Corrigé du DM3 (A rendre le 02/11/2026)

Exercice I - Déterminant de Cauchy

Soient $n \geq 2$ un entier et $(a_1, ..., a_n)$, $(b_1, ..., b_n)$ deux n-uplets de complexes tels que, pour tous $1 \leq i, j \leq n$, $a_i + b_j \neq 0$. On note

$$\mathrm{D}_n(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n) = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}.$$

Le but de l'exercice est de montrer que $\mathrm{D}_n(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n) = \dfrac{\prod\limits_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod\limits_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)}$.

1) On calcule

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_2(a_1, a_2, b_1, b_2) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_1+b_1}\frac{1}{a_2+b_2} - \frac{1}{a_1+b_2}\frac{1}{a_2+b_1} \\ &= \frac{(a_1+b_2)(a_2+b_1) - (a_1+b_1)(a_2+b_2)}{(a_1+b_1)(a_1+b_2)(a_2+b_1)(a_2+b_2)} \\ &= \frac{a_1b_1 + a_2b_2 - a_1b_2 - a_2b_1}{(a_1+b_1)(a_1+b_2)(a_2+b_1)(a_2+b_2)} \\ &= \frac{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}{(a_1+b_1)(a_1+b_2)(a_2+b_1)(a_2+b_2)} \end{aligned}$$

pour conclure que le résultat à démontrer est bien vrai au rang $n = 2$.

2) S'il existe $1 \leq i < j \leq n$ tels que $a_i = a_j$, les lignes l_i et l_j du déterminant de Cauchy sont égales donc on a bien $\mathrm{D}_n(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n) = 0$.
S'il existe $1 \leq i < j \leq n$ tels que $b_i = b_j$, les colonnes c_i et c_j du déterminant de Cauchy sont égales donc on a bien $\mathrm{D}_n(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n) = 0$.

On suppose dans la suite que $n \geq 3$ et que, pour tous $1 \leq i < j \leq n$, $a_i \neq a_j$ et $b_i \neq b_j$.
On note $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{-b_1, ..., -b_n\}$ et, pour tout $\lambda \in \Omega$, on note $\mathrm{F}(\lambda) = \mathrm{D}_n(a_1, ..., a_{n-1}, \lambda, b_1, ..., b_n)$, *i.e.*,

$$\mathrm{F}(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{n-1}} & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ \frac{1}{\lambda+b_1} & \frac{1}{\lambda+b_2} & \cdots & \frac{1}{\lambda+b_{n-1}} & \frac{1}{\lambda+b_n} \end{vmatrix}.$$

3) Remarquons que, pour tout $1 \leq j \leq n$, le mineur d'indice (n, j) du déterminant précédent est

$$\Delta_{n,j} = \mathrm{D}_{n-1}(a_1, ..., a_{n-1}, b_1, ..., b_{j-1}, b_{j+1}, ..., b_n).$$

On pose alors $\mu_j = (-1)^{n+j}\Delta_{n,j}$ et, en développant par rapport à la dernière ligne, $\mathrm{F}(\lambda) = \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\mu_j}{\lambda + b_j}$.

4) En mettant au même dénominateur, on obtient, pour tout $\lambda \in \Omega$,

$$\mathrm{F}(\lambda) = \frac{\mathrm{P}(\lambda)}{\prod_{j=1}^{n}(\lambda + b_j)} \quad \text{avec} \quad \mathrm{P}(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} (\lambda + b_i).$$

En particulier, P est polynomiale de degré inférieur ou égal à $n-1$ (comme combinaison linéaire de fonction qui le sont). Pour tout $1 \leq i \leq n-1$, on a

$$\mathrm{F}(a_i) = \mathrm{D}_n(a_1, ..., a_{n-1}, a_i, b_1, ...b_n) = 0$$

d'après la question **2** et $a_1, ..., a_{n-1}$ sont racines (deux-à-deux distinctes) de P. Ainsi, P est de degré $n-1$ (ou nul) et en notant A son coefficient dominant (ou 0), on a $\mathrm{P}(\lambda) = \mathrm{A} \prod_{i=1}^{n-1}(\lambda - a_i)$. On a donc bien

$$\mathrm{F}(\lambda) = \frac{\mathrm{A}(\lambda - a_1)...(\lambda - a_{n-1})}{(\lambda + b_1)...(\lambda + b_n)}.$$

