

# Leçon 6 : Réduction des matrices et des endomorphismes

## Table des matières

|            |                                                                          |           |
|------------|--------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>I</b>   | <b>Eléments propres</b>                                                  | <b>1</b>  |
| I.1        | Eléments propres d'un endomorphisme . . . . .                            | 1         |
| I.2        | Polynômes et éléments propres - Cas de la dimension finie . . . . .      | 2         |
| I.3        | Eléments propres d'une matrice . . . . .                                 | 3         |
| <b>II</b>  | <b>Polynôme caractéristique</b>                                          | <b>4</b>  |
| II.1       | Polynôme caractéristique d'une matrice . . . . .                         | 4         |
| II.2       | Polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie . . . . . | 6         |
| II.3       | Matrices compagnon et théorème de Cayley-Hamilton . . . . .              | 6         |
| <b>III</b> | <b>Diagonalisation en dimension finie</b>                                | <b>7</b>  |
| III.1      | Diagonalisabilité d'un endomorphisme . . . . .                           | 7         |
| III.1.a    | Définition et propriétés élémentaires . . . . .                          | 7         |
| III.1.b    | Diagonalisabilité et sous-espaces propres . . . . .                      | 7         |
| III.1.c    | Diagonalisabilité et polynômes annulateurs . . . . .                     | 8         |
| III.2      | Diagonalisabilité et diagonalisation d'une matrice . . . . .             | 9         |
| <b>IV</b>  | <b>Trigonalisation en dimension finie</b>                                | <b>11</b> |

**Avertissement.** Rappelons qu'il existe un isomorphisme d'algèbres  $\Phi : M_n(\mathbb{K}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$  associant canoniquement à tout  $A \in M_n(\mathbb{K})$  l'endomorphisme  $\Phi_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ .

Rappelons réciproquement qu'étant donné un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie (égale à  $n$ ), le choix d'une base  $B$  de  $E$  détermine un isomorphisme d'algèbres  $\text{Mat}_B : \mathcal{L}(E) \xrightarrow{\sim} M_n(\mathbb{K})$ .

Les notions qu'on définit dans cette leçon se déclinent toutes dans le contexte des matrices carrées et dans celui des endomorphismes d'un espace vectoriel (de dimension finie le plus souvent). Il est parfois plus simple de les introduire (ou de démontrer un résultat) dans un langage plutôt que l'autre et on laissera au lecteur le soin de traduire quelques remarques et propositions dans sa seconde version.

Une nuance toutefois ! Une matrice  $A \in M_n(\mathbb{R})$  peut également être vue comme une matrice de  $M_n(\mathbb{C})$  car  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  et bien des notions de cette leçon dépendent du corps de base.

## I Eléments propres

### I.1 Eléments propres d'un endomorphisme

**Définition I.1 :** Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

- 1) Un scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une valeur propre de  $f$  s'il existe un vecteur  $v \neq 0$  dans  $E$  tel que  $f(v) = \lambda.v$ ;
- 2) Un vecteur  $v \in E$  est un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda \in \mathbb{K}$  si  $v \neq 0$  et si  $f(v) = \lambda.v$ ;
- 3) Le sous-espace propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda \in \mathbb{K}$  est le sous-espace vectoriel de  $E$  défini par

$$E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda.I_E) = \{v \in E \text{ tel que } f(v) = \lambda v\}.$$

On convient de poser  $E_\lambda(f) = \{0\}$  si  $\lambda$  n'est pas une valeur propre de  $f$ .

**Remarques I.2 :** 1) L'équation aux éléments propres de  $f$  est  $f(v) = \lambda.v$  d'inconnues  $(\lambda, v) \in \mathbb{K} \times E$ .

Puisqu'un vecteur propre est non-nul par définition, il ne peut être associé qu'à une unique valeur propre.

2)  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une valeur propre si et seulement si  $f - \lambda I_E$  n'est pas injective.

3) On a  $E_0(f) = \ker(f)$  (donc  $f$  est injective si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de  $f$ ).

Pour tout  $\lambda \neq 0$ , on a  $E_\lambda(f) \subset \text{Im}(f)$ .

4) Un vecteur  $v \in E$  non-nul est un vecteur propre de  $f$  si et seulement si la droite  $\mathbb{K}.v$  est stable par  $f$ .

Si  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une valeur propre de  $f$ , le sous-espace  $E_\lambda(f)$  est stable par  $f$ . L'endomorphisme induit  $f_{E_\lambda(f)}$  est l'homothétie  $\lambda I_{E_\lambda(f)}$ .

**Exemples I.3 :** 1) Si  $f$  est l'homothétie  $\lambda I_E$ ,  $\lambda$  est la seule valeur propre de  $f$  et  $E_\lambda(f) = E$ . On a montré réciproquement que si tout vecteur non-nul  $v \in E$  est un vecteur propre de  $f$ , alors  $f$  est une homothétie.

2) Si  $p$  est un projecteur (non-trivial, i.e., distinct de 0 et de  $I_E$ ), seuls 0 et 1 sont valeurs propres. Les espaces propres correspondant sont  $\ker(p)$  et  $\ker(p - I_E) = \text{Im}(p)$ .

3) Si  $s$  est une symétrie (non-triviale, i.e., distinct de  $I_E$  et de  $-I_E$ ), seuls 1 et  $-1$  sont valeurs propres.

4) Notons  $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$  et prenons pour  $f$  la dérivation. Pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ , une fonction  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  est vecteur propre de la dérivation associée à la valeur propre  $\lambda$  si et seulement si  $h$  est solution de l'équation différentielle linéaire  $y' - \lambda y = 0$ . Les solutions de cette équation différentielle d'ordre 1 sont bien connues et forment la droite engendrée par la fonction  $t \mapsto e^{\lambda t}$ .

Ainsi, tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  est valeur propre de la dérivation et un vecteur propre associé est la fonction  $t \mapsto e^{\lambda t}$ .

