Commentaires sur le DS2 (10/10/2026)

Les deux premiers exercices de ce devoir traitaient de l'existence et du calcul d'intégrales impropres.
En ce qui concerne l'existence, la situation est bien balisée par la leçon **3** : pour une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$ **continue** sur un intervalle quelconque I, une **étude locale aux bornes ouvertes** de I permet, à l'aide des intégrales de référence (fonctions exponentielles ou fonctions puissances (Riemann)), de montrer l'intégrabilité.
Rappelons encore que, dans le cas où I n'est pas majoré, dire que $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc l'intégrale de f existe en $+\infty$ est **la pire erreur qu'on peut faire** !
Le calcul d'une intégrale convergente est généralement plus difficile et requiert d'utiliser des suites ou des séries, ou encore des intégrales à paramètres réels comme on le verra dans la suite de l'année (c'était déjà le thème du **DM2**). On présentera des théorèmes qui permettent d'intervertir des passages à la limite (car une intégrale est une limite) et permettent de généraliser le genre de chose qu'on faisait à la main dans ces exercices.

Exercice I - Calcul d'une intégrale elliptique

Soient $0 < a \leq b$ deux réels. Le but de cet exercice était de calculer $\mathrm{I}_{a,b} = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}}$ qui apparaît dans le calcul du périmètre d'une ellipse (d'où son nom). Gauss le premier remarque qu'en introduisant les suites (a_n) et (b_n) définies en posant $a_0 = a$, $b_0 = b$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},$$

qui convergent (très rapidement) vers la *moyenne arithmético-géométrique* m de a et b, la suite des intégrales $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+a_n^2)(t^2+b_n^2)}}$ est constante. Pour tout $t \geq 0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{(t^2+a_n^2)(t^2+b_n^2)}} = \frac{1}{t^2+m^2}$ donc

$$\mathrm{I}_{a,b} = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+a_n^2)(t^2+b_n^2)}} = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+a_n^2)(t^2+b_n^2)}} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^2+m^2} = \frac{\pi}{2m}.$$

Pour donner à ce raisonnement la rigueur attendue en CPGE, on doit donc montrer l'existence de ces intégrales (toutes construites sur le modèle de $\mathrm{I}_{a,b}$, c'était la question **1**), montrer la convergence des suites (a_n) et (b_n) (question **2**), montrer que la suite (I_n) est constante (question **4**) et qu'on pouvait intervertir les limites ci-dessus (question **3**). **Voyons dans le détail.**

1) Pour justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}}$, on doit **dire** que l'intégrande est continue sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, **donner** l'équivalent $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$ et **conclure** avec Riemann. **Deux lignes !**
La grande majorité a compris qu'on avait passé l'âge de justifier la continuité de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}}$ sur une demi-page ou de faire une demi-page de calcul pour calculer l'équivalent ! Beaucoup par contre ne parlent pas de la continuité, et se retrouve à dire que l'intégrale est faussement impropre en 0, ce qui n'est pas exact.

2) Cette question est un **exercice extrêmement classique, qu'il faut savoir faire** !
Pour montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, il n'est paradoxalement pas commode d'appliquer le théorème des suites adjacentes car montrer que $(b_n - a_n)$ tend vers 0 n'est pas immédiat. Par contre, l'inégalité arithmético-géométrique permet de montrer facilement que $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ pour tout $n \geq 0$. Le théorème de la convergence monotone assure que (a_n) et (b_n) convergent et le calcul de la limite se fait, **comme pour toutes les suites définies par récurrence**, en faisant tendre n vers l'infini dans la relation de récurrence.

3) "Montrer que la suite (I_n) converge et calculer sa limite" est un unique bloc puisque, par définition, (I_n) converge si et seulement si il existe ℓ tel que $(\mathrm{I}_n - \ell)$ tend vers 0. Avec le théorème d'encadrement, la question doit donc être lue comme "trouver ℓ et une suite (M_n) qui tend vers 0 telle que, pour tout $n \geq 0$, $|\mathrm{I}_n - \ell| \leq \mathrm{M}_n$". Ce sera le cas encore et encore tout au long de l'année...

