

Programme de colles - Semaine 6 (du 2/11 au 6/11)

Reprise du programme précédent - **Leçon 4 - Rappels et compléments de calcul algébrique**. On garde :

☞ Exercice corrigé : On note $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $T^2 - 3T + 2$ annule M .

En raisonnant par analyse-synthèse, déterminer $D \in D_3(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_3(\mathbb{K})$ telles que $M = QDQ^{-1}$.

☞ Si $g : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est n -linéaire alternée, si $A \in M_n(\mathbb{K})$ n'est pas inversible, $g(A) = 0$.

☞ Thm : Pour tous $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det(A) \det(B)$; CNS d'inversibilité de A et $\det(A^{-1})$.

☞ Calcul de Vandermonde.

Leçon 5 - Rappels et compléments d'algèbre linéaire

I- Espaces et sous-espaces vectoriels

1) Produits d'espaces vectoriels - Définition, vecteur nul, combinaisons linéaires (CL) $\sum_{k=1}^r \lambda_k v_k$ et CL élémentaires $\lambda v + w$ de vecteurs de E . Produit cartésien d'espaces vectoriels. Cas de E^r , de $E^\Omega = \mathcal{F}(\Omega, E)$.

2) Sous-espaces vectoriels - Stabilité par CL (élémentaires). Exs : Sev triviaux, droites, notation $\mathbb{K}.v$ (cas de $\mathbb{K}.0$).

Intersection qqc de sev (plus grand qui...), somme finie de sev (plus petit qui...). Ex : $\sum_{k=1}^r \mathbb{K}.v_k = \text{Vect}(v_1, \dots, v_r)$.

3) Sommes directes - Deux caractérisations équivalentes (unicité de la décomposition de tout vecteur ssi unicité de la décomposition de 0). Rq : Cas de deux sev : $F_1 + F_2$ directe ssi $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. Supplémentarité dans E .

☞ Si $I = I_1 \sqcup I_2$, $\sum_{i \in I} F_i$ est directe si et seulement si $\sum_{i \in I_1} F_i$, $\sum_{i \in I_2} F_i$ et $\left(\sum_{i \in I_1} F_i \right) + \left(\sum_{i \in I_2} F_i \right)$ le sont.

II - Applications linéaires

1) Généralités - Notion d'application linéaire $f : E \rightarrow E'$, d'isomorphisme et d'espaces vectoriels isomorphes.

Rq : L'application linéaire canonique $\prod_{i \in I} F_i \rightarrow \sum_{i \in I} F_i$ est un isomorphisme ssi $\sum_{i \in I} F_i$ est directe.

Sous-espace $\mathcal{L}(E, E')$ de $\mathcal{F}(E, E')$, composition $\circ : \mathcal{L}(E, E') \times \mathcal{L}(E', E'') \rightarrow \mathcal{L}(E, E'')$ (bilinéaire).

Restriction $f|_F$ de $f \in \mathcal{L}(E, E')$ à un sous-espace F de E .

Thm : Si $E = F_1 \oplus F_2$, $f \mapsto (f|_{F_1}, f|_{F_2})$ définit un isomorphisme $\mathcal{L}(E, E') \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(F_1, E') \times \mathcal{L}(F_2, E')$.

2) Noyaux et image d'une application linéaire - Cas des hyperplans - Soit $f : E \rightarrow E'$ linéaire.

Image réciproque d'un sev $F' \subset E'$, $\ker(f)$ et CNS d'injectivité. Image directe d'un sev $F \subset E$, cas de $\text{Im}(f)$.

☞ Pour $f, g : E \rightarrow E'$ linéaires, $\ker$ et Im de $f + g$ (inclusions évidentes, CS d'égalité).

☞ Pour $E \xrightarrow{f} E' \xrightarrow{g} E''$ linéaires, $\ker$ et Im de $g \circ f$ (CNS pour $g \circ f = 0$, inclusions évidentes, CNS d'égalité).

☞ Notion d'hyperplan (noyau d'une forme linéaire $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$ non-nulle), hyperplans et droites, hyperplans et proportionnalité dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Un sev admettant une droite supplémentaire est un hyperplan.

3) Algèbres des endomorphismes d'un espace vectoriel - Cas des projecteurs - Ensembles $\mathcal{L}(E)$ et $GL(E)$ (stable par $\circ$) des endomorphismes et automorphismes de E , I_E et homothéties. Polynôme en un endomorphisme.

☞ Projecteur $p : E \rightarrow E$ (annulé par $T^2 - T$). $\text{Im}(p) = \ker(I_E - p)$ et $E = \text{Im}(p) \oplus \ker(p)$.

Projecteurs associés à $E = F_1 \oplus F_2$, à $E = \bigoplus_{k=1}^r F_k$ (calcul de $p_i \circ p_j$ et de $\sum_{i=1}^r p_i$ - Réciproque).

Symétrie $s : E \rightarrow E$ (annulée par $T^2 - 1$). $E = \ker(s - I_E) \oplus \ker(s + I_E)$ et calcul des projecteurs associés.

- 4) Sous-espaces stables par un endomorphisme - Endomorphisme induit - Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $F \subset E$ un sev. Stabilité de F par f , endomorphisme $f_F \in \mathcal{L}(F)$ induit par f . Exs : $\text{Vect}(f^k(v), k \in \mathbb{N})$; cas où $f \circ g = g \circ f$.

III - Algèbre linéaire en dimension finie

E est dimension finie s'il possède une famille génératrice finie, ce qu'on suppose dans tout le chapitre.