5) Notons  $E = \mathbb{K}[T]$  et prenons pour  $f$  l'application "multiplication par  $T$ ". Par un argument de degré, il n'existe aucun polynôme non-nul tel que  $P$  et  $TP$  sont colinéaires et la "multiplication par  $T$ " n'a ni valeur propre ni vecteur propre.

**Exercice I.4 :** Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f, g : E \rightarrow E$  deux endomorphismes de  $E$  qui commutent. Alors les sous-espaces propres de  $f$  sont stables par  $g$  (et réciproquement).

## I.2 Polynômes et éléments propres - Cas de la dimension finie

**Proposition I.5 :** Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $f : E \rightarrow E$  un endomorphisme de  $E$  et  $v$  un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors, pour tout polynôme  $P \in \mathbb{K}[T]$ , on a

$$P(f)(v) = P(\lambda).v.$$

En particulier, si  $P$  est un polynôme annulateur de  $E$ , i.e., si  $P(f) = 0$  dans  $\mathcal{L}(E)$ , alors  $\lambda$  est racine de  $P$ .

**Remarques I.6 :** 1) Avec les notations de la proposition, on a donc  $E_\lambda(f) \subset E_{P(\lambda)}(P(f))$ .

2) On rappelle que tout multiple d'un polynôme annulateur est également annulateur : un polynôme annulateur de  $f$  peut donc avoir des racines qui ne sont pas valeur propre de  $f$  ! Par exemple, le polynôme  $T(T-1)(T-2)$  annule un projecteur puisque c'est un multiple de  $T(T-1)$  mais 2 n'est jamais valeur propre d'un projecteur.

**Exemple I.7 :** Si  $f : E \rightarrow E$  est nilpotente,  $f$  n'est pas injective et 0 est sa seule valeur propre !

A l'aide des interpolateurs de Lagrange, on déduit de I.5 le résultat fondamental suivant :

**Proposition I.8 :** Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $f : E \rightarrow E$  un endomorphisme de  $E$ ,  $r \geq 1$  un entier et  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  des valeurs propres deux-à-deux distinctes de  $f$ .

1) La somme  $\sum_{i=1}^r E_{\lambda_i}(f)$  est directe.

2) Si  $v_1, \dots, v_r$  sont des vecteurs propres de  $f$  associés à  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  respectivement, la famille  $(v_1, \dots, v_r)$  est libre.

**Remarque I.9 :** Le point 1 ci-dessus est encore vrai lorsque  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  des scalaires deux-à-deux distincts quelconques (avec la convention  $E_\lambda(f) = \{0\}$  si  $\lambda$  n'est pas valeur propre de  $f$ ) !

**Corollaire I.10 :** Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f : E \rightarrow E$  un endomorphisme de  $E$ . Alors  $f$  possède au plus  $\dim(E)$  valeurs propres deux-à-deux distinctes.

**Définition I.11 :** Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Le spectre de  $f$ , qu'on note  $\text{Sp}(f)$  est l'ensemble (fini) des valeurs propres  $\lambda \in \mathbb{K}$  de  $f$ .

Le corollaire précédent nous dit donc que  $\text{Card}(\text{Sp}(f)) \leq \dim(E)$ . Dans la même veine :

**Corollaire I.12 :** Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Alors

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f)) \leq \dim(E).$$

### I.3 Éléments propres d'une matrice

Dans tout ce paragraphe, on fixe un entier  $n \geq 1$ . Rappelons qu'à toute matrice carrée  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , on associe l'endomorphisme  $\Phi_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  défini par  $X \mapsto AX$ . On calque les définitions du paragraphe §I.1 ci-dessous.

**Définition I.13 :** Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  une matrice.

- 1) Un scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une valeur propre de  $A$  s'il existe une colonne  $X \neq 0$  dans  $\mathbb{K}^n$  telle que  $AX = \lambda X$  ;
- 2) Une colonne  $X \in \mathbb{K}^n$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda \in \mathbb{K}$  si  $X \neq 0$  et si  $AX = \lambda X$  ;
- 3) Le sous-espace propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda \in \mathbb{K}$  est le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^n$  défini par

$$E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n) = \{X \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } AX = \lambda X\}.$$

On convient de poser  $E_\lambda(A) = \{0\}$  si  $\lambda$  n'est pas une valeur propre de  $A$ .

**Remarques I.14 :** 1) L'équation aux éléments propres de  $A$  est  $AX = \lambda X$  d'inconnues  $(\lambda, X) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n$ .

Puisqu'un vecteur propre est non-nul par définition, il ne peut être associé qu'à une unique valeur propre.

- 2) Toutes les remarques et les résultats du paragraphe précédent sont encore valables et on écrira les versions matricielles de **I.5**, **I.8** et **I.10**.

**Exemples I.15 :** 1) Une matrice  $A \in M_n(\mathbb{K})$  est diagonale si et seulement si la base canonique  $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$  de  $\mathbb{K}^n$  est formée de vecteurs propres. Dans ce cas, en notant  $A = \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , le vecteur  $e_k$  est associé à la valeur propre  $\alpha_k$ .

- 2) Considérons la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Une colonne  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$  non-nulle est un vecteur propre de

$A$  si et seulement si  $AX = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$  et  $X$  sont colinéaires, et c'est le cas si et seulement si  $x^2 + y^2 = 0$ . Ainsi, si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $A$  ne possède aucun vecteur propre.

*A contrario*, si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$  sont deux vecteurs propres de  $A$ , respectivement associés aux valeurs propres  $i$  et  $-i$  de  $A$ .

- 3) Soit  $n \geq 2$  et considérons la matrice circulante  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$ .

En notant  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ , on a  $Ce_1 = e_n$  et, pour tout  $2 \leq i \leq n$ , on a  $Ce_i = e_{i-1}$ . La matrice  $C$  permute donc circulairement les vecteurs de la base  $(e_1, \dots, e_n)$  et, pour tout  $1 \leq i \leq n$ , on a  $C^n e_i = e_i$ , ce qui prouve que  $C^n = I_n$ . Ainsi,  $T^n - 1$  annule  $C$  et, d'après **I.5**, toutes les valeurs propres de  $C$  sont dans  $\mathbb{K} \cap \mathbb{U}_n$ .

Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , pour tout  $\omega \in \mathbb{U}_n$ , on a  $C \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \vdots \\ \omega^{n-2} \\ \omega^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ \omega^2 \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \vdots \\ \omega^{n-2} \\ \omega^{n-1} \end{pmatrix}$  donc  $\omega$  est valeur propre.

D'après **I.8.2**, on obtient une base de  $\mathbb{C}^n$  formée de vecteurs propres de  $C$ .

Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , on trouve pareillement un (si  $n$  est impair) ou deux (si  $n$  est pair) vecteurs propres, qui ne sauraient donc former une base de  $\mathbb{R}^n$  pour  $n \geq 3$ .

D'après ce qui précède, l'ensemble des valeurs propres d'une matrice dépend du corps de base. C'est cohérent avec **I.5** où l'on avait vu que les valeurs propres étaient des racines de polynômes (*voir le prochain chapitre*).

**Proposition-Définition I.16 :** Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  une matrice. Le spectre (dans  $\mathbb{K}$ ) de  $A$ , qu'on note  $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$  (ou simplement  $\text{Sp}(A)$  si le corps de base n'est pas ambigu), est l'ensemble des valeurs propres  $\lambda \in \mathbb{K}$  de  $A$ . On a

$$\text{Card}(\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)) \leq n \quad \text{et} \quad \sum_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} \dim(E_{\lambda}(A)) \leq n.$$

**Proposition I.17 :** 1) Deux matrices transposées l'une de l'autre ont même spectre (dans  $\mathbb{K}$ ).

2) Deux matrices semblables ont même spectre (dans  $\mathbb{K}$ ).

**Exemples I.18 (Suite de I.15) :** 1) Le spectre de  $D \in D_n(\mathbb{K})$  est l'ensemble de ses coefficients diagonaux.

2) Pour la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , on a  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$  et  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{-i, i\}$ .

3) Pour la matrice circulante  $C \in M_n(\mathbb{K})$ , on a  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(C) = \{1\}$  (si  $n$  est impair) et  $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(C) = \{-1, 1\}$  (si  $n$  est pair), et  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(C) = \mathbb{U}_n$ .

**Dans toute la suite de cette leçon, on fixe un entier  $n \geq 2$  et un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ .**

## II Polynôme caractéristique

### II.1 Polynôme caractéristique d'une matrice

Rappelons que  $\mathbb{K}$  est infini et qu'on peut par conséquent identifier un polynôme  $P \in \mathbb{K}[T]$  et la fonction polynomiale  $P : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  qui lui est associée.

Pour tout  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ , la formule du déterminant assure que l'application  $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  définie par

$$\lambda \mapsto \det(\lambda I_n - A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n (\delta_{\sigma(j),j} \lambda - a_{\sigma(j),j})$$

est polynomiale en  $\lambda$ . On peut donc définir :

**Proposition-Définition II.1 :** Le polynôme caractéristique d'une matrice  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , noté  $\chi_A$ , est l'unique élément de  $\mathbb{K}[T]$  tel que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A).$$

En particulier, les valeurs propres de  $A$  (dans  $\mathbb{K}$ ) sont exactement les racines de  $\chi_A$  (dans  $\mathbb{K}$ ).

- Remarques II.2 :** 1) Une matrice et sa transposée ont le même polynôme caractéristique.  
 2) Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.  
 3) Avec d'Alembert-Gauss, toute matrice  $A \in M_n(\mathbb{K})$  possède une valeur propre complexe.

**Exemples II.3 :** 1) Si  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , on a, pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$$

et on conclut que  $\chi_A = T^2 - \text{tr}(A)T + \det(A)$ .

- 2) Si  $A = (a_{ij}) \in T_n^s(\mathbb{K})$  est triangulaire supérieure alors  $\chi_A = \prod_{i=1}^n (T - a_{ii})$ . En particulier, les valeurs propres d'une matrice triangulaire supérieure sont ses coefficients diagonaux.  
 On a bien sûr un énoncé analogue pour les matrices triangulaires inférieures et diagonales.

- 3) Soit  $M = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D \end{array} \right)$  une matrice triangulaire supérieure par blocs. Alors  $\chi_M = \chi_A \chi_D$ .

On a bien sûr un énoncé analogue pour les matrices triangulaires inférieures et diagonales par blocs.

**Proposition II.4 :** Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  une matrice. Le polynôme caractéristique de  $A$  est unitaire de degré  $n$ . Sous forme développée, il s'écrit

$$\chi_A = T^n - \text{tr}(A)T^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A).$$

*Preuve.* Notons  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$  de sorte que  $\chi_A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n (\delta_{\sigma(j),j} T - a_{\sigma(j),j}) \in \mathbb{K}[T]$ .

Pour toute permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , on a

$$\deg \left( \prod_{j=1}^n (\delta_{\sigma(j),j} T - a_{\sigma(j),j}) \right) = \text{Card}\{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ t.q. } \sigma(j) = j\}.$$

Pour  $\sigma$  distincte de l'identité de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , il y a au plus  $n - 2$  points fixes donc  $\deg \left( \prod_{j=1}^n (\delta_{\sigma(j),j} T - a_{\sigma(j),j}) \right) \leq n - 2$ .

Pour l'identité de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , les relations coefficients-racines pour un polynôme scindé assurent que

$$\prod_{j=1}^n (T - a_{jj}) = T^n - \text{tr}(A)T^{n-1} + \text{termes de degré} \leq n - 2.$$

Ainsi,  $\chi_A = T^n - \text{tr}(A)T^{n-1} + \text{termes de degré} \leq n - 2$  et comme  $\chi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$ , on conclut.  $\square$

**Remarque II.5 :** Le théorème des valeurs intermédiaires (ou la classification des polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[T]$ ) assure que toute matrice  $A \in M_{2n+1}(\mathbb{R})$  possède une valeur propre réelle.