La limite est connue, c'est $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^2+m^2}$ **qu'on doit savoir calculer sans erreur** ! Il faut connaitre **par coeur** la primitive $t \mapsto \dfrac{1}{m}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{t}{m}\right)$ de l'intégrande ! Par linéarité et avec l'inégalité triangulaire, on a donc

$$(\star) \quad |\mathrm{I}_n - \ell| = \left|\int_0^\infty \left[\frac{1}{\sqrt{(t^2+a_n^2)(t^2+b_n^2)}} - \frac{1}{t^2+m^2}\right]\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^\infty \left|\frac{1}{\sqrt{(t^2+a_n^2)(t^2+b_n^2)}} - \frac{1}{t^2+m^2}\right|\mathrm{d}t.$$

a) Pour montrer que $\left|\dfrac{1}{\sqrt{(t^2+a_n^2)(t^2+b_n^2)}} - \dfrac{1}{t^2+m^2}\right| \leq \dfrac{|2m^2 - a_n^2 - b_n^2|t^2 + |m^4 - a_n^2 b_n^2|}{2(t^2+a^2)^3}$, commencer par appliquer l'inégalité triangulaire est sans avenir. Cette erreur avait déjà été faite dans le **DS1** (qst **5.a**). Beaucoup ont mis au même dénominateur et correctement minoré le dénominateur. Trop peu ont pensé à multiplier en haut et en bas par la partie conjuguée pour éliminer la racine carré du numérateur.

b) Justifier l'existence des intégrales doit suivre le modèle habituel (continuité puis analyse locale aux bornes ouvertes). La linéarité permet de sortir la dépendance en n des intégrales et ceux qui ont fait cette question en entier sont souvent passé un peu vite sur l'inégalité $(\star)$ ci-dessus, qui forme le coeur du raisonnement (le reste est de la technique, c'est moins intéressant).

4) Soit $n \geq 0$.

a) Pour montrer que la fonction $\varphi_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_n(u) = \dfrac{1}{2}\left(u - \dfrac{a_n b_n}{u}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, beaucoup arguent des théorèmes généraux pour dire qu'elle est continue et dérivable, calculent la dérivée et recommencent pour dire que φ_n' est continue. Comme c'est étrange ! Les théorèmes généraux donnent aussi bien le caractère $\mathcal{C}^1$ directement !

Pour appliquer les théorèmes généraux, il est toujours préférable de faire un peu de botanique et d'identifier le type d'opérations qui "lient" des fonctions de référence de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Dire dans ce contexte que la fonction φ_n est "composée" (au sens de constituée (?)) de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est doublement maladroit : non seulement on ne dit rien du type d'opérations qui lient les fonctions, en plus, la composition est une opération susceptible d'apparaître dans ce contexte !

Le théorème de la bijection monotone a souvent été mal utilisé : puisque φ_n est continue et strictement croissante, elle réalise une bijection $\varphi_n : \mathbb{R}_+^* \xrightarrow{\sim} \varphi_n(\mathbb{R}_+^*)$. Il faut calculer des limites pour pouvoir affirmer que $\varphi_n(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$!

b) Pas de problème sur cette question de calcul.

c) La justification de l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+a_{n+1}^2)(t^2+b_{n+1}^2)}}$ n'a pas posé de véritables difficultés. Il suffit de **dire** que l'intégrande est paire, et éventuellement d'évoquer le changement de variable $s = -t$.

Bien qu'on soit dans une question **c**, et en dépit de la question **b** particulièrement évocatrice, seule une partie de la classe a compris qu'il fallait faire le changement de variable $t = \varphi_n(u)$ pour montrer que $\mathrm{I}_{n+1} = \mathrm{I}_n$, et beaucoup de ceux qui l'ont compris ont mal fait changer les bornes de l'intégrale. Il faut relire le théorème de changement de variable dans les intégrales impropres (et prendre l'habitude de véritablement changer de variable en ne posant pas $t = \varphi_n(t)$ qui amène à des confusions).

d) Question de conclusion parfaitement triviale.

