

Feuille d'exercices 5 : Rappels et compléments d'algèbre linéaire

Sous-espaces vectoriels

Exercice 1 : Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}_{lip}(I, \mathbb{K})$ des fonctions lipschitziennes sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

Exercice 2 : On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est à *support compact* s'il existe $A > 0$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus [A, A]$, $f(t) = 0$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}_K^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 3 : Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $G_\alpha = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } f(\alpha) = 0\}$.

- 1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que G_α est un sous-espace vectoriel de E . En notant $\mathbf{1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction constante égale à 1, montrer que $G_\alpha \oplus \mathbb{R} \cdot \mathbf{1} = E$.
- 2) Soient $n \geq 1$ un entier et $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$ des réels. On note

$$G = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } f(\alpha_0) = \dots = f(\alpha_n) = 0\}.$$

Montrer que G un sous-espace vectoriel de E et déterminer un sous-espace F de E tel que $G \oplus F = E$.

Exercice 4 : Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille finie de sous-espaces d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

Montrer que la somme $\sum_{i \in I} F_i$ est directe si et seulement si, pour tout $j \in I$, $F_j \cap \left(\sum_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} F_i \right) = \{0\}$.

Applications linéaires

Exercice 5 : Soient f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E et F un sous-espace de E . Exprimer $f^{-1}(f(F))$ en fonction de F et $\ker(f)$ et exprimer $f(f^{-1}(F))$ en fonction de F et $\text{Im}(f)$. En déduire que $f^{-1}(f(F)) = f(f^{-1}(F))$ si et seulement si $\ker(f) \subset F \subset \text{Im}(f)$.

Exercice 6 : Soient f, g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E tels que $f \circ g = I_E$. Montrer que $g \circ f$ est un projecteur et en déduire que $E = \ker(f) \oplus \text{Im}(g)$.

Exercice 7 : Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . On suppose qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ avec $a \neq b$ tels que $(T - a)(T - b)$ est un polynôme annulateur de f , i.e., tel que $f^2 - (a + b)f + abI_E = 0$. Montrer que $E = \ker(f - aI_E) \oplus \ker(f - bI_E)$ et préciser les projecteurs associés à cette décomposition.

Exercice 8 : Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . On suppose qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[T]$ annulateur de f avec $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$ (Qu'est-ce que ça implique pour P ?) Montrer que $E = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$ et préciser les projecteurs associés à cette décomposition.

Exercice 9 : Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . Les questions suivantes sont indépendantes.

- 1) Montrer que $p \circ q = q$ si et seulement si $\text{Im}(q) \subset \text{Im}(p)$.
- 2) Montrer que $p \circ q = p$ si et seulement si $\ker(q) \subset \ker(p)$.
- 3) Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
Si c'est le cas, exprimer le noyau et l'image de $p + q$ en fonction des noyaux et images de p et q .

Exercice 10 : Soient f et g deux symétries (distinctes de $\pm I_E$) d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

1) Calculer $(f - g) \circ (f + g)$ et en déduire que $\text{Im}(f \circ g - g \circ f) \subset \text{Im}(f - g) \cap \text{Im}(f + g)$.

2) On fixe $w \in \text{Im}(f - g) \cap \text{Im}(f + g)$.

a) Montrer qu'il existe v, v' dans E tels que $f\left(\frac{v+v'}{2}\right) + g\left(\frac{v'-v}{2}\right) = w$ et $f\left(\frac{v'-v}{2}\right) + g\left(\frac{v+v'}{2}\right) = 0$.

b) En déduire que $\frac{v-v'}{2} = (f \circ g)\left(\frac{v+v'}{2}\right)$ et conclure que $\text{Im}(f \circ g - g \circ f) = \text{Im}(f - g) \cap \text{Im}(f + g)$.

Exercice 11 : Soient p un projecteur et f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

Montrer que si $\ker(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont stables par f , alors $f \circ p = p \circ f$.

Exercice 12 : Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E tel que, pour tout $v \in E$, $\mathbb{K}.v$ est stable par f .

a) Montrer que, pour tout $v \neq 0$, il existe un (unique) scalaire $\lambda_v \in \mathbb{K}$ tel que $f(v) = \lambda_v.v$.

b) Montrer que, pour tout $v \neq 0$, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}^*$, $\lambda_v = \lambda_{\alpha v}$.

c) Montrer que, pour tous $v, w \neq 0$ tels que $v + w \neq 0$, on a $(\lambda_{v+w} - \lambda_v)v + (\lambda_{v+w} - \lambda_w)w = 0$.

En déduire que si v et w ne sont pas colinéaires, alors $\lambda_v = \lambda_w$.

d) Conclure que f est une homothétie (i.e., que λ_v est en fait indépendant de $v \in E$).

Dimension finie

Exercice 13 : On note F le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par

$$v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

On note G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ formé des solutions du système linéaire homogène

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

1) Montrer que F est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ dont on déterminera une équation.

2) Déterminer deux vecteurs (w_1, w_2) tels que $G = \text{Vect}(w_1, w_2)$ et en déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.

3) Montrer que $F \cap G$ est une droite vectorielle dont on déterminera un vecteur directeur w_0 .

4) a) Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ ne contenant pas w_0 . Montrer que $F = \mathbb{R}.w_0 \oplus (F \cap H)$.

b) Soit $\tilde{G}$ un sous-espace de F . Montrer que $\mathbb{R}^4 = G \oplus \tilde{G}$ si et seulement si $F = (F \cap G) \oplus \tilde{G}$.

c) Déterminer un sous-espace supplémentaire de G dans $\mathbb{R}^4$ (on donnera un système d'équations et une famille de vecteurs qui l'engendre).

