)}] \geq 2(t^2 + a^2)^3.$$

D'autre part, on calcule en développant $(t^2 + m^2)^2 - (t^2 + a_n^2)(t^2 + b_n^2) = (2m^2 - a_n^2 - b_n^2)t^2 + (m^4 - a_n^2 b_n^2)$.
L'inégalité triangulaire assure donc que

$$\left| \frac{1}{\sqrt{(t^2 + a_n^2)(t^2 + b_n^2)}} - \frac{1}{t^2 + m^2} \right| \leq \frac{|2m^2 - a_n^2 - b_n^2|t^2 + |m^4 - a_n^2 b_n^2|}{2(t^2 + a^2)^3}.$$

- b) Les fonctions $t \mapsto \frac{t^2}{(t^2 + a^2)^3}$ et $t \mapsto \frac{1}{(t^2 + a^2)^3}$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$ et on a $\frac{t^2}{(t^2 + a^2)^3} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{t^4}$ et $\frac{1}{(t^2 + a^2)^3} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{t^6}$. D'après Riemann, les intégrales $\int_0^\infty \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^3}$ et $\int_0^\infty \frac{dt}{(t^2 + a^2)^3}$ existent bien. Par linéarité de l'intégrale et par inégalité triangulaire, on peut donc écrire

$$\begin{aligned} \left| I_n - \int_0^\infty \frac{dt}{t^2 + m^2} \right| &\leq \int_0^\infty \left| \frac{1}{\sqrt{(t^2 + a_n^2)(t^2 + b_n^2)}} - \frac{1}{t^2 + m^2} \right| dt \\ &\leq \frac{|2m^2 - a_n^2 - b_n^2|}{2} \int_0^\infty \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^3} + \frac{|m^4 - a_n^2 b_n^2|}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{(t^2 + a^2)^3}. \end{aligned}$$

Or, par définition de m , on a $\lim_{n \rightarrow \infty} |2m^2 - a_n^2 - b_n^2| = \lim_{n \rightarrow \infty} |m^4 - a_n^2 b_n^2| = 0$ et on peut conclure par encadrement que

$$I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{dt}{t^2 + m^2} = \left[\frac{1}{m} \operatorname{Arctan} \left(\frac{t}{m} \right) \right]_0^\infty = \frac{\pi}{2m}.$$

4) Soit $n \geq 0$.

- a) La fonction $\varphi_n : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_n(u) = \frac{1}{2} \left(u - \frac{a_n b_n}{u} \right)$ est rationnelle donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition. Pour tout $u > 0$, on calcule $\varphi_n'(u) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a_n b_n}{u^2} \right) > \frac{1}{2} > 0$ donc φ_n est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. On calcule $\lim_{u \rightarrow 0^+} \varphi_n(u) = -\infty$ et $\lim_{u \rightarrow +\infty} \varphi_n(u) = +\infty$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\varphi_n : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ est bijective.

b) Soit $u > 0$. On calcule

$$\varphi_n(u)^2 + a_{n+1}^2 = \frac{1}{4} \left(u - \frac{a_n b_n}{u} \right)^2 + a_n b_n = \frac{1}{4} \left(u^2 + 2a_n b_n + \frac{a_n^2 b_n^2}{u^2} \right) = \frac{u^2}{4} \left(1 + \frac{a_n b_n}{u^2} \right)^2 = u^2 \varphi_n'(u)^2$$

et

$$\varphi_n(u)^2 + b_{n+1}^2 = \frac{1}{4} \left(u - \frac{a_n b_n}{u} \right)^2 + \left(\frac{a_n + b_n}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(u^2 + \frac{a_n^2 b_n^2}{u^2} + a_n^2 + b_n^2 \right) = \frac{(u^2 + a_n^2)(u^2 + b_n^2)}{4u^2}.$$

- c) Puisque l'intégrale $I_{n+1} = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + a_{n+1}^2)(t^2 + b_{n+1}^2)}}$ existe, $\int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + a_{n+1}^2)(t^2 + b_{n+1}^2)}}$ existe

si et seulement si $\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + a_{n+1}^2)(t^2 + b_{n+1}^2)}}$ existe. Or le changement de variable $x = -t$ assure

qu'elle est de même nature (et donc égale à) l'intégrale convergente $I_{n+1} = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + a_{n+1}^2)(x^2 + b_{n+1}^2)}}$.