5) On multiplie l'égalité $\mathrm{F}(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mu_j}{\lambda + b_j} = \frac{\mathrm{A}(\lambda - a_1)...(\lambda - a_{n-1})}{(\lambda + b_1)...(\lambda + b_n)}$ par $\lambda + b_n$: on obtient, pour tout $\lambda \in \Omega$,

$$\mu_n + \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j \frac{\lambda + b_n}{\lambda + b_j} = \frac{\mathrm{A}(\lambda - a_1)...(\lambda - a_{n-1})}{(\lambda + b_1)...(\lambda + b_{n-1})}.$$

On peut maintenant évaluer cette égalité en $-b_n$ (*rigoureusement, il faudrait prendre une suite $(\lambda_k) \in \Omega^{\mathbb{N}}$ qui tend vers $-b_n$, justifier (par les théorèmes généraux) que les membres de droite et de gauche convergent et conclure par unicité de la limite.*) On obtient bien

$$\mu_n = \frac{\mathrm{A}(-b_n - a_1)...(-b_n - a_{n-1})}{(-b_n + b_1)...(-b_n + b_{n-1})} \quad , \textit{ i.e.}, \quad \mathrm{A} = \mu_n \frac{(b_n - b_1)...(b_n - b_{n-1})}{(a_1 + b_n)...(a_{n-1} + b_n)}.$$

6) Par définition, on a $\mathrm{D}_n(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n) = \mathrm{F}(a_n)$. D'après les questions **4** et **5**, on a donc

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_n(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n) &= \mu_n \frac{(b_n - b_1)...(b_n - b_{n-1})}{(a_1 + b_n)...(a_{n-1} + b_n)} \frac{(a_n - a_1)...(a_n - a_{n-1})}{(a_n + b_1)...(a_n + b_n)} \\ &= \mu_n \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n - a_i)(b_n - b_i)}{\prod_{i=1}^{n-1}(a_i + b_n) \prod_{j=1}^{n}(a_n + b_j)} \end{aligned}$$

D'après **3**, $\mu_n = \mathrm{D}_{n-1}(a_1, ..., a_{n-1}, b_1, ..., b_{n-1})$. On raisonne donc par récurrence et on suppose que la formule à démontrer est vraie au rang $n-1$. On a alors

$$\mathrm{D}_n(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n) \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n-1}(a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i,j \leq n-1}(a_i + b_j)} \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(a_n - a_i)(b_n - b_i)}{\prod_{i=1}^{n-1}(a_i + b_n) \prod_{j=1}^{n}(a_n + b_j)}.$$

Au numérateur, on obtient immédiatement $\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)$. Au dénominateur, on calcule

$$\prod_{1\leq i,j\leq n-1}(a_i+b_j)\prod_{i=1}^{n-1}(a_i+b_n)\prod_{j=1}^{n}(a_n+b_j)=\prod_{\substack{1\leq i\leq n-1\\1\leq j\leq n}}(a_i+b_j)\prod_{j=1}^{n}(a_n+b_j)=\prod_{1\leq i,j\leq n}(a_i+b_j).$$

Avec la question **1**, on peut ainsi conclure selon le principe de récurrence que le résultat à démontrer est vrai pour tout $n\geq 2$.

Exercice II - Représentation matricielle d'un endomorphisme annulé par le polynôme $\mathrm{T}^3+\mathrm{T}$.

Dans cet exercice, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f est un endomorphisme non-nul de E tel que $f^3+f=0$. On note J la matrice $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$.