Exercice II - Une expression intégrale de la constante γ d'Euler

Dans cet exercice, analogue au précédent bien qu'un peu plus compliqué, on rappelait la définition de la constante d'Euler $\gamma := \lim_{n\to\infty}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)-\ln(n+1)\right] = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)$ et on montrait qu'elle était égale à l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$.

0) La continuité sur $\mathbb{R}_+^*$ passe à l'as une copie sur deux ! En 0, le calcul d'un équivalent de $t\mapsto e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)$ a été très peu réussi, ce n'est pas normal ! On met au même dénominateur (qui est alors équivalent à t^2) et on utilise un $\mathrm{DL}_2(0)$ de e^{-t} (où on trouve des erreurs ! ?) En $+\infty$, on a immédiatement $e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)\sim e^{-t}$ puisque la parenthèse tend vers 1. Les fonctions exponentielles sont tout autant des fonctions de référence que $\frac{1}{t^2}$ (et n'ont pas de problème en 0), c'est un peu dommage de dire que $e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)=o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

1) Soient $0<a<b$ deux réels.

a) Tout le monde sait montrer que la fonction $t\mapsto\dfrac{e^{-t}-1}{t}$ est prolongeable en 0, mais ce n'était pas la question. Il fallait montrer qu'elle était prolongeable **en une fonction continue sur** $\mathbb{R}$, ce qui suppose de dire aussi que la fonction est continue sur $\mathbb{R}^*$!

b) On en déduit bien sûr que $\lim_{x\to0}\displaystyle\int_{ax}^{bx}\frac{e^{-t}-1}{t}\mathrm{d}t=0$. Pour l'écrire rigoureusement, on peut introduire une primitive de la fonction précédente, ou dire qu'elle est bornée au voisinage de 0. Pas toujours très convaincant dans les copies... Certain·e·s en déduisent que $\lim_{x\to0}\displaystyle\int_{ax}^{bx}\frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t=\int_{ax}^{bx}\frac{\mathrm{d}t}{t}$ mais **une limite quand** x **tend vers 0 ne peut pas dépendre de** x, même formellement ! !

c) L'existence de $\displaystyle\int_0^\infty\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\mathrm{d}t$ est généralement traitée avec les même problèmes qu'en **1**. Pour conclure que cette intégrale valait $\ln\left(\frac{b}{a}\right)$, la valeur de $\lim_{x\to0}\displaystyle\int_{ax}^{bx}\frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t$ calculée à la question précédente, on ne peut pas brutalement séparer l'intégrale en deux car ni $\displaystyle\int_0^\infty\frac{e^{-at}}{t}\mathrm{d}t$ ni $\displaystyle\int_0^\infty\frac{e^{-bt}}{t}\mathrm{d}t$ n'existent.

Il faut introduire un $x>0$ et beaucoup le font en considérant l'intégrale $\displaystyle\int_0^x\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\mathrm{d}t$ mais x devra tendre vers 0 pour utiliser **b** ! ? En plus, ça ne permet toujours pas de couper l'intégrale en deux...

2) Soit $t>0$ un réel. La série $\displaystyle\sum_{n\geq1}e^{-nt}$ **doit être reconnue comme une série géométrique** !

Utiliser le critère de d'Alembert, qui revient à comparer le terme général d'une série à une série géométrique, manque de lucidité. Comparer avec une intégrale manque pareillement de lucidité et présente le risque de se prendre les pieds dans le tapis (ce qui n'a pas manqué de se produire) puisque c'est n qu'il faut remplacer par un paramètre continu, et c'est l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ut}\mathrm{d}u=\frac{1}{t}$ qu'il aurait fallu calculer ! On voit à la place $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nt}\leq\int_0^\infty e^{-nt}\mathrm{d}t=\frac{1}{n}$ avec n en dehors de la somme $\displaystyle\sum_{n=}$, ce qui n'a aucun sens.

La série $\displaystyle\sum_{n\geq1}(e^{-nt}-e^{-(n+1)t})$ **doit être reconnue comme une série téléscopique** !