Avec Chasles, on peut donc bien conclure que $\int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + a_{n+1}^2)(t^2 + b_{n+1}^2)}}$ existe et vaut $2I_{n+1}$.

En faisant le changement de variable $t = \varphi_n(u)$, on a donc

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + a_{n+1}^2)(t^2 + b_{n+1}^2)}} &= \int_0^{\infty} \frac{\varphi'_n(u)du}{\sqrt{(\varphi_n(u)^2 + a_{n+1}^2)(\varphi_n(u)^2 + b_{n+1}^2)}} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\varphi'_n(u)du}{\sqrt{(\varphi_n(u)^2 + a_{n+1}^2)(\varphi_n(u)^2 + b_{n+1}^2)}} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{2\varphi'_n(u)du}{\sqrt{\varphi'_n(u)^2(u^2 + a_n^2)(u^2 + b_n^2)}} = 2I_n. \end{aligned}$$

On peut ainsi conclure que $I_{n+1} = I_n$.

d) La suite (I_n) est constante et elle converge vers $\frac{\pi}{2m}$. Par unicité de la limite, on peut donc conclure que

$$I_0 = \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}} = \frac{\pi}{2m}.$$

Exercice II - Une expression intégrale de la constante γ d'Euler

0) La fonction $t \mapsto e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ car $t \mapsto 1 - e^{-t}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a $e^{-t} = 1 - t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ donc $\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} = \frac{t-1+e^{-t}}{t(1-e^{-t})} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}$ et $\int_0^{\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt$ est faussement impropre en 0.

On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0$ donc $e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-t}$ intégrable en $+\infty$ et on peut conclure que l'intégrale $\int_0^{\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt$ existe.

Le but de cet exercice est de montrer que cette intégrale est égale à la constante γ d'Euler dont on rappelle qu'elle est la limite de la suite (a_n) définie, pour tout $n \geq 1$, par $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

1) Soient $0 < a < b$ deux réels.

a) La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t} - 1}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. En reconnaissant un taux de variation, on a $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-t} - 1}{t} = -1$ et la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t} - 1}{t}$ est bien prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

b) Soit $x > 0$. Il résulte de la question précédente et du calcul de $\ln(bx) - \ln(ax)$ que

$$\int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt - \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \int_{ax}^{bx} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{1}{t} \right) dt \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$$

donc on a bien $\int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

c) La fonction $t \mapsto \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

On a $\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{(1-at) - (1-bt) + o(t)}{t} \underset{t \rightarrow 0}{=} (b-a) + o(1)$ donc l'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$ est faussement impropre en 0.

On a $\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} = e^{-at} \frac{1 - e^{-(b-a)t}}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-at})$ donc $t \mapsto \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$ est intégrable en $+\infty$.

On peut donc conclure que $\int_0^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$ existe et que $\int_0^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$.
 Pour tout $x > 0$, on calcule, avec les changements de variable $t = au$ et $t = bv$ puis avec Chasles,

$$\begin{aligned} \int_x^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt &= \int_x^\infty \frac{e^{-at}}{t} dt - \int_x^\infty \frac{e^{-bt}}{t} dt \\ &= \int_{ax}^\infty \frac{e^{-u}}{u} du - \int_{bx}^\infty \frac{e^{-v}}{v} dv \\ &= \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt \end{aligned}$$

D'après la question précédente, on a donc, par unicité de la limite, $\int_0^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

2) Soit $t > 0$ un réel. La série $\sum_{n \geq 1} e^{-nt}$ est géométrique de raison $e^{-t} \in]0, 1[$ donc elle converge et sa somme est

$$\sum_{n=1}^\infty e^{-nt} = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}}. \text{ La suite géométrique } (e^{-nt}) \text{ tend vers 0 pour la même raison donc la série télescopique}$$

$\sum_{n \geq 1} (e^{-nt} - e^{-(n+1)t})$ converge et sa somme est $\sum_{n=1}^\infty (e^{-nt} - e^{-(n+1)t}) = e^{-t}$. Par linéarité, on en déduit que

$$\sum_{n=1}^\infty \left(e^{-nt} - \frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t} \right) = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} - \frac{e^{-t}}{t} = e^{-t} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right).$$

3) Pour tout $n \geq 1$, il est clair que $\int_0^\infty e^{-nt} dt$ existe et vaut $\frac{1}{n}$.