1) Un exemple. Dans cette question, f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$.

a) On vérifie que $\mathrm{A}^3+\mathrm{A}=0$ par le calcul.

b) On remarque que $c_1(\mathrm{A})$ et $c_2(\mathrm{A})$ ne sont pas proportionnelles (ce qui assure que $\mathrm{rg}(\mathrm{A})\geq 2$) puis que $c_3(\mathrm{A})=c_1(\mathrm{A})+c_2(\mathrm{A})$ (ce qui assure que $\mathrm{rg}(\mathrm{A})\leq 2$). Ainsi, $\mathrm{Im}(\mathrm{A})=\mathrm{Vect}(c_1(\mathrm{A}),c_2(\mathrm{A}))$.
Les coefficients de la CL nulle non-triviale $c_1(\mathrm{A})+c_2(\mathrm{A})-c_3(\mathrm{A})=0$ donnent un vecteur de $\ker(\mathrm{A})$ et, avec le théorème du rang,

$$\ker(\mathrm{A})=\mathbb{K}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

(*Alternativement, on applique Gauss-Jordan et on trouve* $\mathrm{A}\underset{\mathrm{L}}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\underset{\mathrm{L}}{\sim}\begin{pmatrix}\boxed{1}&0&1\\0&\boxed{1}&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.)

On trouve une équation de l'hyperplan $\mathrm{Im}(\mathrm{A})$ en remarquant qu'un vecteur $w=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^3$ appartient à $\mathrm{Im}(\mathrm{A})$ si et seulement si $\det(c_1(\mathrm{A}),c_2(\mathrm{A}),w)=\begin{vmatrix}0&1&x\\-1&1&y\\-1&0&z\end{vmatrix}=x-y+z=0$. Puisque le vecteur directeur de la droite $\ker(\mathrm{A})$ trouvé ci-dessus ne satisfait pas cette équation, on a bien $\mathbb{R}^3=\mathrm{Im}(\mathrm{A})\oplus\ker(\mathrm{A})$.

c) D'après la formule de changement de base, trouver P inversible telle que $\mathrm{A}=\mathrm{P}\begin{pmatrix}\mathrm{J}&0\\0&0\end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}$ revient à trouver une base B de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathrm{B}}(\Phi_{\mathrm{A}})=\begin{pmatrix}\mathrm{J}&0\\0&0\end{pmatrix}$, avec $\mathrm{B}=(c_1(\mathrm{P}),c_2(\mathrm{P}),c_3(\mathrm{P}))$.
Dans ce cas, on a immédiatement $\mathrm{Vect}(c_1(\mathrm{P}),c_2(\mathrm{P}))=\mathrm{Im}(\mathrm{A})$ et $\ker(\mathrm{A})=c_3(\mathrm{P})$ donc on prend

$$c_1(\mathrm{P})=c_1(\mathrm{A})=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix},\quad c_2(\mathrm{P})=\mathrm{A}c_1(\mathrm{A})=c_1(\mathrm{A}^2)=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad c_3(\mathrm{P})=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Puisque $c_1(\mathrm{P})$ et $c_2(\mathrm{P})$ ne sont pas proportionnelles, $(c_1(\mathrm{P}),c_2(\mathrm{P}))$ est une base de $\mathrm{Im}(\mathrm{A})$ et, d'après **1.a**

et **1.b**, $(c_1(\mathrm{P}), c_2(\mathrm{P}), c_3(\mathrm{P}))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ donc P est inversible. Par construction, on a

$$\mathrm{A}c_1(\mathrm{P}) = c_2(\mathrm{P}), \quad \mathrm{A}c_2(\mathrm{P}) = c_1(\mathrm{A}^3) = -c_1(\mathrm{A}) = -c_1(\mathrm{P}) \quad \text{et} \quad \mathrm{A}c_3(\mathrm{P}) = 0,$$

donc la matrice représentative de l'endomorphisme canoniquement associé à A dans la base B est $\begin{pmatrix} \mathrm{J} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a donc bien $\mathrm{A} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} \mathrm{J} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1}$.