**Proposition-Définition II.6 :** Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  une matrice et  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ , i.e., une racine de  $\chi_A$ .

On note  $m_\lambda$  la multiplicité de la valeur propre  $\lambda$  en tant que racine de  $\chi_A$ .

On a  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} m_\lambda \leq n$  avec égalité si et seulement si  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ .

Les relations coefficients-racines pour un polynôme scindé donnent immédiatement :

**Corollaire II.7 :** Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  une matrice telle que  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ . Alors

$$\text{tr}(A) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} m_{\lambda} \lambda \quad \text{et} \quad \det(A) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} \lambda^{m_{\lambda}}.$$

## II.2 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie

Si  $f$  est un endomorphisme de  $E$  (qui est de dimension  $n$ ) et si  $B$  est une base de  $E$ , on a, pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,

$$\det(\lambda \cdot I_E - f) = \det(\lambda I_n - \text{Mat}_B(f)),$$

et l'application  $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  définie par  $\lambda \mapsto \det(\lambda \cdot I_E - f)$  est également polynomiale en  $\lambda$  :

**Proposition-Définition II.8 : 1)** Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme  $f$  de  $E$ , noté  $\chi_f$ , est l'unique élément de  $\mathbb{K}[T]$  tel que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,

$$\chi_f(\lambda) = \det(\lambda I_E - f).$$

En particulier, les valeurs propres de  $f$  sont exactement les racines de  $\chi_f$  (dans  $\mathbb{K}$ ). De plus, on a

$$\chi_f = T^n - \text{tr}(f)T^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(f).$$

**2)** Soit  $\lambda \in \text{Sp}(f)$ , i.e., une racine de  $\chi_f$  (dans  $\mathbb{K}$ ). On note  $m_{\lambda}$  la multiplicité de la valeur propre  $\lambda$  en tant que racine de  $\chi_f$ . On a  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} m_{\lambda} \leq \dim(E)$  avec égalité si et seulement si  $\chi_f$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ , et dans ce cas,

$$\text{tr}(f) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} m_{\lambda} \lambda \quad \text{et} \quad \det(f) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \lambda^{m_{\lambda}}.$$

Les remarques et les propositions de §II.1 s'adaptent immédiatement. En outre, II.3.3 donne :

**Proposition II.9 :** Soient  $f$  un endomorphisme de  $E$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $f$ .

Alors le polynôme caractéristique  $\chi_{f_F}$  de l'endomorphisme induit  $f_F \in \mathcal{L}(F)$  divise le polynôme caractéristique  $\chi_f$  de  $f$  dans  $\mathbb{K}[T]$ .

Puisqu'un sous-espace propre d'un endomorphisme est stable et que l'endomorphisme induit est une homothétie :

**Corollaire II.10 :** Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  et  $\lambda \in \text{Sp}(f)$ . Alors  $1 \leq \dim(E_{\lambda}(f)) \leq m_{\lambda}$ .

En particulier, si  $m_{\lambda} = 1$ , on a  $\dim(E_{\lambda}(f)) = 1$  et le sous-espace propre associé à  $\lambda$  est une droite.

## II.3 Matrices compagnon et théorème de Cayley-Hamilton

**Proposition-Définition II.11 :** Soit  $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ . On note  $P = T^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k T^k \in \mathbb{K}[T]$  et on appelle

matrice compagnon de  $P$  la matrice  $M_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K}).$

Alors, d'une part,  $P$  annule  $M_P$  et, d'autre part,  $\chi_{M_P} = P$ .

Le profond théorème de Cayley-Hamilton étend la proposition précédente :

**Théorème II.12 (Cayley-Hamilton) :** Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  (de dimension finie).

Alors le polynôme caractéristique  $\chi_f$  annule  $f$  (et le polynôme caractéristique d'une matrice annule cette matrice.)

*Preuve.* Avec les notations de l'énoncé, montrer que  $\chi_f(f) = 0$  revient à montrer que, pour tout  $v \in E$ ,  $\chi_f(f)(v) = 0$ .

On fixe donc un vecteur  $v \in E$ . Si  $v = 0$ , il n'y a rien à démontrer puisque  $\chi_f(f)(0) = 0$ .

Si  $v$  est un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , on a  $\chi_f(f)(v) = \chi_f(\lambda).v = 0$  d'après I.5.

Si  $v \neq 0$  et si  $v$  n'est pas un vecteur propre de  $f$ , le sous-espace  $F_v = \text{Vect}(f^k(v), k \in \mathbb{N})$  est stable par  $f$  et de dimension au moins 2. D'après II.9,  $\chi_{f|_{F_v}}$  divise  $\chi_f$  donc il existe  $Q \in \mathbb{K}[T]$  tel que  $\chi_f = Q\chi_{f|_{F_v}}$ . En évaluant en  $f$  (puis en  $v$ ), on trouve

$$\chi_f(f)(v) = Q(f) \circ \chi_{f|_{F_v}}(f)(v)$$

et il suffit de montrer que  $\chi_{f|_{F_v}}(f)(v) = \chi_{f|_{F_v}}(f|_{F_v})(v) = 0$ .

On ne perd donc rien à supposer que  $E = F_v$ , ce qu'on fait dans toute la suite. Notons  $n = \dim(E)$ .

Montrons que la famille  $(v, f(v), \dots, f^{n-1}(v))$  est libre, donc que c'est une base de  $E$ . On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe une CL nulle non-triviale de ces vecteurs, i.e., un polynôme  $P \in \mathbb{K}_{n-1}[T]$  non-nul tel que  $P(f)(v) = 0$ .