D'après la question 1, $\int_0^\infty \frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t} dt$ existe et vaut $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$. Par linéarité de la somme des séries

convergentes, on en déduit que, pour tout $N \geq 1$, $\sum_{n=1}^N \int_0^\infty \left(e^{-nt} - \frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t} \right) dt$ existe et que

$$\sum_{n=1}^N \int_0^\infty \left(e^{-nt} - \frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t} \right) dt = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \right) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \ln(n+1) = a_N.$$

Par définition, on a donc $\gamma = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \left(e^{-nt} - \frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t} \right) dt$ et la question 2 assure que

$$\int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \left(e^{-nt} - \frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t} \right) dt.$$

Cependant, une intégrale impropre est une limite d'intégrales sur un segment (et une intégrale sur un segment est déjà une limite d'intégrales de fonctions en escalier). Or on ne peut pas permuter deux passages à la limite sans justification !

4) Soient $t > 0$ un réel et $n \geq 1$ un entier

a) La fonction $u \mapsto e^{-u}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $nt - (n+1)t = -t$ donc, d'après l'égalité des accroissements finis, il existe $c_{t,n} \in]nt, (n+1)t[$ tel qu'on a $\frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{-t} = -e^{-c_{t,n}}$, i.e., $\frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t} = e^{-c_{t,n}}$.

b) On applique à présent l'inégalité des accroissements finis à la même fonction, sur le segment $[nt, c_{t,n}]$.

Puisque $0 < c_{t,n} - nt \leq (n+1)t - nt = t$, on obtient

$$\left| e^{-nt} - \frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t} \right| = |e^{-nt} - e^{-c_{t,n}}| \leq \sup_{u \in [nt, c_{t,n}]} | -e^{-u} | (c_{t,n} - nt) \leq te^{-nt}.$$

5) Soit $N \geq 1$ un entier.

a) Soit $t > 0$. On a bien sûr $e^t - 1 > 0$ donc $0 < \frac{t}{e^t - 1}$. De plus, on a $\frac{t}{e^t - 1} \leq 1$ si et seulement si $1 + t \leq e^t$, ce qui est vrai par convexité de l'exponentielle. Par conséquent, puisque $\sum_{n \geq 1} \left(e^{-nt} - \frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t} \right)$ est absolument convergente par majoration par une série géométrique de raison $e^{-t} \in]0, 1[$ d'après la question précédente, on peut écrire que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \left| e^{-nt} - \frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} te^{-nt} = \frac{te^{-(N+1)t}}{1 - e^{-t}} = \frac{te^{-Nt}}{e^t - 1} \leq e^{-Nt}.$$

b) Rappelons que $a_N = \sum_{n=1}^N \int_0^{\infty} \left(e^{-nt} - \frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t} \right) dt = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^N \left(e^{-nt} - \frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t} \right) dt$. Par linéarité de l'intégrale puis par inégalité triangulaire (deux fois), on a donc

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt - a_N \right| \leq \int_0^{\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| e^{-nt} - \frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t} \right| dt \leq \int_0^{\infty} e^{-Nt} dt = \frac{1}{N}.$$

Par encadrement, on a donc $\lim_{N \rightarrow \infty} a_N = \int_0^{\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt$, i.e., $\gamma = \int_0^{\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt$.

Exercice III - Bicommutant d'une matrice diagonale

Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, on note $\mathbb{K}[A]$ l'ensemble $\{P(A), P \in \mathbb{K}[T]\}$ des polynômes en A .

On définit le commutant de A comme l'ensemble

$$\mathcal{C}(A) = \{B \in M_n(\mathbb{K}) \text{ t.q. } AB = BA\}$$

des matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec A . Puisque deux polynômes en A commutent, on a $\mathbb{K}[A] \subset \mathcal{C}(A)$.