2) Montrons que $\mathrm{E} = \mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f)$ en procédant par analyse-synthèse. Soit $v \in \mathrm{E}$.
Supposons qu'il existe $(v_\mathrm{K}, v_\mathrm{I}) \in \ker(f) \times \mathrm{Im}(f)$ tel que $v = v_\mathrm{K} + v_\mathrm{I}$. Par définition, il existe $u \in \mathrm{E}$ tel que $v_\mathrm{I} = f(u)$ et, puisque $f^3 + f = (f^2 + \mathrm{I_E}) \circ f = 0$, on applique $f^2 + \mathrm{I_E}$. On obtient

$$(f^2 + \mathrm{I_E})(v) = (f^2 + \mathrm{I_E})(v_\mathrm{K}) = f^2(v_\mathrm{K}) + v_\mathrm{K} = v_\mathrm{K} \quad \text{et donc} \quad v_\mathrm{I} = v - (f^2 + \mathrm{I_E})(v) = -f^2(v).$$

Ainsi, si une telle décomposition de v existe, elle est unique et la somme $\mathrm{Im}(f) + \ker(f)$ est directe.
Puisque $f \circ (f^2 + \mathrm{I_E}) = f^3 + f = 0$, on a $\mathrm{Im}(f^2 + \mathrm{I_E}) \subset \ker(f)$ et $(f^2 + \mathrm{I_E})(v) \in \ker(f)$. Il est clair par ailleurs que $v = (f^2 + \mathrm{I_E})(v) - f^2(v)$ et que $-f^2(v) = f(-f(v)) \in \mathrm{Im}(f)$. Ainsi on a bien $\mathrm{E} = \mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f)$.

3) a) Soit $v \neq 0$ un vecteur de $\mathrm{Im}(f)$. Par définition, il existe $u \in \mathrm{E}$ tel que $v = f(u)$ et, puisque $f^3 = -f$, $f^2(v) = f^3(u) = -f(u) = -v$. Montrons que $(v, f(v))$ est libre : soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda v + \mu f(v) = 0$.
On applique f et on obtient le système

$$\begin{cases} \lambda v + \mu f(v) = 0 \\ \lambda f(v) - \mu v = 0 \end{cases}.$$

On élimine $f(v)$ en faisant $\lambda\ell_1 - \mu\ell_2$ et il vient $(\lambda^2 + \mu^2)v = 0$. Puisque $v \neq 0$, on a $\lambda^2 + \mu^2 = 0$ et puisque λ et μ sont réels, il vient $\lambda = \mu = 0$. Ainsi, $(v, f(v))$ est libre.

b) Soit $m \geq 1$ un entier et $v_1, ..., v_m, v_{m+1}$ des vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$ tels que $(v_1, f(v_1), ..., v_m, f(v_m), v_{m+1})$ est libre. Montrons que la famille $(v_1, f(v_1), ..., v_r, f(v_m), v_{m+1}, f(v_{m+1}))$ est encore libre. A nouveau, pour tout $1 \leq k \leq m+1$, il existe $u_k \in \mathrm{E}$ tel que $f(u_k) = v_k$ donc $f^2(v_k) = -v_k$. On se donne $(\lambda_1, \mu_1, ..., \lambda_{m+1}, \mu_{m+1}) \in \mathbb{R}^{2m+2}$ tel que $\sum_{k=1}^{m+1}(\lambda_k v_k + \mu_k f(v_k)) = 0$.
On applique f et on obtient le système

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{m+1}(\lambda_k v_k + \mu_k f(v_k)) = 0 \\ \sum_{k=1}^{m+1}(\lambda_k f(v_k) - \mu_k v_k) = 0 \end{cases}.$$

On élimine $f(v_{m+1})$ en faisant $\lambda_{m+1}\ell_1 - \mu_{m+1}\ell_2$ et il vient

$$\sum_{k=1}^{m}[(\lambda_{m+1}\lambda_k + \mu_{m+1}\mu_k)v_k + (\lambda_{m+1}\mu_k - \mu_{m+1}\lambda_k)f(v_k)] + (\lambda_{m+1}^2 + \mu_{m+1}^2)v_{m+1} = 0.$$

