

DM3 (A rendre le 02/11/2026)

Exercice I - Déterminant de Cauchy

Soient $n \geq 2$ un entier et $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)$ deux n -uplets de complexes tels que, pour tous $1 \leq i, j \leq n$, $a_i + b_j \neq 0$. On note $D_n(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$ le déterminant de la matrice $\left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{C})$.

Le but de l'exercice est de montrer que $D_n(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)}$.

1) Calculer $D_2(a_1, a_2, b_1, b_2)$ et vérifier que le résultat est vrai si $n = 2$.

2) Justifier que $D_n(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = 0$ s'il existe $1 \leq i < j \leq n$ tels que $a_i = a_j$ ou $b_i = b_j$.

On suppose dans la suite que $n \geq 3$ et que, pour tous $1 \leq i < j \leq n$, $a_i \neq a_j$ et $b_i \neq b_j$.

On note $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{-b_1, \dots, -b_n\}$ et, pour tout $\lambda \in \Omega$, on note $F(\lambda) = D_n(a_1, \dots, a_{n-1}, \lambda, b_1, \dots, b_n)$.

3) Montrer qu'il existe $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que, pour tout $\lambda \in \Omega$, $F(\lambda) = \sum_{j=1}^n \frac{\mu_j}{\lambda + b_j}$.

4) Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $\lambda \in \Omega$, $F(\lambda) = \frac{A(\lambda - a_1) \dots (\lambda - a_{n-1})}{(\lambda + b_1) \dots (\lambda + b_n)}$.

5) En multipliant par $\lambda + b_n$ puis en évaluant en $-b_n$, montrer que $A = \mu_n \prod_{i=1}^{n-1} \frac{b_n - b_i}{a_i + b_n}$.

6) Conclure le calcul du déterminant de Cauchy.

Exercice II - Représentation matricielle d'un endomorphisme annulé par le polynôme $T^3 + T$.

Dans cet exercice, E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et f est un endomorphisme non-nul de E tel que $f^3 + f = 0$. On note J la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) **Un exemple.** Dans cette question, f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $A^3 + A = 0$.

b) Déterminer $\ker(A)$ et $\text{Im}(A)$, puis montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Im}(A) \oplus \ker(A)$.

c) Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Montrer que $E = \text{Im}(f) \oplus \ker(f)$.

3) a) Soit $v \neq 0$ un vecteur de $\text{Im}(f)$. Montrer que $(v, f(v))$ est libre.

b) Soit $m \geq 1$ un entier et $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}$ des vecteurs de $\text{Im}(f)$ tels que $(v_1, f(v_1), \dots, v_m, f(v_m), v_{m+1})$ est libre. Montrer que la famille $(v_1, f(v_1), \dots, v_r, f(v_r), v_{r+1}, f(v_{r+1}))$ est encore libre.

c) Conclure qu'il existe des vecteurs $v_1, \dots, v_r$ tels que $(v_1, f(v_1), \dots, v_r, f(v_r), v_{r+1})$ est une base de $\text{Im}(f)$.

4) Montrer qu'il existe une base B de E telle que $\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} J & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & J & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice III - Représentation matricielle d'un endomorphisme nilpotent

Dans cet exercice, f est un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie. Son *indice de nilpotence* est $q = \min\{k \geq 1 \text{ tel que } f^k = 0\}$ (et on définit de manière analogue l'indice de nilpotence d'une matrice).

On se propose de montrer qu'il existe $r \geq 1$ des entiers $q = p_1 \geq \dots \geq p_r \geq 1$ avec $\sum_{k=1}^r p_k = \dim(E)$ et une base B de E telle que

$$\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} N_{p_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N_{p_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & N_{p_r} \end{pmatrix} \quad \text{où, pour tout } p \geq 1, \quad N_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_p(\mathbb{K}).$$

On notera que, pour tout $p \geq 1$, l'indice de nilpotence de N_p est égal à p .

0) Exemples en dimension 4. Déterminer les 5 familles d'entiers $p_1 \geq \dots \geq p_r \geq 1$ telles que $\sum_{k=1}^r p_k = 4$ et

$$\text{expliciter (sans blocs ni pointillés) les matrices } \begin{pmatrix} N_{p_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N_{p_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & N_{p_r} \end{pmatrix} \text{ correspondantes.}$$

Donner le rang et l'indice de nilpotence de chacune de ces matrices.

1) Justifier que le résultat annoncé est vrai si $f = 0$ (on donnera la famille $p_1 \geq \dots \geq p_r$ correspondante).

Que peut-on dire si $\dim(E) = 1$?

On suppose dans la suite de cette partie que $f \neq 0$. On a donc $q \geq 2$ et on peut choisir $v \in E$ tel que $f^{q-1}(v) \neq 0$.

2) a) Montrer que la famille $(f^{q-1}(v), f^{q-2}(v), \dots, f(v), v)$ est libre et en déduire que $q \leq \dim(E)$.

b) On note F_v le sous-espace $\text{Vect}(f^{q-1}(v), f^{q-2}(v), \dots, f(v), v)$. Montrer que F_v est stable par f et écrire la matrice représentative de l'endomorphisme induit f_{F_v} dans la base $B_v = (f^{q-1}(v), f^{q-2}(v), \dots, f(v), v)$.

c) Justifier que le résultat annoncé est vrai si $q = \dim(E)$. Que peut-on dire si $\dim(E) = 2$?

On suppose dans la suite que $\dim(E) \geq 3$, que $q < \dim(E)$ et que le résultat annoncé est vrai pour tout $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E' de dimension strictement inférieure à $\dim(E)$ et pour tout endomorphisme nilpotent f' de E' .

3) a) A l'aide du théorème de la base incomplète, justifier qu'il existe une forme linéaire $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $\varphi(f^{q-1}(v)) = 1$ et telle que, pour tout $0 \leq k \leq q-2$, $\varphi(f^k(v)) = 0$.

b) Soient $0 \leq i, j \leq q-1$ des entiers. Justifier que $\varphi \circ f^i : E \rightarrow \mathbb{K}$ est linéaire et calculer $(\varphi \circ f^i)(f^{q-j-1}(v))$.

4) On note $\Phi : E \rightarrow \mathbb{K}^q$ l'application définie par $\Phi(w) = (\varphi(w), (\varphi \circ f)(w), \dots, (\varphi \circ f^{q-1})(w))$ pour tout $w \in E$.

a) Justifier que Φ est linéaire et surjective et, en notant $G_v = \ker(\Phi)$, montrer que $E = F_v \oplus G_v$.

b) Montrer que G_v est stable par f et que l'endomorphisme induit f_{G_v} est nilpotent, d'indice de nilpotence q' inférieur ou égal à q .

5) Conclure qu'il existe des entiers $q = p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_r \geq 1$ avec $\sum_{k=1}^r p_k = \dim(E)$ et une base B de E tels que $M_B(f)$ est de la forme annoncée.

On peut donc conclure selon le principe de récurrence que le résultat est vrai en dimension finie quelconque.