On définit le bicommutant de A comme l'ensemble

$$\mathcal{CC}(A) = \bigcap_{B \in \mathcal{C}(A)} \mathcal{C}(B) = \{M \in M_n(\mathbb{K}) \text{ t.q., pour tout } B \in \mathcal{C}(A), BM = MB\}$$

des matrices qui commutent avec tous les éléments du commutant de A . Puisque $A \in \mathcal{C}(A)$, on a $\mathcal{CC}(A) \subset \mathcal{C}(A)$.

0) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice quelconque.

a) Soit $B \in \mathcal{C}(A)$. Puisque $A^0 = I_n$, on a bien sûr $A^0 B = BA^0$ et, par définition, $AB = BA$.

Soit $k \geq 1$ et supposons que $A^k B = BA^k$. Alors $A^{k+1} B = A^k (AB) = A^k BA = (BA^k) A = BA^{k+1}$ et on conclut selon le principe de récurrence que $A^k B = BA^k$ pour tout $k \geq 0$.

Soit maintenant $P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T^k$ un polynôme. Par bilinéarité du produit matriciel, on a

$$P(A)B = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (A^k B) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (BA^k) = BP(A)$$

et $P(A) \in \mathcal{C}(A)$. On en déduit l'inclusion $\mathbb{K}[A] \subset \mathcal{C}(B)$.

b) On a donc bien $\mathbb{K}[A] \subset \bigcap_{B \in \mathcal{C}(A)} \mathcal{C}(B) =: \mathcal{CC}(A)$ et on en déduit que $\mathbb{K}[A] \subset \mathcal{CC}(A) \subset \mathcal{C}(A)$.

Dans toute la suite, on fixe une matrice diagonale $D = \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in M_n(\mathbb{K})$.

Le but de cet exercice est de montrer que l'inclusion $\mathbb{K}[D] \subset \mathcal{CC}(D)$ est une égalité.

1) Dans cette question, on suppose que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont tous égaux, i.e., que D est une homothétie αI_n .

On rappelle que, pour tous $1 \leq i, j \leq n$, E_{ij} désigne la matrice élémentaire d'indices i, j de $M_n(\mathbb{K})$ et on fixe

une matrice $M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} E_{ij} \in \mathcal{CC}(D)$.

a) Il est clair que toute matrice dans $M_n(\mathbb{K})$ commute avec l'homothétie $D = \alpha I_n$ donc $\mathcal{C}(D) = M_n(\mathbb{K})$.

En particulier, pour tous $1 \leq k, l \leq n$, E_{kl} est dans $\mathcal{C}(D)$ et, puisque $M \in \mathcal{CC}(D)$, on a $E_{kl}M = ME_{kl}$.

Rappelons que, pour tous $1 \leq \lambda, \mu, \nu, \rho \leq n$, on a $E_{\lambda\mu}E_{\nu\rho} = \delta_{\mu\nu}E_{\lambda\rho}$ et fixons $1 \leq k, l \leq n$. Par bilinéarité du produit matriciel, on calcule

$$E_{kl}M = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} E_{kl}E_{ij} = \sum_{j=1}^n m_{lj} E_{kj} \quad \text{et} \quad ME_{kl} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} E_{ij}E_{kl} = \sum_{i=1}^n m_{ik} E_{il}$$

pour conclure que $\sum_{j=1}^n m_{lj} E_{kj} = \sum_{i=1}^n m_{ik} E_{il}$.

b) Soient encore $1 \leq k, l \leq n$ deux entiers.

Les seuls coefficients possiblement non-nuls de la matrice $E_{kl}M = \sum_{j=1}^n m_{lj} E_{kj}$ sont sur sa ligne k .

Les seuls coefficients possiblement non-nuls de la matrice $ME_{kl} = \sum_{i=1}^n m_{ik} E_{il}$ sont sur sa colonne l .

L'égalité de ces deux matrices assure donc que :

- le seul coefficient possiblement non-nul de la ligne l de M est son coefficient diagonal ;
- le seul coefficient possiblement non-nul de la colonne k de M est son coefficient diagonal ;
- $m_{ll} = m_{kk}$.