Puisque la famille $(v_1, f(v_1), ..., v_m, f(v_m), v_{m+1})$ est libre, on a en particulier $\lambda_{m+1}^2 + \mu_{m+1}^2 = 0$ donc $\lambda_{m+1} = \mu_{m+1} = 0$. Ainsi, $\sum_{k=1}^{m}(\lambda_k v_k + \mu_k f(v_k)) = 0$ et on en déduit que $\lambda_k = \mu_k = 0$ pour tout $1 \leq k \leq m$, ce qui permet de conclure.

c) D'après **3.a**, l'ensemble

$$\{m \in \mathbb{N}^* \text{ t.q. il existe } (v_1, ..., v_m) \in \mathrm{Im}(f)^r \text{ t.q. } (v_1, f(v_1), ..., v_m, f(v_m)) \text{ est libre}\}$$

contient 1. Par hypothèse, E est de dimension finie donc $\mathrm{rg}(f)$ est fini et cet ensemble non-vide est majoré. On note r son maximum et on choisit $(v_1, ..., v_r) \in \mathrm{Im}(f)^r$ tel que $(v_1, f(v_1), ..., f(v_r))$ est libre.
Si $(v_1, f(v_1), ..., v_r, f(v_r))$ n'engendre pas $\mathrm{Im}(f)$, on peut choisir un vecteur supplémentaire $v_{r+1} \in \mathrm{Im}(f)$ tel que $(v_1, f(v_1), ..., v_r, f(v_r), v_{r+1})$ est encore libre. Mais **3.b** amène alors une contradiction avec la maximalité de r. Ainsi, $(v_1, f(v_1), ..., v_r, f(v_r))$ est bien une base de $\mathrm{Im}(f)$.

4) Notons $n = \dim(\mathrm{E})$. D'après le théorème du rang, et avec les notation de **3.c**, $\dim(\ker(f)) = n - 2r$ et on choisit une base $(e_{2r+1}, ..., e_n)$ de $\ker(f)$. Puisque $\mathrm{E} = \mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f)$, la concaténation

$$\mathrm{B} = (v_1, f(v_1), ..., v_r, f(v_r), e_{2r+1}, ..., e_n)$$

est une base de E. Comme dans la question **3**, pour tout $1 \leq k \leq r$, on a $f^2(v_k) = -v_k$ donc les sous-espaces $\mathrm{Vect}(v_k, f(v_k))$ sont stables par f et on construit les blocs (diagonaux) de la matrice représentative de f dans la base B pour obtenir

$$\mathrm{Mat}_{\mathrm{B}}(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{J} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \mathrm{J} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{avec } r \text{ blocs J.}$$

Exercice III - Représentation matricielle d'un endomorphisme nilpotent

Dans cet exercice, f est un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Son *indice de nilpotence* est $q = \min\{k \geq 1 \text{ tel que } f^k = 0\}$ (et on définit de manière analogue l'indice de nilpotence d'une matrice).

On se propose de montrer qu'il existe $r \geq 1$ des entiers $q = p_1 \geq ... \geq p_r \geq 1$ avec $\sum_{k=1}^{r} p_k = \dim(\mathrm{E})$ et une base B de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathrm{B}}(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{N}_{p_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{N}_{p_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{N}_{p_r} \end{pmatrix} \quad \text{où, pour tout } p \geq 1, \quad \mathrm{N}_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_p(\mathbb{K}).$$

On notera que, pour tout $p \geq 1$, l'indice de nilpotence de N_p est égal à p.

0) Exemples en dimension 4. Il y a 5 familles d'entiers $p_1 \geq ... \geq p_r \geq 1$ telles que $\sum_{k=1}^{r} p_k = 4$.

- Avec $r = 1$, on doit prendre $p_1 = 4$. La matrice correspondante est $\mathrm{N}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

  Elle est de rang 3 et son indice de nilpotence est 4.

- Avec $r = 2$, on doit prendre $3 + 1 = 4$ ou $2 + 2 = 4$. Les matrices correspondantes sont

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{N}_3 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{N}_1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{N}_2 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{N}_2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  La première est de rang 2 et son indice de nilpotence est 3, la seconde est de rang 2 et son indice de nilpotence est 2.

- Avec $r = 3$, on doit prendre $2 + 1 + 1 = 4$.