Parmi ceux qui se lancent dans le calcul de la somme, certains se plantent encore sur la somme des termes d'une suite géométrique qu'on rappelle (après **Term**, **Mathsup**, **DM1, DS1, DM2**... Is it gonna ever stop ?) : pour tous $p<q$ dans $\mathbb{Z}$, pour tout $r\neq1$,

$$\sum_{k=p}^{q}r^k=\frac{\text{premier terme compté}-\text{premier terme non compté}}{1-\text{raison}}=\frac{r^p-r^{q+1}}{1-r}.$$

Rappelons enfin que, lorsque le résultat d'un calcul est donné par l'énoncé et que son calcul perso aboutit presque au bon endroit mais pas tout à fait, écrire une dernière ligne avec le résultat de l'énoncé ne marche jamais alors que **se relire, retrouver et corriger la petite erreur qu'on a faite** aboutit presque toujours !

3) Pour justifier l'existence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\int_0^\infty\left(e^{-nt}-\frac{e^{-nt}-e^{-(n+1)t}}{t}\right)\mathrm{d}t$, certains rentrent la somme dans l'intégrale (ok) puis écrivent que l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-nt}-\frac{e^{-nt}-e^{-(n+1)t}}{t}\right)\mathrm{d}t=\int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$ existe. C'est sans doute possible **à condition d'étudier le signe** de $e^{-nt}-\dfrac{e^{-nt}-e^{-(n+1)t}}{t}$ et d'**utiliser un résultat de majoration**. Ce n'était pas le plus simple ici et il fallait comprendre la question "montrer l'existence et calculer la valeur" comme un bloc : on a $\displaystyle\int_0^\infty\left(e^{-nt}-\frac{e^{-nt}-e^{-(n+1)t}}{t}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{n}-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\mathrm{d}t$ avec **1.c** et peu poussent le calcul jusqu'à écrire $\displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\int_0^\infty\left(e^{-nt}-\frac{e^{-nt}-e^{-(n+1)t}}{t}\right)\mathrm{d}t=a_{\mathrm{N}}$. La majorité a donc été bien en peine d'expliquer qu'on ne pouvait pas conclure sans autre forme de procès que

$$\lim_{\mathrm{N}\to\infty}\int_0^\infty\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\left(e^{-nt}-\frac{e^{-nt}-e^{-(n+1)t}}{t}\right)\mathrm{d}t=\int_0^\infty\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-nt}-\frac{e^{-nt}-e^{-(n+1)t}}{t}\right)\mathrm{d}t.$$

4) Soient $t>0$ un réel et $n\geq 1$ un entier

a) Seule l'égalité des accroissements finis permet de montrer qu'il existe $c_{t,n}\in]nt,(n+1)t[$ tel qu'on a $\dfrac{e^{-nt}-e^{-(n+1)t}}{t}=e^{-c_{t,n}}$. Il faut, pour appliquer ce type d'énoncé, justifier que les hypothèses du théorème sont satisfaites !

b) Plus de souplesse, et moins de réussite pourtant, pour en déduire que $\left|e^{-nt}-\dfrac{e^{-nt}-e^{-(n+1)t}}{t}\right|\leq te^{-nt}$. C'est une question **b** qui commence par "en déduire" : il faut comprendre qu'on doit majorer $\left|e^{-nt}-e^{-c_{t,n}}\right|$!

5) Soit $\mathrm{N}\geq 1$ un entier.

a) La convexité est généralement bien utilisée pour montrer que $0\leq\dfrac{t}{e^t-1}\leq 1$.
Est-il possible de ne pas reconnaître la question **4** dans $\displaystyle\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{\infty}\left|e^{-nt}-\frac{e^{-nt}-e^{-(n+1)t}}{t}\right|\leq e^{-\mathrm{N}t}$? Si on sait sommer les séries géométriques, on a immédiatement $\displaystyle\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{\infty}\left|e^{-nt}-\frac{e^{-nt}-e^{-(n+1)t}}{t}\right|\leq\frac{te^{-(\mathrm{N}+1)t}}{1-e^{-t}}$ et, entre la question posée et l'encadrement $0\leq\dfrac{t}{e^t-1}\leq 1$, il n'y a plus qu'à réaliser que $\dfrac{e^{-t}}{1-e^{-t}}=\dfrac{1}{e^t-1}$!

b) Il fallait tout coller dans cette dernière question, qui était facile à condition de savoir lever le nez du guidon de temps en temps. D'une façon générale, **prendre 2 ou 3 minutes pour relire l'énoncé d'un exercice dans sa globalité, à la lumière des questions déjà traitées, fait gagner du temps (et des points)**.