Puisque k, l sont quelconques, on peut conclure que M est diagonale et que tous ses coefficients diagonaux sont égaux, i.e., que M est une homothétie. On a donc montré que $\mathcal{CC}(D) \subset \mathbb{K}.I_n$.

Puisque $D^0 = I_n$, il est clair que $\mathbb{K}.I_n \subset \mathbb{K}[D]$ et on peut conclure avec l'inclusion $\mathbb{K}[D] \subset \mathcal{CC}(D)$ que $\mathbb{K}[D] = \mathcal{CC}(D) = \mathbb{K}.I_n$.

2) Dans cette question, on suppose que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont deux-à-deux distincts. Soit $B = (b_{ij}) \in \mathcal{C}(D)$.

a) Soient $1 \leq i, j \leq n$ deux entiers. Par définition, puisque $B \in \mathcal{C}(D)$, on a

$$\alpha_i b_{ij} = \sum_{k=1}^n D_{ik} b_{kj} = (DB)_{ij} = (BD)_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} D_{kj} = b_{ij} \alpha_j.$$

Par hypothèse, si $i \neq j$, on a $\alpha_i \neq \alpha_j$ donc $b_{ij} = 0$, ce qui prouve que B est diagonale.

b) Puisque $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont deux-à-deux distincts, on peut considérer les polynômes interpolateurs de Lagrange $L_1, \dots, L_n$ associés. Ceux-ci sont caractérisés par le fait que, pour tous $1 \leq i, j \leq n$, on a $L_j(\alpha_i) = \delta_{ij}$

donc, en posant $P = \sum_{j=1}^n b_{jj} L_j$, on a bien $P(\alpha_i) = \sum_{j=1}^n b_{jj} L_j(\alpha_i) = b_{ii}$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

c) Rappelons que, d'après la question 0, on a $\mathbb{K}[D] \subset \mathcal{CC}(D) \subset \mathcal{C}(D)$. On vient de montrer que $\mathcal{C}(D) \subset D_n(\mathbb{K})$ et que, pour toute matrice $B \in \mathcal{C}(D)$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[T]$ tel que

$$B = \text{Diag}(P(\alpha_1), \dots, P(\alpha_n)) = P(\text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = P(D).$$

Ainsi, $\mathcal{C}(D)$ est inclus dans $\mathbb{K}[D]$ et on conclut que $\mathbb{K}[D] = \mathcal{CC}(D) = \mathcal{C}(D)$.

- 3) Dans cette question, on suppose qu'il existe des entiers $n_1, \dots, n_r \geq 1$ avec $n = \sum_{k=1}^r n_k$ et des scalaires $\beta_1, \dots, \beta_r$

deux-à-deux distincts tels que $D = \begin{pmatrix} \beta_1 I_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2 I_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_r I_{n_r} \end{pmatrix}.$

a) Soit $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & B_{r-1,r} \\ B_{r,1} & \cdots & B_{r,r-1} & B_{rr} \end{pmatrix}$ avec $B_{ij} \in M_{n_i, n_j}(\mathbb{K})$ pour tous $1 \leq i, j \leq r$.

Par définition du produit par blocs, $DB = BD$ si et seulement si $\beta_i B_{ij} = \beta_j B_{ij}$ pour tous $1 \leq i, j \leq r$.

Par hypothèse, $\beta_1, \dots, \beta_r$ sont deux-à-deux distincts donc on peut conclure que $B \in \mathcal{C}(D)$ si et seulement si $B_{ij} = 0$ pour tous $1 \leq i, j \leq r$ avec $i \neq j$.

b) Soit $M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \cdots & M_{1r} \\ M_{21} & M_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & M_{r-1,r} \\ M_{r,1} & \cdots & M_{r,r-1} & M_{rr} \end{pmatrix} \in \mathcal{CC}(D)$ avec $M_{ij} \in M_{n_i, n_j}(\mathbb{K})$ pour tous $1 \leq i, j \leq r$.