Pour tout  $k \geq n-1$ , si on note  $X^k = PQ_k + R_k$  (avec  $\deg(R_k) < \deg(P) \leq n-1$ ) la division euclidienne de  $X^k$  par  $P$ , on a  $f^k(v) = R_k(f)(v) \in \text{Vect}(v, f(v), \dots, f^{n-2}(v))$  et  $E = F_v = \text{Vect}(f^k(v), k \in \mathbb{N})$  est inclus dans  $\text{Vect}(v, f(v), \dots, f^{n-2}(v))$  qui est de dimension inférieure ou égale à  $n-1$ . C'est contradictoire !

Puisque  $(v, f(v), \dots, f^{n-1}(v))$  est une base de  $E$ , il existe des coefficients  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$  tel que  $f^n(v) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i(v)$ .

En posant  $P = T^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i T^i$ , la matrice représentative de  $f$  dans cette base est la matrice compagnon  $M_P$ , donc  $\chi_f = P$  et on conclut que  $\chi_f(f) = 0$  avec II.11. □

### III Diagonalisation en dimension finie

#### III.1 Diagonalisabilité d'un endomorphisme

##### III.1.a Définition et propriétés élémentaires

**Proposition-Définition III.1 :** Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) il existe une base  $B$  de  $E$  telle que  $\text{Mat}_B(f)$  est diagonale ;
- (ii) il existe une base  $B$  de  $E$  formée de vecteurs propres de  $f$ .

Si ces conditions sont satisfaites, on dit que  $f$  est diagonalisable.

**Exemples III.2 :** 1) Une homothétie de  $E$  est diagonalisable puisqu'elle est diagonale dans toutes les bases !

2) Un projecteur  $p$  de  $E$  est diagonalisable puisqu'en prenant une base  $B$  de  $E$  adaptée à la décomposition

$$E = \text{Im}(p) \oplus \ker(p), \text{ on trouve } \text{Mat}_B(p) = \left( \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \text{ où } r = \text{rg}(p).$$

3) Une symétrie  $s$  de  $E$  est diagonalisable puisqu'en prenant une base  $B$  de  $E$  adaptée à la décomposition

$$E = \ker(p - I_E) \oplus \ker(p + I_E), \text{ on trouve } \text{Mat}_B(s) = \left( \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-r} \end{array} \right), \text{ où } r = \dim(\ker(p - I_E)).$$

4) Un endomorphisme nilpotent  $f$  de  $E$  est diagonalisable si et seulement si il est nul.

**Remarque III.3 :** Si  $f$  est diagonalisable, son polynôme caractéristique doit être scindé. Le cas d'un endomorphisme nilpotent non-nul assure cependant que cette condition n'est pas suffisante.

##### III.1.b Diagonalisabilité et sous-espaces propres

**Théorème III.4 :** Un endomorphisme  $f$  de  $E$  est diagonalisable si et seulement si  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_\lambda(f)$ .

Rappelons qu'on sait déjà que les sous-espaces propres d'un endomorphisme sont en somme directe. On a donc :

**Corollaire III.5 :** Un endomorphisme  $f$  de  $E$  est diagonalisable si et seulement si  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f)) = \dim(E)$ .

Compte-tenu de **II.10**, on en déduit le critère purement numérique suivant :

**Théorème III.6 :** Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

Alors  $f$  est diagonalisable si et seulement si  $\chi_f$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et si, pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(f)$ ,  $\dim(E_\lambda(f)) = m_\lambda$ .

En particulier, si  $\chi_f$  est scindé à racines simples sur  $\mathbb{K}$  alors  $f$  est diagonalisable

### III.1.c Diagonalisabilité et polynômes annulateurs

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  diagonalisable. En notant  $\text{Sp}(f) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ , on a  $E = \bigoplus_{i=1}^r E_{\alpha_i}(f)$  (avec  $\dim(E_{\alpha_i}(f)) = m_{\alpha_i}$  pour tout  $1 \leq i \leq r$ ) et, en choisissant une base  $B$  de  $E$  adaptée, on a

$$\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} \alpha_1 I_{m_{\alpha_1}} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_r I_{m_{\alpha_r}} \end{pmatrix}.$$

Les règles du calcul matriciel par blocs assurent que, pour tout polynôme  $P \in \mathbb{K}[T]$ , on a

$$\text{Mat}_B(P(f)) = P(\text{Mat}_B(f)) = \begin{pmatrix} P(\alpha_1) I_{m_{\alpha_1}} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & P(\alpha_r) I_{m_{\alpha_r}} \end{pmatrix}.$$

En particulier, le polynôme  $P_0 = \prod_{i=1}^r (T - \alpha_i) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(f)} (T - \lambda)$  est annulateur de  $f$ , et tout polynôme annulateur est un multiple de  $P_0$  (le polynôme  $P_0$  est donc l'unique polynôme annulateur unitaire de degré minimal).

**Remarque III.7 :** Notons  $L_1, \dots, L_r$  les polynômes interpolateurs de Lagrange associés à  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  et montrons que  $L_1(f), \dots, L_r(f)$  sont les projecteurs associés à la décomposition  $E = \bigoplus_{i=1}^r E_{\alpha_i}(f)$  et que  $f = \sum_{i=1}^r \alpha_i L_i(f)$  :

- Comme  $\sum_{i=1}^r L_i = 1$  et  $\sum_{i=1}^r \alpha_i L_i = T$ , on a  $\sum_{i=1}^r L_i(f) = I_E$  et  $\sum_{i=1}^r \alpha_i L_i(f) = f$ .
- Soient  $1 \leq i, j \leq r$  avec  $i \neq j$ . Comme  $P_0$  divise  $L_i L_j$ , on a  $L_i(f) \circ L_j(f) = L_j(f) \circ L_i(f) = 0$ .  
Ainsi,  $P_0$  divise  $\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^r L_i L_k = L_i - L_i^2$  donc  $L_i(f) - L_i(f)^2 = 0$  et  $L_i(f)$  est bien un projecteur.
- Soit  $1 \leq i \leq r$ . Comme  $P_0$  et  $(T - \alpha_i)L_i$  sont associés, on a  $(f - \alpha_i I_E) \circ L_i(f) = 0$  et on en déduit que  $\text{Im}(L_i(f)) \subset \ker(f - \alpha_i I_E) = E_{\alpha_i}(f)$ . Si  $v \in E_{\alpha_i}(f)$ , **I.5** assure réciproquement que  $L_i(f)(v) = L_i(\alpha_i)v = v$ .