Exercice III - Bicommutant d'une matrice diagonale

Cet exercice d'algèbre était sans doute un peu sévère, beaucoup moins proche du cours que les deux exercices précédents. La majorité de la classe a passé l'essentiel du temps sur les exercices d'intégration et n'a pas abordé significativement cet exercice pourtant bien joli.

Comme souvent en algèbre, on commence par introduire des notations. Les notations sont fondamentales en mathématiques en général, et en algèbre en particulier. Comprendre le rôle que joue chaque lettre (qu'un énoncé bien fait - mais il y a aussi des énoncés mal écrits - utilisera avec discernement) est important !

Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, on note $\mathbb{K}[A]$ l'ensemble $\{P(A), P \in \mathbb{K}[T]\}$ des polynômes en A, qui est donc une partie de $M_n(\mathbb{K})$! Cette notation est dans le cours, il faut se l'approprier ! La lettre P désigne un polynôme (donc une suite de coefficients qui est nulle à partir d'une certain rang) et on évalue les polynômes en la matrice A en notant $P(A)$. On peut (dans d'autres contextes) évaluer également les polynômes en des nombres, parler de divisibilité de P par un polynôme Q, ce qui n'a pas de sens dans $M_n(\mathbb{K})$. **Il ne faut donc surtout pas noter** P **un élément de** $\mathbb{K}[A]$!

On définit le commutant de A comme l'ensemble

$$\mathcal{C}(A) = \{B \in M_n(\mathbb{K}) \text{ t.q. } AB = BA\}$$

des matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec A. Puisque deux polynômes en A commutent, on a $\mathbb{K}[A] \subset \mathcal{C}(A)$.
On définit le bicommutant de A comme l'ensemble

$$\mathcal{CC}(A) = \bigcap_{B \in \mathcal{C}(A)} \mathcal{C}(B) = \{M \in M_n(\mathbb{K}) \text{ t.q., pour tout } B \in \mathcal{C}(A),\ BM = MB\}$$

des matrices qui commutent avec tous les éléments du commutant de A. Puisque $A \in \mathcal{C}(A)$, on a $\mathcal{CC}(A) \subset \mathcal{C}(A)$.

0) Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice quelconque.

a) Soit $B \in \mathcal{C}(A)$. On demande de montrer que, pour tout $k \geq 0$, on a $A^k B = BA^k$. C'est évidemment un résultat à prouver par récurrence. Celle-ci est immédiate, c'est vrai, mais **on ne peut pas refuser de traiter la première question** d'un exercice (ou d'une partie) en disant que la récurrence est immédiate ou, ce qui revient au même en moins élégant, en mettant des $\cdots$ au milieu d'un calcul.
Pour en déduire que $\mathbb{K}[A] \subset \mathcal{C}(B)$, même chose ! Il faut écrire ce qu'est un polynôme (ou dire que c'est une CL de monômes) et écrire que $P(A)B = BP(A)$ en deux ou trois étapes (signifiant que le produit matriciel est bilinéaire).

b) **Trop d'erreurs de calcul ensembliste sur cette question** ! Une intersection est plus petite que chacune de ses parties ! Plus explicitement, si $(C_i)_{i \in I}$ sont des parties d'un ensemble E, $\bigcap_{i \in I} C_i$ est la plus grande partie de E contenue dans chacun des C_i. Ainsi, si D est une partie de E, on a $D \subset \bigcap_{i \in I} C_i$ si et seulement si $D \subset C_i$ pour tout $i \in I$. C'était ce qu'on venait de montrer dans la question **a** !
Avec les mêmes notations, $\bigcup_{i \in I} C_i$ est la petite partie de E contenant chacun des C_i et $\bigcup_{i \in I} C_i \subset D$ si et seulement si $C_i \subset D$ pour tout $i \in I$.
Remarque. En algèbre linéaire, comme une réunion de sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace, la somme remplace la réunion (dans le cas où I est fini) mais joue exactement le même rôle.