  La matrice correspondante est $\left(\begin{array}{c|c|c} \mathrm{N}_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{N}_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathrm{N}_1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, de rang 1 et d'indice de nilpotence 2.

- Avec $r = 4$, on doit prendre $1 + 1 + 1 + 1 = 4$. La matrice correspondante est la matrice nulle (donc de rang 0) puisque $\mathrm{N}_1 = 0$. Son indice de nilpotence est 1.

1) Si $f = f^1 = 0$, on a $\mathrm{M_B}(f) = 0$ pour toute base B de E, qui est bien du type annoncé avec $r = \dim(\mathrm{E})$ et $p_1 = ... = p_r = 1$.
Si $\dim(\mathrm{E}) = 1$, l'inclusion $\ker(f) \subset \mathrm{E}$ est donc nécessairement une égalité car $1 \leq \dim(\ker(f)) \leq \dim(\mathrm{E})$. On a donc $f = 0$ et le résultat annoncé est vrai.

On suppose dans la suite de cette partie que $f \neq 0$. On a donc $q \geq 2$ et on peut choisir $v \in \mathrm{E}$ tel que $f^{q-1}(v) \neq 0$.

2) a) Soient $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{q-1}) \in \mathbb{K}^q$ des scalaires tels que $\sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k f^k(v) = 0$. En remarquant que, pour tout $m \geq q$, on a $f^m(v) = f^{m-q}(f^q(v)) = f^{m-q}(0) = 0$, on applique f^{q-1} et on obtient

$$\sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k f^{q+k-1}(v) = \lambda_0 f^{q-1}(v) = 0$$

donc $\lambda_0 = 0$. On itère : soit $0 \leq j \leq q-2$ et supposons qu'on a déjà montré que $\lambda_0 = ... = \lambda_j = 0$. On a donc $\sum_{k=j+1}^{q-1} \lambda_k f^k(v) = 0$ et on applique f^{q-j-2}. On obtient (avec le changement d'indice $k = i + (j+1)$)

$$\sum_{k=j+1}^{q-1} \lambda_k f^{q+k-j-2}(v) = \sum_{i=0}^{q-j-2} \lambda_{i+j+1} f^{q+i-1}(v) = \lambda_{j+1} f^{q-1}(v) = 0$$

donc $\lambda_{j+1} = 0$. On conclut selon le principe de récurrence que $\lambda_0 = ... = \lambda_{q-1} = 0$ et la famille $(f^{q-1}(v), f^{q-2}(v), ..., f(v), v)$ est libre. Son cardinal q est donc nécessairement inférieur ou égal à $\dim(\mathrm{E})$.

b) On note F_v le sous-espace $\mathrm{Vect}(f^{q-1}(v), f^{q-2}(v), ..., f(v), v)$ (qui est donc de dimension q puisque la question précédente donne la base $\mathrm{B}_v = (f^{q-1}(v), f^{q-2}(v), ..., f(v), v)$ de ce sous-espace).
Pour tout $w \in \mathrm{F}_v$, il existe $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{q-1}) \in \mathbb{K}^q$ tel que $w = \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k f^k(v)$ et on a

$$f(w) = \sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k f^{k+1}(v) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_{i-1} f^i(v) = \sum_{i=1}^{q-1} \lambda_{i+1} f^i(v)$$

car $f^q(v) = 0$. Ainsi, $f(w) \in \mathrm{F}_v$ et F_v est bien stable par f.
Pour tout $1 \leq j \leq q$, le j-ième vecteur de B_v est donc $f^{q-j}(v)$ et on calcule

$$f_{\mathrm{F}_v}(f^{q-j}(v)) = f(f^{q-j}(v)) = f^{q-j+1}(v) = f^{q-(j-1)}(v).$$

Ainsi, l'image par f du premier vecteur de B_v est $f^q(v) = 0$ et, pour tout $2 \leq j \leq q$, l'image du j-ième vecteur de la base B_v est le $(j-1)$-ième vecteur de B_v. On a donc $\mathrm{Mat}_{\mathrm{B}_v}(f_{\mathrm{F}_v}) = \mathrm{N}_q$.