- 1) Bases et dimension - Notion de famille libre (finie ou infinie). Si $(v_1, \dots, v_n)$ libre, $\sum_{i=1}^n \mathbb{K}.v_i$ est directe.

Exs : Cas d'une famille de polynômes échelonnée en degré ou en valuation; $\boxed{\text{Ex}}$ Cas de $(t \mapsto e^{\alpha t}, \alpha \in \mathbb{C})$.

Si $(v_1, \dots, v_n)$ est libre, $w \in \text{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ ssi $(v_1, \dots, v_n, w)$ est liée. Cas où $\text{Vect}(v_1, \dots, v_n) \neq E$.

Si $(v_1, \dots, v_n)$ engendre E et est liée, il existe $1 \leq j \leq n$ tel que $(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n)$ engendre encore E .

Notion de base. Existence de base en prenant une famille génératrice de cardinal minimal.

$\boxed{\text{Ex}}$ Si $(v_1, \dots, v_n)$ engendre E , si $(w_1, \dots, w_p)$ est libre, $p \leq n$ (avec Gauss-Jordan).

Par conséquent, toutes les bases ont même cardinal : c'est $\dim(E)$. Cas d'une famille de cardinal égal à $\dim(E)$.

Exs : Dimension des ev usuels, cas d'un produit. Thm de la base extraite. Thm de la base incomplète.

- 2) Dimension des sous-espaces, rang des applications linéaires - Soit $F \subset E$. Alors $\dim(F) \leq \dim(E)$ et cas d'égalité (application à deux sev). Existence du supplémentaire (par complétion d'une base de F).

Partition d'une base/concaténation de bases et décomposition $E = \bigoplus_{j=1}^r F_j$.

Prop : Si $(v_1, \dots, v_p)$ est une base de E , l'application $\mathcal{L}(E, E') \rightarrow E'^p$ définie par $f \mapsto (f(v_1), \dots, f(v_p))$ est un isomorphisme. Lecture des "jectivités", CNS d'isomorphie de deux $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, calcul de $\dim(\mathcal{L}(E, E'))$. Cas d'une application linéaire entre deux espaces de même dim.

Ex : $\Phi : M_{np}(\mathbb{K}) \mapsto \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ (définie par $A \mapsto (X \mapsto AX)$) est un isomorphisme.

Si $f \in \mathcal{L}(E, E')$ et si $E = \ker(f) \oplus F$, f induit $F \xrightarrow{\sim} \text{Im}(f)$. $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$ et thm du rang.

$\boxed{\text{Ex}}$ En considérant l'application canonique $\prod_{i=1}^r F_i \rightarrow \sum_{i=1}^r F_i$, caractérisation des sommes directes, Grassmann.

IV - Matrices représentatives

- 1) Matrice représentative d'une famille de vecteurs - Matrice de passage - Soit B une base de E .

Pour $w \in E$, pour $\mathcal{F} = (w_1, \dots, w_p)$, matrices représentatives $\text{Mat}_B(w) \in \mathbb{K}^n$ et $\text{Mat}_B(\mathcal{F}) \in M_{np}(\mathbb{K})$.

En notant $X = (\mu_k) \in \mathbb{K}^p$, matrice représentative $\text{Mat}_B(\mathcal{F})X$ de $\sum_{k=1}^p \mu_k w_k$. Application de Gauss-Jordan.

Matrices de passage $P_{B_1 \rightarrow B_2}$ et formules usuelles. Interprétation de $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ comme matrice de passage.

A partir de mardi 3/11 seulement

- 2) Matrice représentative d'une application linéaire dans des bases - Soient B, B' des bases de E, E' de dim p, n .

Pour $f \in \mathcal{L}(E, E')$, construction de $\text{Mat}_{B',B}(f)$. Pour tout $v \in E$, $\text{Mat}_{B'}(f(v)) = \text{Mat}_{B',B}(f) \text{Mat}_B(v)$.

L'application $\text{Mat}_{B',B} : \mathcal{L}(E, E') \rightarrow M_{np}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme, compatible avec la composition.

Rqs : $P_{B_1 \rightarrow B_2} = \text{Mat}_{B_1, B_2}(I_E)$; $\text{rg}(f) = \text{rg}(\text{Mat}_{B',B}(f))$; Cas où $E = F_1 \oplus F_2$ et B est adaptée.

Changement de base. $\boxed{\text{Ex}}$ Si $f : E \rightarrow E'$ est de rang r , il existe B, B' telles que $\text{Mat}_{B',B}(f) = J_{n,p,r}$.

- 3) Matrice représentative d'un endomorphisme dans une base - Soit B une base de E de dim n . Pour $f \in \mathcal{L}(E)$,

$\text{Mat}_B(f) := \text{Mat}_{B,B}(f)$. L'application $\text{Mat}_B : \mathcal{L}(E) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ est un isomorphisme d'algèbre.

Rqs : Pour tout $P \in \mathbb{K}[T]$, $P(\text{Mat}_B(f)) = \text{Mat}_B(P(f))$ (donc f et $\text{Mat}_B(f)$ ont les mêmes polynômes annulateurs). Cas où B est adaptée à $E = F_1 \oplus F_2$ et où F_1 (et/ou F_2) est stable par f . Changement de base.

Trace et déterminant d'un endomorphisme.

$\boxed{\text{Ex}}$ Si p est un projecteur, il existe B tel que $\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En particulier, $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$.