Exercice 14 : Soient $n \geq 1$ un entier, E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(v_1, \dots, v_n)$ une famille libre de vecteurs de E .

1) Donner une CNS (sur n) pour que la famille $(v_1 + v_2, v_2 + v_3, \dots, v_n + v_1)$ soit libre.

2) Montrer que si $w \in E$ n'appartient pas à $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ alors $(v_1 + w, v_2 + w, \dots, v_n + w)$ est libre.

3) Soient $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ et posons $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$.

Donner une CNS sur $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ pour que la famille $(v_1 + w, v_2 + w, \dots, v_n + w)$ soit libre.

Exercice 15 : Soient $n \geq 1$ un entier et $a_0, a_1, \dots, a_n$ des scalaires deux-à-deux distincts.

Montrer que la famille $((T + a_0)^n, \dots, (T + a_n)^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[T]$.

Exercice 16 : Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_n : E \rightarrow \mathbb{K}$ des formes linéaires sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

Montrer que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ si et seulement si l'application $\Phi : E \rightarrow \mathbb{K}^n$ définie par $\Phi(v) = (\varphi_1(v), \dots, \varphi_n(v))$ est surjective.

Exercice 17 : Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, H un hyperplan de E et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie non-contenu dans H . Montrer que $\dim(F \cap H) = \dim F - 1$.

Exercice 18 : Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer que $\dim(F_1) = \dim(F_2)$ si et seulement si F_1 et F_2 ont un supplémentaire commun dans E , i.e., s'il existe une sous-espace G tel que $F_1 \oplus G = F_2 \oplus G = E$ (on pourra raisonner par récurrence sur $\dim(E) - \dim(F_1)$.)

Exercice 19 : Soit $n \geq 2$. Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, pour tous $1 \leq i, j \leq n$, calculer $\text{tr}(AE_{ij})$ et en déduire que l'application $\varphi : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ définie par $\varphi(A) = (M \mapsto \text{tr}(AM))$ est un isomorphisme. Montrer que toute matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est équivalente à une matrice de trace nulle et en déduire que tout hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

Exercice 20 : Soient E, E' deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f, g : E \rightarrow E'$ deux applications linéaires. Montrer que $|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leq \text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$.

Exercice 21 : Soient f, g des endomorphismes d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie tels qu'on a $E = \ker(f) + \ker(g) = \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$. Montrer que ces deux sommes sont directes.

Exercice 22 : Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :

$$(i) \ker(f) = \ker(f^2), \quad (ii) \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2), \quad (iii) E = \ker(f) \oplus \text{Im}(f).$$

Exercice 23 : Soient f, g des endomorphismes d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie E .

- Montrer que $\text{rg}(f+g) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$ si et seulement si $\text{Im}(f+g) = \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$ et $\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{0\}$.
- En déduire que, si $\text{rg}(f+g) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$ alors $(\ker(f) \cap \ker(g)) = \ker(f+g)$, et en déduire que $\ker(f) + \ker(g) = E$.
- Conclure que $\text{rg}(f+g) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$ si et seulement si $\text{Im}(f+g) = \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$ et $\ker(f) + \ker(g) = E$.

Exercice 24 : Soient $p_1, \dots, p_r$ des projecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie. On note $p = \sum_{k=1}^r p_k$.

Montrer que p est un projecteur si et seulement si, pour tous $1 \leq i < j \leq r$, on a $p_i \circ p_j = p_j \circ p_i = 0$.

(Dans le sens difficile, on commencera par montrer que $\sum_{k=1}^r \text{Im}(p_k)$ est directe avec la dimension.)

Représentations matricielles

Exercice 25 : On considère l'application $f : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3$ définie par $f(x, y, z) = (-y - z, -x - z, x + y + 2z)$. Vérifier que f est une application linéaire et expliciter la matrice M qui lui est associée.

Calculer $\text{rg}(f)$, son image et son noyau.

Vérifier que f est un projecteur de $\mathbb{K}^3$ et déterminer une matrice $P \in \text{GL}_3(\mathbb{K})$ telle que $M = P \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) P^{-1}$.

Exercice 26 : Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice de trace t .

Montrer que $M^2 = I_n$ si et seulement si il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $PMP^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} I_{\frac{n+t}{2}} & 0 \\ \hline 0 & -I_{\frac{n-t}{2}} \end{array} \right)$.

Exercice 27 : On considère l'application $f : \mathbb{R}_3[T] \rightarrow \mathbb{R}_3[T]$ qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_3[T]$ associe le reste de la division euclidienne de $(T^4 - 1)P$ par $T^4 - T$.

- 1) Justifier que f est linéaire et exprimer sa matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[T]$.
- 2) Calculer son rang, son image et son noyau.
- 3) Exprimer la matrice représentative de f dans la base de $\mathbb{R}_3[T]$ formée par les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux éléments de $\mathbb{U}_4$.

Exercice 28 : On fixe deux scalaires $\alpha \neq \beta$. On note $B_c = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$

l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ représenté dans la base B_c par la matrice $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Pour tout $1 \leq j \leq n$, on note $e_j = \sum_{k=1}^j \varepsilon_k$. Montrer que $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ et exprimer $\text{Mat}_B(f)$.

Exercice 29 : Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie tel que $E = \text{Im}(f) \oplus \ker(f)$.

Montrer qu'il existe une base B de E et une matrice $A \in \text{GL}_r(\mathbb{K})$ telle que $\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 30 : Soient $n \geq 2$ un entier, $\varphi : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ l'application (linéaire) définie par $\varphi(M) = M^T$. Calculer la trace et le déterminant de φ .

Exercice 31 : Soient $n \geq 2$ un entier, $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice et $\varphi : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ l'application (linéaire) définie par $\varphi(M) = AM$. Calculer la trace et le déterminant de φ .