c) Supposons que $q = \dim(\mathrm{E})$. Par construction, on a $q = \dim(\mathrm{F}_v)$ donc l'inclusion $\mathrm{F}_v \subset \mathrm{E}$ est une égalité. Ce qui précède assure donc l'existence d'une base de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathrm{B}}(f) = \mathrm{N}_q$. C'est le résultat annoncé avec $r = 1$ et $p_1 = q$.
Si $\dim(\mathrm{E}) = 2$, l'hypothèse $q \geq 2$ force $q = \dim(\mathrm{E})$ donc le résultat annoncé est vrai.

On suppose dans la suite que $\dim(\mathrm{E}) \geq 3$, que $q < \dim(\mathrm{E})$ et que le résultat est vrai pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E' de dimension strictement inférieure à $\dim(\mathrm{E})$ et pour tout endomorphisme nilpotent f' de E'.

3) a) La famille $(f^{q-1}(v), f^{q-2}(v), ..., f(v), v)$ est libre donc on peut la compléter en une base

$$(f^{q-1}(v), f^{q-2}(v), ..., f(v), v, w_{q+1}, ..., w_{\dim(\mathrm{E})})$$

de E. Puisqu'une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base, il existe une (unique) forme linéaire $\varphi : \mathrm{E} \to \mathbb{K}$ telle que

$$\varphi(f^{q-1}(v)) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi(f^{q-2}(v)) = ... = \varphi(f(v)) = \varphi(v) = \varphi(w_{q+1}) = ... = \varphi(w_{\dim(\mathrm{E})}) = 0.$$

b) Soient $0 \leq i, j \leq q-1$ des entiers. La composée $\varphi \circ f^i : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ d'applications linéaires est encore linéaire et on a

$$(\varphi \circ f^i)(f^{q-1-j}(v)) = \varphi(f^{q-1-(j-i)}(v)) = \delta_{ij}.$$

En effet, si $i = j$, on a $\varphi(f^{q-1}(v)) = 1$ par définition de φ.
Si $j < i$, on a $j - i < 0$ donc $q - 1 - (j - i) \geq q$ et $\varphi(f^{q-1-(j-i)}(v)) = \varphi(0) = 0$.
Si $i < j$, on a $j - i > 0$ donc $q - 1 - (j - i) \leq q - 2$ et $\varphi(f^{q-1-(j-i)}(v)) = 0$ par définition de φ.

4) On note $\Phi : \mathrm{E} \to \mathbb{K}^q$ l'application définie par $\Phi(w) = (\varphi(w), \varphi \circ f(w), ..., \varphi \circ f^{q-1}(w))$ pour tout $w \in \mathrm{E}$.

a) D'après ce qui précède, chaque composante de Φ est linéaire. Par définition du calcul dans $\mathbb{K}^q$, l'application $\Phi : \mathrm{E} \to \mathbb{K}^q$ est donc bien linéaire.
Notons $(e_1, ..., e_q)$ la base canonique de $\mathbb{K}^q$. D'après la question précédente, pour tout $0 \leq j \leq q-1$, on a

$$\Phi(f^{q-j-1}(v)) = \begin{pmatrix} \delta_{0,j} \\ \delta_{1,j} \\ \vdots \\ \delta_{q-1,j} \end{pmatrix} = e_{j+1}.$$

Ainsi, $\mathbb{K}^q = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_q) \subset \mathrm{Im}(\Phi)$, ce qui prouve la surjectivité de Φ. En particulier, $\mathrm{rg}(\Phi) = q$.
On pose $\mathrm{G}_v = \ker(\Phi)$. D'après le théorème du rang, on a

$$\dim(\mathrm{G}_v) = \dim(\mathrm{E}) - \mathrm{rg}(\Phi) = \dim(\mathrm{E}) - q = \dim(\mathrm{E}) - \dim(\mathrm{F}_v)$$