D'après a, pour tout r -uplet $(B_{11}, \dots, B_{rr}) \in \prod_{i=1}^r M_{n_i}(\mathbb{K})$, M et $B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B_{rr} \end{pmatrix}$ com-

mutent, *i.e.*,

$$\begin{pmatrix} B_{11}M_{11} & \cdots & B_{11}M_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{rr}M_{r1} & \cdots & B_{rr}M_{rr} \end{pmatrix} = BM = MB = \begin{pmatrix} M_{11}B_{11} & \cdots & M_{1r}B_{rr} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{r1}B_{11} & \cdots & M_{rr}B_{rr} \end{pmatrix}.$$

Pour tous $1 \leq i, j \leq r$ avec $i \neq j$, en prenant $B_{ii} = I_{n_i}$ et $B_{jj} = 0$, l'égalité $B_{ii}M_{ij} = M_{ij}B_{jj}$ des blocs d'indices i, j donne $M_{ij} = 0$ donc M est diagonale par blocs. En outre, pour tout $1 \leq i \leq n$, pour tout $B_{ii} \in M_{n_i}(\mathbb{K})$, on doit avoir $B_{ii}M_{ii} = M_{ii}B_{ii}$. On a montré dans la question 1 que ceci impliquait que M_{ii} était une homothétie, *i.e.*, qu'il existait un scalaire λ_i tel que $M_{ii} = \lambda_i I_{n_i}$.

On adapte alors la question 2 : puisque $\beta_1, \dots, \beta_r$ sont deux-à-deux distincts, on peut introduire les polynômes interpolateurs de Lagrange $L_1, \dots, L_r$ associés et poser $P = \sum_{j=1}^r \lambda_j L_j$. On a donc $P(\beta_i) = \lambda_i$ pour tout $1 \leq i \leq r$ et

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{n_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\beta_1) I_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P(\beta_2) I_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & P(\beta_r) I_{n_r} \end{pmatrix} = P(D).$$

On a donc l'inclusion $\mathcal{CC}(D) \subset \mathbb{K}[D]$ et, d'après la question 0, on a bien $\mathbb{K}[D] = \mathcal{CC}(D)$.

- 4) Soient A_1, A_2 semblables dans $M_n(\mathbb{K})$ et Q dans $GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A_2 = QA_1Q^{-1}$.

a) Soit $B_1 \in M_n(\mathbb{K})$ et montrons que $QB_1Q^{-1} \in \mathcal{C}(A_2)$. Par définition, on a $A_1B_1 = B_1A_1$ donc, en

multipliant à gauche par Q et à droite par Q^{-1} ,

$$QA_1(Q^{-1}Q)B_1Q^{-1} = QB_1(Q^{-1}Q)A_1Q^{-1}, \quad i.e., \quad A_2(QB_1Q^{-1}) = (QB_1Q^{-1})A_2,$$

ce qui prouve que $QB_1Q^{-1} \in \mathcal{C}(A_2)$. Ainsi, on a une application $\mathcal{C}(A_1) \rightarrow \mathcal{C}(A_2)$ (bien) définie par $B_1 \mapsto QB_1Q^{-1}$ et $\{QB_1Q^{-1}, B_1 \in \mathcal{C}(A_1)\} \subset \mathcal{C}(A_2)$.

Pour montrer l'inclusion réciproque, on doit montrer que l'application précédente est surjective. Or, par symétrie de la similitude, on a pareillement une application $\mathcal{C}(A_2) \rightarrow \mathcal{C}(A_1)$ (bien) définie par $B_2 \mapsto Q^{-1}B_2Q$. Ces deux applications sont manifestement réciproques l'une de l'autre, donc elles sont bijectives. En particulier, la première est surjective et on a bien $\mathcal{C}(A_2) = \{QB_1Q^{-1}, B_1 \in \mathcal{C}(A_1)\}$.