Le théorème suivant, dans la veine de ce qui précède, est sans doute le critère de diagonalisabilité le plus important :

**Théorème III.8 :** Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f$  est diagonalisable ;
- (ii) Le polynôme (scindé à racines simples)  $\prod_{\lambda \in \text{Sp}(f)} (T - \lambda)$  est annulateur de  $f$  ;
- (iii) il existe un polynôme scindé à racines simples dans  $\mathbb{K}$  annulateur de  $f$ .

*Preuve.* On vient de voir l'implication (i)  $\Rightarrow$  (ii) et l'implication (ii)  $\Rightarrow$  (iii) est triviale.

Supposons (iii) et fixons un polynôme  $Q \in \mathbb{K}[T]$  scindé à racines simples annulateur de  $f$ . Quitte à diviser  $Q$  par  $cd(Q)$ , il existe un entier  $s \geq 1$  et des scalaires  $\beta_1, \dots, \beta_s$  deux-à-deux distincts (dans  $\mathbb{K}$ ) tel que  $Q = \prod_{k=1}^s (T - \beta_k)$ .

Comme  $Q$  annule  $f$ , **I.5** assure que  $\text{Sp}(f) \subset \{\beta_1, \dots, \beta_s\}$ . En utilisant la convention  $E_\lambda(f) = \{0\}$  si  $\lambda \notin \text{Sp}(f)$ , on sait avec **I.8.1** et **I.9** que les sommes  $\sum_{i=1}^s E_{\beta_i}(f) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_\lambda(f)$  sont directes. On va montrer qu'elles sont égales à  $E$ .

On note  $L_1, \dots, L_s$  les interpolateurs de Lagrange associés à  $\beta_1, \dots, \beta_s$  et on raisonne comme dans **III.7** :

- Soit  $1 \leq i \leq s$ . Les polynômes  $Q$  et  $(T - \beta_i)L_i$  sont associés donc  $\text{Im}(L_i(f)) \subset \ker(f - \beta_i \cdot \text{Id}_E) = E_{\beta_i}(f)$ .
- Comme  $\sum_{i=1}^s L_i = 1$ , on a  $\sum_{i=1}^s L_i(f) = \text{Id}_E$  donc  $E \subset \sum_{i=1}^s \text{Im}(L_i(f)) \subset \sum_{i=1}^s E_{\beta_i}(f)$ .

Ainsi, on a bien  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_\lambda(f)$  et on conclut que  $f$  est diagonalisable avec **III.4**.  $\square$

**Corollaire III.9 :** Soient  $f$  un endomorphisme diagonalisable de  $E$  et  $F$  un sous-espace de  $E$  stable par  $f$ . Alors l'endomorphisme induit  $f_F \in \mathcal{L}(F)$  est également diagonalisable.

**Exemple III.10 :** Soient  $f, g$  deux endomorphismes diagonalisables de  $E$  qui commutent. Alors  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(g)} E_\lambda(g)$ .

Pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(g)$ ,  $E_\lambda(g)$  est stable par  $f$  et  $f_{E_\lambda(g)}$  est diagonalisable. On peut donc choisir une base de  $E_\lambda(g)$  formée de vecteurs propres de  $f_{E_\lambda(g)}$  (donc de  $f$ ). Ces vecteurs sont évidemment des vecteurs propres de  $g$ .

En concaténant ces bases, on obtient une base  $B$  de  $E$  formée de vecteurs propres communs à  $f$  et à  $g$  et  $\text{Mat}_B(f)$  et  $\text{Mat}_B(g)$  sont toutes les deux diagonales. On dit que  $f$  et  $g$  sont codiagonalisables (ou diagonalisables dans la même base). En particulier,  $f + g$  et  $f \circ g = g \circ f$  sont diagonalisables.

## III.2 Diagonalisabilité et diagonalisation d'une matrice

**Proposition-Définition III.11 :** Une matrice  $A \in M_n(\mathbb{K})$  est diagonalisable (sur  $\mathbb{K}$ ) si elle est semblable à une matrice diagonale  $D \in D_n(\mathbb{K})$ .

**Remarques III.12 : 1)** Cette définition est compatible avec celle de la diagonalisabilité d'un endomorphisme via le dictionnaire habituel et la correspondance entre similitude des matrices et formule de changement de base :

- Si  $A = PDP^{-1}$  avec  $D \in D_n(\mathbb{K})$  et  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ ,  $D$  représente  $\Phi_A$  dans une base (non-canonique) de  $\mathbb{K}^n$  ;
  - Si  $f$  est un endomorphisme de  $E$  et si  $B_{pr}$  est une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $E$  alors, pour toute base  $B$  de  $E$ ,  $\text{Mat}_B(f)$  est diagonalisable puisque  $\text{Mat}_B(f) = P_{B \rightarrow B_{pr}} \text{Mat}_{B_{pr}}(f) P_{B_{pr} \rightarrow B}^{-1}$ .
- 2)  $A \in M_n(\mathbb{K})$  est diagonalisable si et seulement si  $A^T$  l'est. Dans ce cas,  $A$  et  $A^T$  sont semblables.
- 3) Si  $A$  est une matrice diagonalisable sur  $\mathbb{K}$ , son polynôme caractéristique doit être scindé sur  $\mathbb{K}$ . Par conséquent, la diagonalisabilité d'une matrice dépend du corps de base !