donc $\mathrm{E} = \mathrm{F}_v \oplus \mathrm{G}_v$ si et seulement si $\mathrm{F}_v \bigcap \mathrm{G}_v = \{0\}$. On se donne donc un vecteur $w \in \mathrm{F}_v \bigcap \mathrm{G}_v$. Il existe $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{q-1}) \in \mathbb{K}^q$ tel que $w = \sum_{j=0}^{q-1} \lambda_j f^{q-1-j}(v)$. Comme $\Phi(w) = 0$, on doit avoir $(\varphi \circ f^i)(w) = 0$

pour tout $0 \leq i \leq q-1$. Par linéarité, on calcule

$$(\varphi \circ f^i)(w) = \sum_{j=0}^{q-1} \lambda_j (\varphi \circ f^i)(f^{q-1-j}(v)) = \sum_{j=0}^{q-1} \lambda_j \delta_{ij} = \lambda_i$$

et on conclut que, pour tout $0 \leq i \leq q-1$, $\lambda_i = 0$. Ainsi $w = 0$, $\mathrm{F}_v \bigcap \mathrm{G}_v = \{0\}$ et $\mathrm{E} = \mathrm{F}_v \oplus \mathrm{G}_v$.

b) Soit $w \in \mathrm{G}_v$. On a donc $\Phi(w) = 0$, *i.e.*, pour tout $0 \leq i \leq q-1$, $\varphi \circ f^i(w) = 0$.
Par conséquent, pour tout $0 \leq i \leq q-2$, on a $0 \leq i+1 \leq q-1$ et $\varphi \circ f^i(f(w)) = \varphi \circ f^{i+1}(w) = 0$.
De plus, on a bien entendu $\varphi \circ f^{q-1}(f(v)) = \varphi \circ f^q(v) = \varphi(0) = 0$.
Ainsi, on a $\Phi(f(w)) = 0$ et $f(w) \in \mathrm{G}_v$, ce qui prouve que G_v est stable par f (donc par f^q). On sait que $(f_{\mathrm{G}_v})^q = (f^q)_{\mathrm{G}_v} = 0$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{G}_v)$ donc f_{G_v} est nilpotent et, si q' est son indice de nilpotence, $q' \leq q$ puisque $f^q = 0$.

5) Puisque F_v contient $v \neq 0$, on a $0 < \dim(\mathrm{F}_v) = q \leq \dim(\mathrm{E}) - 1$ donc $1 \leq \dim(\mathrm{G}_v) < \dim(\mathrm{E})$. En prenant $\mathrm{E}' = \mathrm{G}_v$ et $f' = f_{\mathrm{G}_v}$, on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe un entier $r' \geq 1$, des entiers $p'_1 \geq ... \geq p'_{r'} \geq 1$ avec $p'_1 = q'$ et $\sum_{k=1}^{r'} p'_k = \dim(\mathrm{G}_v)$, et une base B' de G_v tel que

$$\mathrm{Mat}_{\mathrm{B}'}(f_{\mathrm{G}_v}) = \begin{pmatrix} \mathrm{N}_{p'_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{N}_{p'_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{N}_{p'_{r'}} \end{pmatrix}.$$

On pose alors $r = r' + 1$, $p_1 = q$, $p_2 = p'_1 = q'$,..., $p_r = p'_{r'}$ et on a bien $p_1 \geq p_2 \geq ... \geq p_r$ et

$$\sum_{k=1}^{r} p_k = p_1 + \sum_{k=2}^{r} p_r = \dim(\mathrm{F}_v) + \dim(\mathrm{G}_v) = \dim(\mathrm{E}).$$

En outre, puisque $\mathrm{E} = \mathrm{F}_v \oplus \mathrm{G}_v$, la concaténation de la base B_v de F_v et de la base B' de G_v est une base B de E et on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathrm{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{N}_q & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{Mat}_{\mathrm{B}'}(f_{\mathrm{G}_v}) \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \mathrm{N}_q & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{N}_{p'_1} & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{N}_{p'_{r'}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{N}_{p_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{N}_{p_2} & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{N}_{p_r} \end{pmatrix}.$$

On peut donc conclure selon le principe de récurrence que le résultat est vrai en dimension finie quelconque.