Dans toute la suite, on fixe une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in M_n(\mathbb{K})$.
Le but de cet exercice est de montrer que l'inclusion $\mathbb{K}[D] \subset \mathcal{CC}(D)$ est une égalité.

1) Dans cette question, on suppose que $\alpha_1, ..., \alpha_n$ sont tous égaux, *i.e.*, que D **est une homothétie** αI_n.
On rappelle que, pour tous $1 \leq i, j \leq n$, E_{ij} désigne la matrice élémentaire d'indices i, j de $M_n(\mathbb{K})$ et on fixe une matrice $M = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} E_{ij} \in \mathcal{CC}(D)$.

a) A la question "Préciser $\mathcal{C}(D)$", certains se sont contentés de recopier la définition ! ? **Ca n'arrivera jamais** ! Il fallait une ligne pour justifier que toutes les matrices commutaient avec une homothétie. **Encore fallait-il avoir lu l'énoncé avec assez d'attention !**
On devait en déduire que, pour tous $1 \leq k, l \leq n$, on avait $\sum_{j=1}^{n} m_{lj} E_{kj} = \sum_{i=1}^{n} m_{ik} E_{il}$. C'était facile à condition de savoir **d'où cette égalité pouvait bien venir**. A nouveau, **il fallait avoir lu l'énoncé avec**

suffisamment d'attention. On introduisait les matrices élémentaires E_{ij} et deux entiers $1 \leq k, l \leq n$. Autant dire la matrice élémentaire E_{kl} ! Et M commute avec toutes les matrices dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$!

b) La majorité de la minorité des copies ayant abordé cette question a correctement interprété l'égalité précédente pour en déduire que M était une homothétie. Ainsi, **dans le cas où** D **est une homothétie**, on a montré que $\mathbb{K}[\mathrm{D}] = \mathcal{CC}(\mathrm{D}) = \mathbb{K}.\mathrm{I}_n$.

2) Dans cette question, on suppose que $\alpha_1, ..., \alpha_n$ sont deux-à-deux distincts. Soit $\mathrm{B} = (b_{ij}) \in \mathcal{C}(\mathrm{D})$.
On doit remarquer que **cette situation n'a rien à voir avec celle de la question précédente. On ne peut pas utiliser ce qu'on a déjà démontré ! !**

a) Les notations disent que $\mathrm{BD} = \mathrm{DB}$, *i.e.*, que, pour tous $1 \leq i, j \leq n$, $(\mathrm{BD})_{ij} = (\mathrm{DB})_{ij}$. Il faut appliquer, **avec (une fausse) naïveté**, la formule du produit matriciel pour en déduire que $\alpha_i b_{ij} = b_{ij}\alpha_j$.
Il faut ensuite être capable d'écrire sans y passer un quart de page que $\alpha_i \neq \alpha_j$ implique b_{ij} ! **Vous devez savoir reconnaître une question triviale et réaliser qu'y consacrer plus de deux lignes vous dessert !**

b) Une jolie application des interpolateurs de Lagrange que seule une minorité a su apprécier...

c) Pour conclure que $\mathbb{K}[\mathrm{D}] = \mathcal{CC}(\mathrm{D}) = \mathcal{C}(\mathrm{D})$, puisqu'on sait déjà que $\mathbb{K}[\mathrm{D}] \subset \mathcal{CC}(\mathrm{D}) \subset \mathcal{C}(\mathrm{D})$, le plus simple est de montrer que $\mathcal{C}(\mathrm{D}) \subset \mathbb{K}[\mathrm{D}]$, ce qui était exactement ce vers quoi les questions **a** et **b** amenaient...