- b)** Soit $M_1 \in \mathcal{CC}(A_1)$ et montrons que $QM_1Q^{-1} \in \mathcal{CC}(A_2)$, *i.e.*, que $(QM_1Q^{-1})B_2 = B_2(QM_1Q^{-1})$ pour tout $B_2 \in \mathcal{C}(A_2)$, *i.e.*, d'après la question précédente, que $(QM_1Q^{-1})(QB_1Q^{-1}) = (QB_1Q^{-1})(QM_1Q^{-1})$ pour tout $B_1 \in \mathcal{C}(A_1)$. Or, pour tout $B_1 \in \mathcal{C}(A_1)$, on a bien sûr

$$(QM_1Q^{-1})(QB_1Q^{-1}) = Q(M_1B_1)Q^{-1} = Q(B_1M_1)Q^{-1} = (QB_1Q^{-1})(QM_1Q^{-1}).$$

Ainsi, on a une application $\mathcal{CC}(A_1) \rightarrow \mathcal{CC}(A_2)$ (bien) définie par $M_1 \mapsto QM_1Q^{-1}$ et on en déduit l'inclusion $\{QM_1Q^{-1}, M_1 \in \mathcal{CC}(A_1)\} \subset \mathcal{CC}(A_2)$. A nouveau, par symétrie de la similitude, on a pareillement une application $\mathcal{CC}(A_2) \rightarrow \mathcal{CC}(A_1)$ définie par $M_2 \mapsto Q^{-1}M_2Q$ et ces deux applications sont réciproques l'une de l'autre, ce qui prouve la surjectivité de la première et le fait que $\mathcal{CC}(A_2) = \{QM_1Q^{-1}, M_1 \in \mathcal{CC}(A_1)\}$. Supposons maintenant que $\mathbb{K}[A_1] = \mathcal{CC}(A_1)$. La similitude est compatible avec l'évaluation des polynômes et donne la première égalité de

$$\mathbb{K}[A_2] = \{QP(A_1)Q^{-1}, P \in \mathbb{K}[T]\} = \{QM_1Q^{-1}, M_1 \in \mathcal{CC}(A_1)\} = \mathcal{CC}(A_2),$$

ce qu'il fallait démontrer (et cette implication est évidemment une équivalence par symétrie de la similitude).

5) Dans cette question, D est une matrice diagonale quelconque.

- a)** Pour toute bijection $\sigma : \llbracket 1, n \rrbracket \xrightarrow{\sim} \llbracket 1, n \rrbracket$, on considère la matrice $T_\sigma = (\delta_{i, \sigma(j)}) \in M_n(\mathbb{K})$. Par définition du produit matriciel et du symbole de Kronecker, pour tous $1 \leq i, j \leq n$, on a

$$(T_{\sigma^{-1}}T_\sigma)_{ij} = \sum_{k=1}^n (T_{\sigma^{-1}})_{ik}(T_\sigma)_{kj} = \sum_{k=1}^n \delta_{i, \sigma^{-1}(k)} \delta_{k, \sigma(j)} = \delta_{i, \sigma^{-1}(\sigma(j))} = \delta_{ij},$$

ce qui prouve que $T_{\sigma^{-1}}T_\sigma = I_n$. En utilisant de plus la définition de D , on calcule pareillement

$$\begin{aligned} (T_\sigma^{-1}DT_\sigma)_{ij} &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (T_{\sigma^{-1}})_{ik} D_{kl} (T_\sigma)_{lj} = \sum_{k=1}^n (T_{\sigma^{-1}})_{ik} \alpha_k (T_\sigma)_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^n \delta_{i, \sigma^{-1}(k)} \alpha_k \delta_{k, \sigma(j)} = \delta_{i, \sigma^{-1}(\sigma(j))} \alpha_{\sigma(j)} = \delta_{i, j} \alpha_{\sigma(j)}, \end{aligned}$$

ce qui prouve que $T_\sigma^{-1}DT_\sigma = \text{Diag}(\alpha_{\sigma(1)}, \alpha_{\sigma(2)}, \dots, \alpha_{\sigma(n)})$.

- b)** D'après le calcul précédent, une permutation quelconque des coefficients diagonaux de D définit une matrice diagonale semblable à D . Si les coefficients diagonaux de D ne sont pas deux-à-deux distincts, on peut les permuter de telle sorte que les coefficients égaux entre eux soient les uns à côté des autres afin d'obtenir une matrice D' de la forme étudiée à la question 3.

On a montré dans cette question qu'on avait $\mathbb{K}[D'] = \mathcal{CC}(D')$ donc, d'après la question 4, on a également $\mathbb{K}[D] = \mathcal{CC}(D)$

Remarque. C'est plus généralement le cas de toute matrice diagonalisable !