On regroupe, sous forme matricielle, les différents critères de diagonalisabilité :

**Théorème III.13 :** Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  une matrice. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{K}$  ;
- (ii)  $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} E_\lambda(A)$  (ou, de manière équivalente,  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = n$ ) ;
- (iii)  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et, pour tout  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ ,  $\dim(E_\lambda(A)) = m_\lambda$  ;
- (iv)  $A$  est annulé par le polynôme (scindé à racines simples sur  $\mathbb{K}$ )  $\prod_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} (T - \lambda)$  ;
- (v) Il existe un polynôme scindé à racines simples sur  $\mathbb{K}$  qui annule  $A$

En particulier, si  $\chi_A$  est scindé à racines simples sur  $\mathbb{K}$  alors  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{K}$ .

**Remarque III.14 :** Si  $M = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D \end{array} \right)$  est diagonalisable, les blocs A et D le sont également.

On a bien sûr un résultat analogue pour les matrices triangulaires inférieures (resp. diagonales) par blocs.

**Exercice III.15 : 1)** Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 2 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  dans  $M_4(\mathbb{K})$ .

Donner une CNS sur les scalaires  $a, b, c, d, e, f$  pour que A (resp. B) soit diagonalisable.

**2)** Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$  une matrice inversible telle que  $A^2$  est diagonalisable. Montrer que A est diagonalisable.

**Diagonalisation effective.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  une matrice diagonalisable. Il existe alors une matrice diagonale  $D = \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in D_n(\mathbb{K})$  et une matrice inversible  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  telle que  $A = PDP^{-1}$ , i.e.,  $AP = PD$ . Pour tout  $1 \leq j \leq n$ , on a alors

$$Ac_j(P) = c_j(AP) = c_j(PD) = Pc_j(D) = \alpha_j c_j(P).$$

En d'autres termes,  $c_j(P)$  est un vecteur propre de A associé à la valeur propre  $\alpha_j$ . Si une matrice A (de petite taille) ne possède pas de structure particulière permettant de raisonner moins brutalement, on pourra donc :

- déterminer le spectre de A en calculant son polynôme caractéristique et en déterminant ses racines ;
- pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ , calculer  $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n)$  (avec Gauss-Jordan si besoin).

On vérifie alors le critère (iii) du théorème III.9 pour établir la diagonalisabilité de A dans  $\mathbb{K}$  et, en concaténant des bases des sous-espaces propres de A, on obtient une matrice P inversible qui diagonalise A.

**Exemples III.16 : 1)** Considérons la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

- Pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on calcule

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

et on en déduit que  $\text{Sp}(A) = \{1, 2\}$ .

- On a  $A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  donc  $\ker(A - I_3) = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

$$\text{On a } A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ donc } \ker(A - 2I_3) = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{K} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque  $\dim(E_1(A)) = m_1 = 1$  et que  $\dim(E_2(A)) = m_2 = 2$ , A est diagonalisable.

En notant  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $D = \text{Diag}(1, 2, 2)$ , les colonnes de P forment une base de  $\mathbb{K}^3$  donc P est inversible, et on a  $A = PDP^{-1}$  par construction.

**2)** Considérons à présent la matrice  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ .

- On reconnaît une matrice compagnon donc on obtient sans calcul  $\chi_B = T^3 - 5T^2 + 8T - 4$ . On remarque que 1 est racine et on calcule la factorisation  $\chi_B = T^3 - 5T^2 + 8T - 4 = (T-1)(T^2 - 4T + 4) = (T-1)(T-2)^2$  pour conclure que  $\text{Sp}(A) = \{1, 2\}$ .
- On a  $\text{rg}(B - I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \geq 2$  donc  $\dim(E_1(B)) = 1$ .
- On a  $\text{rg}(B - 2I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \geq 2$  donc  $\dim(E_2(A)) = 1$ .

On conclut donc que B n'est pas diagonalisable.

Ainsi, les matrices A et B (dont les polynômes caractéristiques sont les mêmes) ne sont pas semblables.

## IV Trigonalisation en dimension finie

**Proposition-Définition IV.1 :** Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- il existe une base  $B$  de  $E$  telle que  $\text{Mat}_B(f)$  est triangulaire supérieure ;
- il existe une suite strictement croissante  $\{0\} \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_{\dim(E)-1} \subset E$  de sous-espaces de  $E$  (on a donc  $\dim(F_k) = k$  pour tout  $0 < k < \dim(E)$ ) qui sont tous stables par  $f$ .

Si ces conditions sont satisfaites, on dit que  $f$  est trigonalisable.

**Exemple IV.2 :** Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  nilpotent tel que  $n = \min\{k \geq 1 \text{ tel que } f^k = 0\}$ . Puisque  $f^{n-1} \neq 0$ , on peut trouver un vecteur  $v \in E$  tel que  $f^{n-1}(v) \neq 0$  et on montre que  $(f^{n-1}(v), f^{n-2}(v), \dots, f(v), v)$  est libre donc que c'est une base  $B$  de  $E$ . On en déduit que  $f$  est trigonalisable puisque

$$\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Définition IV.3 :** Une matrice  $A \in M_n(\mathbb{K})$  est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

**Remarques IV.4 :** 1) A nouveau, cette définition est compatible avec celle de la trigonalisabilité d'un endomorphisme via le dictionnaire habituel et la correspondance entre similitude des matrices et formule de changement de base :