3) Dans cette question, on suppose qu'il existe des entiers $n_1, ..., n_r \geq 1$ avec $n = \sum_{k=1}^{r} n_k$ et des scalaires $\beta_1, ..., \beta_r$ deux-à-deux distincts tels que $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \beta_1 \mathrm{I}_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2 \mathrm{I}_{n_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_r \mathrm{I}_{n_r} \end{pmatrix}$.
Cette situation n'a rien à voir avec celles des questions précédentes. On ne peut pas utiliser ce qu'on a déjà démontré ! !

a) Soit $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On voit B par blocs de tailles compatibles avec le découpage en blocs de D et on doit montrer que $\mathrm{B} \in \mathcal{C}(\mathrm{D})$ si et seulement si $\mathrm{B}_{ij} = 0$ pour tous $i \neq j$ dans $[\![1, r]\!]$. Difficile, comme dans **1.a**, de traiter la question de manière convaincante sans calculer (par blocs) BD et DB plus ou moins explicitement...

b) Question difficile à rédiger correctement, que personne ou presque n'a abordé. Voir le corrigé.

4) Soient $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$ semblables dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et Q dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{A}_2 = \mathrm{QA}_1\mathrm{Q}^{-1}$.

a) L'égalité d'ensembles $\mathcal{C}(\mathrm{A}_2) = \{\mathrm{QB}_1\mathrm{Q}^{-1}, \mathrm{B}_1 \in \mathcal{C}(\mathrm{A}_1)\}$ à démontrer est une **double inclusion**. Notons que $\mathcal{C}(\mathrm{A}_2) = \{\mathrm{B}_2 \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \text{ t.q. } \mathrm{A}_2\mathrm{B}_2 = \mathrm{B}_2\mathrm{A}_2\}$ et de $\{\mathrm{QB}_1\mathrm{Q}^{-1}, \mathrm{B}_1 \in \mathcal{C}(\mathrm{A}_1)\}$ sont des **ensembles définis de manières profondément différentes**.
Le premier est un **sous-ensemble défini par une condition**, comme $\{x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x^2 - 3x + 2 = 0\}$ par exemple. Ce type d'ensemble est **défini implicitement**, comme un noyau.
Le second est la donnée d'**une formule** et d'**un ensemble auquel appliquer cette formule**, comme par exemple l'ensemble $\left\{\frac{3+\varepsilon}{2}, \varepsilon \in \{\pm 1\}\right\}$. Ce type d'ensemble est **défini explicitement**, comme une image.
Il est toujours plus facile de montrer qu'un ensemble défini explicitement est inclus dans un ensemble défini implicitement que le contraire : il suffit de montrer que les éléments qu'on a sous la main sont solutions du problème. Par exemple, c'est trivial de vérifier que 1 et 2 sont solutions de $x^2 - 3x + 2 = 0$! Savoir le faire revient à avoir compris la signification de x dans une équation (5ème ?) Montrer qu'il n'y en a pas d'autre est beaucoup plus subtil (1ère ?)
Ici, vérifier que, pour tout $\mathrm{B}_1 \in \mathcal{C}(\mathrm{A}_1)$, on a $\mathrm{A}_2(\mathrm{QB}_1\mathrm{Q}^{-1}) = (\mathrm{QB}_1\mathrm{Q}^{-1})\mathrm{A}_2$ prend une ligne. Il suffit de remplacer A_2 par $\mathrm{QA}_1\mathrm{Q}^{-1}$ et d'utiliser le fait que $\mathrm{B}_1 \in \mathcal{C}(\mathrm{A}_1)$. Montrer l'inclusion réciproque était plus subtil.
La conscience de cette dissymétrie dans les définitions a manqué aux quelques élèves qui ont abordé cette question, et leurs réponses ont significativement manqué de direction...

Répartition des notes. **Moyenne : 10,77.** **Médiane : 9,60.** **Ecart-type : 4,54.**

Note	4		6		8		10		12		14		16		20	...
Nombre		1		12		10		9		1		4		3		3
Rang	45e		44e		30e		21e		13e		11e		7e		4e	

(*Lecture du tableau : La seconde ligne indique le nombre de copies entre les notes indiquées sur la première ligne. Un élève (fictif) avec une note de la première ligne aurait le rang indiqué sur la dernière ligne.*)