- Si  $A = PTP^{-1}$  avec  $T \in T_n^s(\mathbb{K})$  et  $P \in GL_n(\mathbb{K})$ ,  $T$  représente  $\Phi_A$  dans une base (non-canonique) de  $\mathbb{K}^n$  ;
  - Si  $f$  est un endomorphisme de  $E$  et si  $B_{tr}$  est une base de  $E$  qui trigonalise  $f$  alors, pour toute base  $B$  de  $E$ ,  $\text{Mat}_B(f)$  est trigonalisable puisque  $\text{Mat}_B(f) = P_{B \rightarrow B_{tr}} \text{Mat}_{B_{tr}}(f) P_{B \rightarrow B_{tr}}^{-1}$ .
- 2) Si  $f \in \mathcal{L}(E)$  et si  $B = (v_1, \dots, v_n)$  est une base de  $E$  telle que  $\text{Mat}_B(f)$  est triangulaire supérieure alors, en notant  $B' = (v_n, v_{n-1}, \dots, v_1)$ ,  $\text{Mat}_{B'}(f)$  est triangulaire inférieure (mais ce n'est pas  $\text{Mat}_B(f)^T$  !)
- De manière analogue, si  $A \in M_n(\mathbb{K})$  est semblable à une matrice triangulaire supérieure, elle est également semblable à une matrice triangulaire inférieure.
- 3) Si  $f \in \mathcal{L}(E)$  (resp.  $A \in M_n(\mathbb{K})$ ) est trigonalisable alors son polynôme caractéristique est scindé.
- Par conséquent, la trigonalisabilité de  $A \in M_n(\mathbb{K})$  dépend du corps de base.

**Théorème IV.5 :** Un endomorphisme  $f \in \mathcal{L}(E)$  (resp. une matrice  $A \in M_n(\mathbb{K})$ ) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur  $\mathbb{K}$ .

*Preuve.* On a donné le sens direct à la remarque précédente.

Réciproquement, soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et supposons que  $\chi_f$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ . Choisissons une racine  $\alpha_1 \in \mathbb{K}$  de  $\chi_f$ , i.e., une valeur propre de  $f$  et un vecteur propre  $v_1 \in E$  associé à cette valeur propre. On complète alors en une base  $B = (v_1, \dots, v_n)$  de  $E$  et la matrice représentative de  $f$  dans la base  $B$  est de la forme

$$\text{Mat}_B(f) = \left( \begin{array}{c|c} \alpha_1 & L' \\ \hline 0 & A' \end{array} \right) \quad \text{avec} \quad L' \in M_{1,n-1}(\mathbb{K}) \text{ et } A' \in M_{n-1}(\mathbb{K}).$$

Si  $n = 2$ , la matrice  $\text{Mat}_B(f)$  est donc triangulaire supérieure, ce qu'il fallait démontrer.

Soit  $n \geq 3$  et supposons que le théorème est vrai en dimension  $n - 1$ . On sait alors que  $\chi_f = \chi_{\text{Mat}_B(f)} = (T - \alpha_1)\chi_{A'}$  et, puisque  $\chi_{A'}$  divise  $\chi_f$  scindé,  $\chi_{A'}$  est lui-même scindé. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une matrice inversible  $P' \in \text{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$  et une matrice triangulaire  $T' \in T_{n-1}^s(\mathbb{K})$  telle que  $A' = P'T'P'^{-1}$ .

Posons  $P = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P' \end{array} \right) \in M_n(\mathbb{K})$ . Alors  $P$  est inversible car  $P'$  l'est et il existe une base  $B' = (v_1, v'_2, \dots, v'_n)$  de  $E$  telle que  $P_{B \rightarrow B'} = P^{-1}$  (pour tout  $2 \leq j \leq n$ , on note  $v'_j$  le vecteur de coordonnées  $c_j(P^{-1})$  dans la base  $B$ ). D'après la formule de changement de base, on a

$$\text{Mat}_{B'}(f) = P_{B' \rightarrow B} \text{Mat}_B(f) P_{B \rightarrow B'}^{-1} = P^{-1} \left( \begin{array}{c|c} \alpha_1 & L' \\ \hline 0 & A' \end{array} \right) P = \left( \begin{array}{c|c} \alpha_1 & L'P' \\ \hline 0 & T' \end{array} \right)$$

et  $f$  est bien trigonalisable. On peut donc conclure selon le principe de récurrence.  $\square$

**Corollaire IV.6 :** Si  $f \in \mathcal{L}(E)$  (resp.  $A \in M_n(\mathbb{K})$ ) est nilpotent, alors  $f$  (resp.  $A$ ) est trigonalisable (sur  $\mathbb{K}$ ).

**Corollaire IV.7 :** Si  $f \in \mathcal{L}(E)$  est trigonalisable et si  $F$  est un sous-espace de  $E$  stable par  $f$ , alors l'endomorphisme induit  $f_F$  est trigonalisable.

**Corollaire IV.8 :** La matrice  $M = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D \end{array} \right)$  est trigonalisable si et seulement si  $A$  et  $D$  le sont.

**Corollaire IV.9 :** Tout endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie (resp. toute matrice à coefficients dans  $\mathbb{C}$ ) est trigonalisable.

**Exemple IV.10 :** Considérons de nouveau la matrice  $B$  de **III.16.2**. On a  $\chi_B = (T - 1)(T - 2)^2$  donc  $B$  est trigonalisable dans  $\mathbb{R}$ . On calcule  $E_1(B) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $E_2(B) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$  et, puisque  $\dim(E_2(B)) < m_2$ ,

on résout l'équation  $(B - 2I_3)X = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$  dont  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  est une solution particulière.

Notons  $P = \left( \begin{array}{c|c|c} 4 & 2 & -1 \\ \hline -4 & -3 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$  de sorte que  $BP = \left( \begin{array}{c|c|c} c_1(P) & 2c_2(P) & c_2(P) + 2c_3(P) \end{array} \right) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

En vérifiant que  $P$  est inversible, on a bien montré que  $B$  était semblable à  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

**Remarque IV.11 :** Aucune technique spécifique de trigonalisation n'est au programme et un énoncé d'exercice devra (le plus souvent) proposer une indication ou une matrice triangulaire  $T$  à laquelle la matrice  $A$  à trigonaliser est semblable (il y en a une infinité lorsque  $A$  n'est pas diagonalisable).

Le cas de **IV.10** est cependant typique et il est toujours possible de trouver une matrice diagonale  $D$  et une matrice nilpotente  $N$  telles que  $D$  et  $N$  commutent et telle que  $A$  est semblable à  $D + N$ .